LA CORRESPONDENCIA NÚMERO IRRACIONAL-PUNTO DE LA RECTA. DE OBJETO DE ESTUDIO A OBJETO A ENSEÑAR

Verdún Nora - Caronia Silvia
Instituto Posadas Nº 0403
Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales. UNAM. Argentina
nograverdun@yahoo.com.ar - silca_100@fibertel.com.ar
Nivel educativo: Medio
Palabras clave: irracional, recta, praxelogía, transposición

RESUMEN

Este trabajo forma parte de un estudio didáctico-matemático que sigue los lineamientos de la Teoría Antropológica de Chevallard.
Tiene por objetivo caracterizar las *transformaciones* a las que se ha sometido el objeto matemático: números irracionales - recta numérica, desde un modelo de *organización matemática* en relación con la problemática de la correspondencia número irracional- punto de la recta, hasta la enseñanza de los mismos en la institución escolar, vista desde dos dispositivos: Currículo y un libro de texto.
Esta comunicación se centra en el problema específico de "la asignación de un punto de la recta a un número irracional dado". Se anticipan algunas conclusiones que a priori se pudieron observar con respecto a la citada transformación.

INTRODUCCIÓN

El Diseño Curricular de la Provincia de Misiones pretende, a medida que transcurren los años de escolaridad, la ampliación de los conjuntos numéricos, de tal modo que al finalizar la E.G.B.3 (Educación General Básica, Tercer ciclo), el alumno haya "aprendido" la noción de número real, como así también las propiedades de los distintos conjuntos numéricos.
En particular, en los 9^{nos} años de E.G.B.3 y 1er año de Polimodal, se incorporan a los números racionales hasta allí conocidos por el alumno, los números irracionales: su concepto, la representación en la recta y las propiedades de la misma, terminándose por conformar así, la recta de números reales. Específicamente, se considera que la presentación de los números irracionales es escueta y se efectúa con el propósito de llegar a completar la estructura numérica de los reales.
En los libros de texto de los niveles de enseñanza enunciados precedentemente, en general, cuando describen las características de la recta "real" se insiste en la biyección que existe entre cada punto de la recta y cada número real, ya sea racional ó irracional. Se señala que, aunque la recta con los números racionales es "densa", aún tiene "huecos" y esos huecos se completan con los números irracionales, queda así la recta "continua", cubierta totalmente de números reales.
Sin embargo, al momento de representar a los números irracionales en la recta, la mayoría de los libros (de 9no año de E.G.B.3 o 1eraño de Polimodal) explican un procedimiento geométrico, basado en el Teorema de Pitágoras, para la $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ y algunas raíces cuadradas más, tras lo cual efectúan la generalización mencionada en el párrafo anterior, es decir, la biyección entre números reales y puntos de la recta. Con la representación de unos pocos números irracionales en la recta, los autores enuncian las *características* de la "recta real": continua, ordenada, completa (sin huecos), resultando además "transparente" la biyección mencionada.
Como consecuencia de este panorama sobre la introducción de los números irracionales y su correspondiente representación en la recta, en el contexto de la institución escolar, surgen

algunas cuestiones a considerar, como el estudio, la reflexión y el análisis acerca de la "transformación" que ha sufrido este objeto matemático, desde un modelo de *organización matemática*, basada en un estudio del contenido en relación con la problemática de la correspondencia número irracional-punto de la recta, hasta llegar a la enseñanza de los mismos en la Institución escolar, vista desde los dos dispositivos ya enunciados.
Las *cuestiones* que surgen, se pueden clasificar según los aspectos:

- *Cognitivo:* ¿Cómo se resuelve el problema de ubicar en la recta la marca puntual correspondiente a un número irracional dado?
- *Instruccional.* ¿Cómo se sugiere la enseñanza de los objetos: números irracionales, reales y la representación de estos números en la recta geométrica en la institución escolar, específicamente en el primer año del Polimodal?

Para responder a estos cuestionamientos se adopta como marco teórico la Teoría Antropológica de la Didáctica por cuanto este paradigma cuenta con herramientas teóricas que favorecen el estudio: la Transposición Didáctica y la noción de Praxeología.

Teoría Antropológica de la Didáctica (T.A.D.) de Y. Chevallard

Dentro de la "Didáctica fundamental", como lo expresara Gascón (1998) "*no era posible interpretar adecuadamente la matemática escolar (...) sin tener en cuenta los fenómenos relacionados con la reconstrucción escolar de las matemáticas",* es decir, sin observar los fenómenos de *Transposición Didáctica* (Chevallard, 1985), los que a su vez, no pueden estudiarse independientemente del proceso de producción de las *obras matemáticas*. Es así como a partir de la Teoría de la Transposición Didáctica, surge el *enfoque Antropológico* en la Didáctica de las Matemáticas (Chevallard, 1992).
Esta teoría se designa a si misma *antropológica* porque sitúa a la actividad matemática y por consiguiente la actividad del estudio en matemáticas como una actividad humana más, en el seno de alguna Institución social. Su postulado de base es que toda actividad humana que se realice regularmente puede describirse con un modelo único, identificable con la noción de *praxeología*.

La Transposición Didáctica

La teoría de la Transposición Didáctica fue presentada por primera vez en el año 1980. Básicamente enuncia que los contenidos o conocimientos que se enseñan en la escuela no son generados en ella ni para ella, sino en otros sitios (o Instituciones) de la sociedad y que se los enseña en la Institución escolar *"por necesidades sociales de educación y difusión"* Bosch y Gascón (2007). En este marco es necesario un *trabajo transpositivo*, en el sentido de transformaciones adaptativas, que posibiliten que un conocimiento que no fue producido para la escuela pueda ser reproducido en ella, conservando su potencia y funcionalidad.
Este trabajo transpositivo, que va más allá de simples transferencias o simplificaciones de los conocimientos al pasar de una institución a otra, lo realizan diferentes actores de la sociedad: la *noosfera*. Desde este lugar se impondrán una serie de condiciones y restricciones sobre el tipo de enseñanza de un determinado conocimiento en la institución escolar. La limitación se presenta cuando el trabajo transpositivo no es capaz de sostener o de recrear alguna posible *razón de ser* para el conocimiento que se desea que la escuela transmita. Este concepto da cuenta del origen de una noción matemática *"porqué se construyó inicialmente, en que ámbito, contexto o problemática y como participa en el desarrollo del saber matemático, hasta llegar a las posibles funciones de la noción en las actividades (matemáticas o no matemáticas) que tiene lugar en la sociedad" (*Bosch y Gascón, 2007).

Los componentes de una Praxeología Matemática u Obra (T, $\hat{O}$, θ, Θ)

Praxeología Matemática o también, denominada por Chevallard, *organización matemática*, es el modelo por el cual se produce matemática como consecuencia de la actividad del estudio sistemático e intencional de algún tipo de "*tareas o cuestiones*" (T) que resultan problemáticas para una comunidad en un momento histórico dado.
La *obra* como actividad humana responde a necesidades específicas y para que aquellos problemas que la hacen surgir sean transformados en tareas rutinarias, realizables fluida y eficazmente, se requiere de una determinada "manera de hacer" o "*técnica*" ($\hat{O}$), palabra de origen griego que significa "saber hacer". La técnica no es necesariamente de naturaleza algorítmica. Puede ocurrir que una técnica sea exitosa para resolver alguna tarea, pero no para un *tipo de tareas*. Los tipos de tareas y las técnicas asociadas constituyen el "saber-hacer" que hacen referencia a la *praxis* de la actividad.
Para que las técnicas puedan existir en una institución, deben poder ser justificadas racionalmente, de tal manera que se pueda asegurar que permiten realizar las tareas que se pretenden. Esta es la primer función de la *tecnología* (θ)*,* la que además tiene como finalidades la de explicar, hacer inteligible y exponer porqué una técnica es correcta, como también la de producir nuevas técnicas. El discurso tecnológico contiene frecuentemente afirmaciones más o menos explícitas de las que se puede pedir razón. El argumento formal que justifica la tecnología es la *teoría* (Θ), es un nivel superior de justificación-explicación-producción. Los enunciados teóricos aparecen como "abstractos", alejados de las tecnologías y técnicas. El conjunto: tecnología- teoría constituyen el bloque del saber o el *logos* de la actividad.
En síntesis, una praxeología relativa a un tipo de tareas, está constituida por dos bloques: el práctico-técnico (saber-hacer) y el tecnológico-teórico (saber).

Organización Matemática del tema en estudio

Atendiendo al marco teórico en el que se encuadra este trabajo (la T.A.D) se estudia una organización matemática acerca de la cuestión central del mismo: la asignación punto de la recta – número irracional y recíprocamente.
En esta presentación, se mostrará una parte de esa organización matemática.
Frente a la cuestión de la correspondencia número– punto se plantea:

Tarea 1(**T_1**): Obtener la marca puntual (M) en la recta geométrica, que le corresponde a un número irracional dado (Se conocen los puntos correspondientes al cero y al uno, además del número irracional).
Algunos investigadores señalan que para responder a esta cuestión, se necesita conocer una expresión inequívoca del número irracional, basada en algún sistema de representación: verbal, icónica o en el sistema de numeración decimal. No obstante hay muchos números irracionales para los que no se tiene tal representación inequívoca, como por ejemplo un número *fabricado* por el sucesivo lanzamiento de un dado en base diez: 0,579452381... Se trata de un número trascendente (número real no algebraico), no computable (no se puede predecir para cualquier n la cifra enésima) y no constructible (no se puede ubicar o representar "exactamente" en la recta mediante el uso de la regla y el compás ideales) (Coriat M. y Scaglia S, 2000)
Para dar respuesta a esta tarea, se disponen de diferentes *técnicas* o modos de hacer. En general, la utilización de una u otra técnica va a depender del tipo de número irracional que se quiera representar, básicamente atendiendo al criterio de si es o no un número constructible.

Técnica 1: para **T$_1$** ($\hat{O}_{1;1}$): Procedimiento para obtener el punto sobre la recta correspondiente a $\sqrt{50}$.

Se trata de un número irracional *constructible* (pertenece a un subcuerpo de R estable por la raíz cuadrada, además de todos los números racionales y las raíces de racionales positivos de índice 2^n, con n natural) Coriat y Scaglia (2000).

Se construye sobre la recta un rectángulo de base $\sqrt{49} = 7$ y de altura 1. La diagonal tiene una longitud de $\sqrt{50}$. Con el compás, se rebate sobre la recta la longitud de la misma (desde el punto correspondiente al cero). El extremo de este segmento no coincide con ningún punto racional, es el punto correspondiente al irracional $\sqrt{50}$. (Fig. 1)

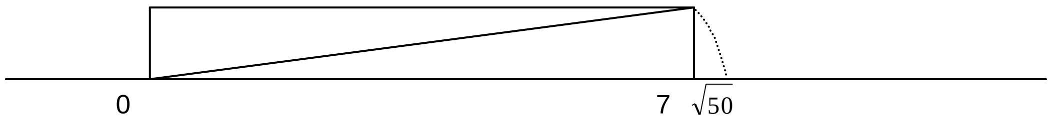


Figura 1

Tecnología 1 ($\theta_{1;\,1,1}$), para la técnica 1 de la tarea 1: Se trata de construir un rectángulo tal que su diagonal (hipotenusa de un triángulo rectángulo) mida la raíz cuadrada buscada.

En el ejemplo de la técnica 1 ($\hat{O}_{1;1}$) la hipotenusa debe medir $\sqrt{50}$, por lo que los catetos del triángulo rectángulo pueden valer, por ejemplo $\sqrt{49}$ y 1 respectivamente. Se fundamenta tal construcción en un corolario del Teorema de Pitágoras. Como la hipotenusa debe medir $\sqrt{50}$, un cateto puede medir 1 y para hallar la longitud del otro cateto hay que plantear la ecuación: $\sqrt{50} = \sqrt{1^2 + x^2}$, de donde se desprende que el otro cateto (x) debe medir $\sqrt{49}$.

Teoría 1 (Θ_1): el Teorema de Pitágoras que explica y justifica la técnica 1, nos remite en última instancia a un nivel superior de justificación: las "Nociones comunes y a los Postulados de Euclides". En particular: las nociones comunes 1 y 2 y el postulado 1 de *Los Elementos* de Euclides (Libro I)

En tanto la asignación número real - punto de la recta queda garantizada por el "Axioma de Cantor" o el "Axioma de Dedekind".

Si el número que se quiere representar en la recta es el irracional $\sqrt{\frac{38}{5}}$ (constructible), la técnica 1 utilizada para ubicar $\sqrt{50}$ no resulta satisfactoria, es necesaria otra técnica, como por ejemplo:

Técnica 2 ($\hat{O}_{2,}$) para Tarea 1: Para obtener el punto sobre la recta correspondiente a $\sqrt{\frac{38}{5}}$. (Fig. 2)

- Se traza una semicircunferencia con centro en $\frac{19}{5}$ y radio $\frac{19}{5}$, de tal modo que la misma pase por los puntos correspondientes al 0 y a $\frac{38}{5}$.

- Se traza una perpendicular a la recta por el punto de abscisa 1 hasta cortar a la semicircunferencia (punto A).
- Se une el punto O con el punto A, determinándose el segmento OA. Dicho segmento tiene una longitud $\sqrt{\frac{38}{5}}$.
- Con el compás se transporta sobre la recta la longitud de dicho segmento (desde el punto correspondiente al cero). El extremo de este segmento no coincide con ningún punto racional, es el punto correspondiente al irracional $\sqrt{\frac{38}{5}}$.

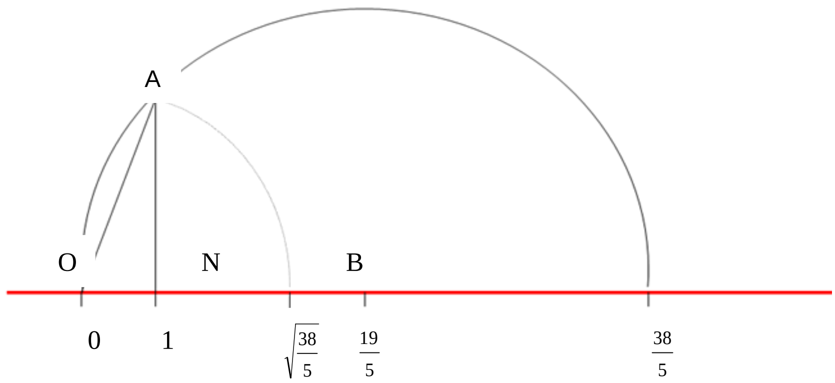


Figura 2

Tecnología 2 ($\theta_{\mathbf{2;\,2,1}}$), para la técnica 2 de la tarea 1

Se basa en la construcción de triángulos rectángulos semejantes tales que, los lados homólogos formen una proporción continua, donde el segmento medio proporcional sea el de la longitud buscada (Puede ser cualquier raíz de índice 2^n de un n° racional positivo).

En el ejemplo de la técnica 2 ($\hat{O}_{\mathbf{2;1}}$), como se pretende que el $\overline{OA}$ mida $\sqrt{\frac{38}{5}}$ y el $\overline{ON}$ se considera de longitud 1, para hallar la longitud del $\overline{OB}$ (donde $\overline{OB}$ es el diámetro de la semicircunferencia a construir y por lo tanto $\overline{OB}/2$ es el radio de la misma e indica la abertura del compás) basta con hallar el extremo de la proporción continua $\frac{1}{\sqrt{\frac{38}{5}}} = \frac{\sqrt{\frac{38}{5}}}{OB}$, dde la que se obtiene $\overline{OB} = \frac{38}{5}$.

La justificación de que la longitud del $\overline{OA} = \sqrt{\overline{OB}}$ es en base a la relación de proporcionalidad entre los lados homólogos de triángulos semejantes.

Teoría 2 ($\Theta 2$) La proporcionalidad entre segmentos, y la asignación número real - punto de la recta, nos remiten en última instancia a las “Nociones comunes y Postulados de Euclides” y al “Axioma de Cantor” o al “Axioma de Dedekind”.

En la tecnología 2 se menciona el trazado de figuras, las que se pueden justificar en base a las definiciones: 10, 17 y 21de *Los Elementos* de Euclides (Libro I).

También se menciona en la tecnología 2 la proporcionalidad entre segmentos que se forma entre los lados de dos triángulos rectángulos semejantes. Se pueden justificar en base a las definiciones 3, 5, 6 y 8 de *Los Elementos* de Euclides (Libro V).

Consideraciones sobre la organización matemática

Esta problemática, la de la correspondencia número irracional – punto de la recta y resolver las tareas planteadas, se basa en la medida de longitudes, por lo que en general para todo número irracional, en la práctica, esto es físicamente, en cuanto media un proceso de “medición directa” los resultados serán aproximados, ya que en estos casos, el observador recurre a la utilización de instrumentos de medición (regla, compás), lo que va a arrojar siempre algún error, esto es alguna diferencia entre la ubicación de la marca puntual en la recta correspondiente a un número irracional y el número irracional asignado a través de alguna representación.
Si la tarea a resolver se puede hacer a través de un proceso de *“medición indirecta”*, o desde un plano ideal, trabajando con instrumentos “ideales”, la correspondencia es exacta, pero desde la práctica, la misma será siempre aproximada.

Algunas consideraciones acerca de la enseñanza desde los Diseños Curriculares y Libro de Texto

Una parte importante de este trabajo consiste en el estudio del contenido tanto en los Currículos como en libros de textos, con el objetivo de poder precisar su *“*razón de ser*”* dentro de la Institución escolar.
- En los *Núcleos de Aprendizajes Prioritarios* (*NAP*, 2006) no se mencionan explícitamente a los números irracionales ni reales como objeto de estudio; sí aparece como contenido lo que puede identificarse como una “razón de ser” de los números irracionales: reconocer que los racionales no son suficientes para expresar ciertas longitudes, como específicamente se mencionan: la longitud de la circunferencia y los lados de un triángulo rectángulo. Es decir, se pretende que quede planteada la “necesidad” de otros “nuevos” números, además de los racionales.
- En cambio en el *Dispositivo Curricular, E.G.B.3* (1998), en la síntesis explicativa del eje *Números y Operaciones* dice que los números irracionales han de introducirse por las necesidades de su uso (lo que justificaría su inclusión como tema de estudio), aunque no se hace referencia a ello en ninguna otra parte del mismo. Menciona explícitamente a los números irracionales, a los números reales, al orden y la completitud, a la recta y los números reales.
- Son los *Programas Orientadores, Educación Polimodal* (1999), donde se pone énfasis con relación al trabajo de la correspondencia: punto - número real. Sin embargo tampoco en este nivel aparece explícitamente mencionado en los contenidos el trabajo con la densidad de los reales y en particular no queda dicho cómo abordar la completitud y la continuidad (estas últimas propiedades distinguen a R de los otros conjuntos numéricos, más allá de la densidad, que gozan tanto los racionales como los irracionales).
A continuación se propone analizar qué se enseña en relación con el objeto números irracionales – representación en la recta en un libro de texto correspondiente al primer año de Polimodal, el que ha permitido observar la transformación de este conocimiento desde la

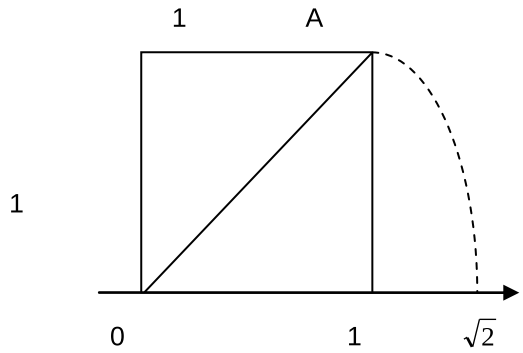
praxeología matemática presentada y lo que el autor muestra como organización matemática. Kaczor, Schaposchnik, Franco, Cicala y Díaz (1999):

Observen el siguiente esquema: marcamos el punto O en el origen y trazamos un arco de circunferencia de centro O y radio OA que interseque el eje x en un punto.

Este punto representa el número irracional…….porque OA= $\sqrt{2}$

Entonces, hay puntos de la recta que representan números racionales y otros puntos que representan números……………………… .

Si pudiéramos marcar los puntos correspondientes a todos los números racionales y a todos los irracionales, la recta quedaría completa.



*La unión del conjunto **Q de números racionales** y el conjunto **I de números irracionales** es **el conjunto R de los números reales.***

*A cada número real le corresponde un único punto de la recta y cada punto de la recta representa un número real. A esa recta continua la llamamos **recta real.***

El autor comienza introduciendo *un número*: $\sqrt{2}$, que demuestra no es racional (marco numérico), luego muestra que se puede hacer corresponder a este número irracional *un punto* de la recta numérica (marco geométrico). A partir de esta presentación de un único número-punto irracional, sanciona: la "completitud" de la recta, la formación de los números reales y la correspondencia uno a uno entre números reales-puntos de la recta a la que califica de "continua" y denomina recta real.

Se señala al respecto de la correspondencia número irracional punto de la recta que, el autor no ha presentado la técnica en su totalidad para llevar a cabo la marcación, como tampoco los elementos tecnológicos-teóricos.

Se piensa que esta breve introducción de los irracionales, bajo estos dos marcos (numérico y geométrico) podría obedecer a la necesidad de lograr constituir el conjunto de números reales, a modo de cumplir con la presentación de los campos numéricos, a la vez de institucionalizar la completitud y/o continuidad de la recta, con el compromiso de que quede asociada a la misma, la completitud del conjunto de números reales.

CONCLUSIONES

En el modelo de organización matemática presentado, al menos se muestran dos procedimientos diferentes de resolver la tarea planteada. En ella se observa la limitación de la primera técnica (sólo raíces cuadradas de números naturales) y se muestra una segunda técnica, más potente que la primera (por cuanto permite ubicar los puntos correspondientes a raíces cuadradas de racionales positivos). Se detalla el cómo y el porqué se "hace" de esas maneras.

En cuanto a la enseñanza de la correspondencia número irracional-punto de la recta, en el libro de texto analizado, se pueden observar las siguientes restricciones: se acota la naturaleza del

número irracional a ubicar puntualmente en la recta (sólo $\sqrt{2}$), no se muestra ni explica cómo sería para otras raíces cuadradas de naturales, además no se manifiestan las limitaciones de dicha técnica. Cabe mencionar que tras esta única presentación, establece un nuevo conjunto numérico: el de los números reales, señalando la correspondencia biunívoca entre cada número real y cada punto de la recta.
Entre los documentos curriculares observados, en los Programas orientadores, Nivel Polimodal (1999), es donde se prevé un trabajo más exhaustivo en cuanto a la correspondencia punto-número irracional (real), aunque no se explicitan procedimientos (técnicas) ni el tratamiento de las justificaciones de los mismos (tecnología– teoría).
En síntesis, se pretende que a través de este estudio se pueda reflexionar que, cuando se enseña un contenido (aquí la correspondencia número irracional-punto de la recta y la biyección entre número real- recta) hay otros aspectos relacionados, que se deberían considerar a la hora de abordar los mismos, como por ejemplo: la asignación de puntos de la recta a otros números irracionales (bajo otras representaciones), el problema de la correspondencia recíproca o el tratamiento de la exactitud en las marcaciones, que no se están manifestando y quedan asociados a lo mostrado en forma transparente.
Al presentar estas reflexiones se espera contribuir a una mejor comprensión de la actividad intelectual desplegada en situaciones como ésta que seguramente, al ser más analíticamente conocidas, podrán ser mejor tratadas desde una perspectiva pedagógica.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bosch M. y Gascón J. (2007). 25 Años de la Transposición Didáctica en Ruiz Higueras, L., Estepa, A., García, F. J. (eds.) *Matemáticas, escuela y sociedad. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico.* Jaén: Publicaciones de la Diputación de Jaén (pp.349-371).

- Coriat M. Scaglia S. (2000). *Representación de los números reales en la recta. Enseñanza de las ciencias*, 18, 25 - 34. Barcelona.

- Chevallard Y. (1999). *El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19 (2), 221 – 266. Francia.

- Kaczor, P., Schaposchnik, R., Franco, E., Cicala, R. y Díaz, B. (1999) *Matemática I*. Buenos Aires: Santillana.

- Ministerio de Cultura y Educación de la Nación. (1999). *Programas Orientadores*. *Educación Polimodal*. Adoptado por la Provincia de Misiones, pp 93-99. Argentina.

- Ministerio de Cultura y Educación, Provincia de Misiones. (1998). *Dispositivo Curricular, E.G.B.3*. pp79 – 94. Argentina.

- Ministerio de Educación Ciencia y Tecnología, presidencia de la Nación, Consejo Federal de Cultura y Educación. (2006). *Núcleos de Aprendizajes Prioritarios (NAP) Matemática.* 3er ciclo E.G.B./Nivel Medio, 7º, 8º y 9º Años. pp 16 – 29. Argentina.