EXPLORACIÓN DE LAS CONCEPCIONES DE NUESTROS ALUMNOS SOBRE VARIABLES, FUNCIONES Y CAMBIOS

Silvia Vrancken, Adriana Engler, Daniela Müller
Facultad de Ciencias Agrarias - Universidad Nacional del Litoral - Argentina
svrancke@fca.unl.edu.ar; aengler@fca.unl.edu.ar; dmuller@fca.unl.edu.ar
Nivel educativo: Medio - Terciario - Universitario ciclo Básico
Palabras clave: pensamiento matemático, variación, concepciones, dificultades

Resumen

En el marco de la Educación Matemática se han realizado en las últimas décadas un número considerable de investigaciones que tienen en cuenta la importancia del desarrollo del pensamiento como base de la actividad cognoscitiva.
El pensamiento matemático, entendido como las formas en que piensan las personas que hacen matemática, se desarrolla a lo largo de la vida de los individuos y los procesos de enseñanza deberían tomar en cuenta esa evolución. En este contexto, los procesos de variación y cambio constituyen un aspecto de gran riqueza en el ámbito escolar. El estudio de las variables, las funciones y el cálculo diferencial, encarados desde el pensamiento variacional, son un campo de acción y formación permanente en la educación matemática.
Conociendo que, en general, en nuestro sistema educativo las ideas relativas al cambio no son trabajadas en profundidad, decidimos explorar el estado del pensamiento y lenguaje variacional de nuestros alumnos, relativo a sus concepciones sobre nociones variacionales básicas al momento de enfrentarse al estudio del cálculo.
En este trabajo se presentan los enunciados de algunas de las actividades preparadas con este fin y un análisis cualitativo de las respuestas que consideramos más significativas. Las mismas involucran modelos sencillos que se relacionan con situaciones cotidianas del alumno, especialmente las relacionadas con velocidad.
Los resultados nos muestran que los alumnos presentan dificultades en cuestiones básicas, que generalmente damos por interiorizadas. Esto nos llama a reflexionar sobre qué enseñamos, cómo lo hacemos y de qué manera podemos cambiar esta situación.

Introducción

En el marco de la Educación Matemática se han realizado en las últimas décadas un número considerable de investigaciones con el propósito de explorar y entender cómo los seres humanos construyen conocimiento matemático. Si bien las mismas tratan múltiples problemáticas, aparece como punto en común el reconocimiento de la importancia de promover el desarrollo del pensamiento. En la actividad cognoscitiva del alumno intervienen muchos factores. Entre ellos, los conocimientos que éste posee y los procedimientos que realiza para obtenerlos, mezclándose también otros procesos psíquicos, como percepción, atención y memoria, pero el lugar central lo ocupa el pensamiento, de tal manera que se llega a entender "la formación de la actividad cognoscitiva como la formación del pensamiento en el alumno" (Dolores, 2007b, p. 66).
Es común hablar y reflexionar sobre el pensamiento y otras funciones mentales en diversos ámbitos que abarcan desde la vida cotidiana hasta la psicología, pero es importante aclarar qué significa y qué trata el pensamiento matemático.
Al usar esta expresión nos referimos a las formas en que piensan las personas que se dedican a la matemática, así como las maneras posibles de construir ideas matemáticas, incluidas las provenientes de la vida cotidiana. Los investigadores sobre el pensamiento matemático "se

interesan por caracterizar o modelar los procesos de comprensión de los conceptos y procesos propiamente matemáticos" (Cantoral, Farfán, Cordero, Alanís, Rodríguez y Garza, 2003, p. 18).
Dado que la construcción del conocimiento matemático tiene muchos niveles y profundidades, el pensamiento matemático se desarrolla a lo largo de la vida de los individuos y los procesos de enseñanza deberían tomar en cuenta esa evolución. En contraposición a un pensamiento de nivel inferior que tiene lugar cuando el alumno recita información, emplea reglas o lleva a cabo una actividad rutinaria o repetitiva, la enseñanza debería lograr un pensamiento de nivel superior de modo que los alumnos manipulen información e ideas de manera que transformen los significados y sus implicaciones, permitiéndoles la resolución de problemas y el descubrimiento de nuevos significados. En los cursos superiores de la escuela y en la universidad se deberían considerar procesos cognitivos implicados en el pensamiento matemático avanzado, como abstracción, análisis, categorización, deducción, conceptualización, visualización, entre otros.
En este contexto, los procesos de variación y cambio constituyen un aspecto de gran riqueza en el ámbito escolar. El estudio de las variables, las funciones y el cálculo diferencial, encarados desde el pensamiento variacional, colabora enormemente al desarrollo cognitivo de nuestros alumnos.
Como parte del pensamiento matemático avanzado, el término pensamiento variacional se utiliza con la intención de profundizar un poco más en lo que se refiere a las funciones como modelos de situaciones de cambio. Comprende las relaciones entre la matemática de la variación y el cambio por un lado y los procesos del pensamiento por otro.
A partir de lo expuesto y del análisis de distintos trabajos de investigación desarrollados en esta temática (Cantoral y cols., 2003; Dolores, 2007a; Dolores, Guerrero, Martínez y Medina, 2002) apoyamos la idea que el tratamiento, durante la enseñanza, de situaciones relacionadas con la variación y el cambio puede favorecer en gran medida la comprensión de las funciones, propiciando una mejor introducción a temas específicos del cálculo.
Conociendo que, en general, en nuestro sistema educativo las ideas relativas al cambio no son trabajadas en profundidad, decidimos explorar el estado del pensamiento y lenguaje variacional de nuestros alumnos, relativo a sus concepciones sobre nociones variacionales básicas al momento de enfrentarse al estudio del cálculo. Para ello diseñamos e implementamos un cuestionario que presentamos en este trabajo.

Presentación de actividades y análisis de resultados

Las distintas actividades abarcan los conceptos de variable, función y cambio de cada una de las variables involucradas. Su resolución requiere representar variables, evaluar y graficar funciones, cuantificar cambios y analizar el comportamiento de esos cambios. Las situaciones se presentan en distintas representaciones: verbal, numérica, gráfica, analítica, y se constituyen en los medios para indagar las concepciones de los alumnos.
Para su elaboración se tuvieron en cuenta las sugerencias presentadas en el documento de trabajo de Colombia, "Pensamiento variacional y tecnologías computacionales" (Ministerio de Educación Nacional, 2004) y las actividades presentadas por Dolores (1999, 2007b). Los modelos corresponden a funciones sencillas que se relacionan con situaciones cotidianas del alumno, especialmente las relacionadas con velocidad.
Su implementación fue durante el segundo cuatrimestre de 2008 y participaron 137 alumnos cursantes de Matemática II de la Facultad de Ciencias Agrarias de la Universidad Nacional del Litoral. Los alumnos ya habían aprobado Matemática I, asignatura en la cual se desarrollaron ampliamente los contenidos correspondientes a funciones.
Se presentan los enunciados de algunas actividades y un análisis cualitativo de las respuestas que consideramos más significativas, sobre un total de 76 trabajos, ya que para su resolución la mayoría de los alumnos se agruparon de a dos.

Actividad

Supongamos que se está llenando un balde con agua. En esta situación de variación están involucradas diversas magnitudes, como por ejemplo el volumen del balde, es decir su capacidad total. Mencione otras magnitudes que intervienen (por lo menos tres). ¿Cuáles de esas magnitudes aumentan? ¿Cuáles disminuyen? ¿Alguna permanece constante?

Esta actividad, como las dos siguientes, analiza una situación específica de variación y cambio desde un punto de vista cualitativo. Se solicita la identificación de las magnitudes que cambian y una descripción verbal escrita de su comportamiento.

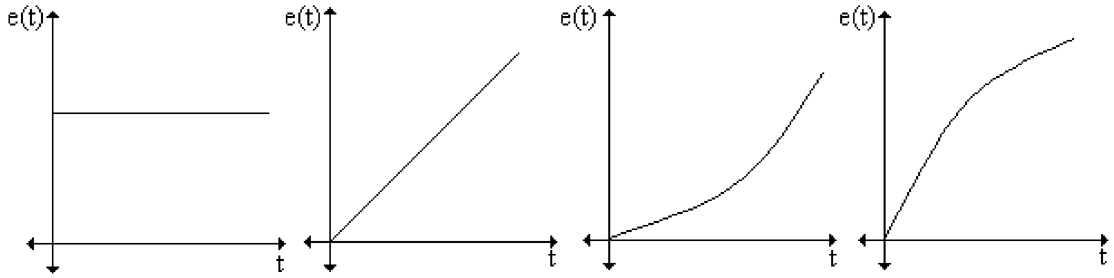
Si bien todos los alumnos, excepto uno, respondieron, se observaron dificultades para identificar magnitudes intervinientes en el problema. Hicieron referencia a propiedades físicas de los elementos involucrados, como el agua o el recipiente y hasta el medio ambiente. Aparecieron reiteradamente mencionadas, por ejemplo, presión del agua, temperatura (del agua o del ambiente), peso específico.

Surgieron también dudas para responder si las magnitudes involucradas aumentan, disminuyen o se mantienen constantes, relacionando en muchos casos comportamiento de magnitudes. Por ejemplo, varios grupos escribieron: *"si la velocidad aumenta, disminuye el tiempo"*, o viceversa.

Actividad

Cada una de las siguientes gráficas muestra la posición e(t) de un auto en función del tiempo desde cierto punto de referencia. Determine cuál de ellas describe el caso de un auto que se mueve a velocidad constante. Explique.

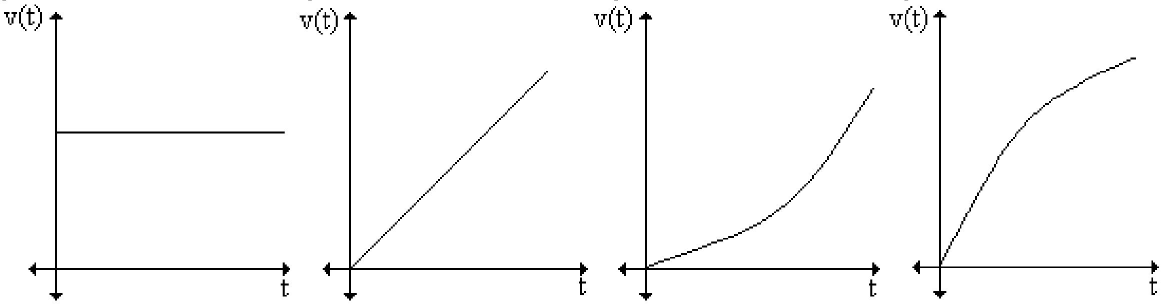
i) **ii)** **iii)** **iv)**



Actividad

Determine cuál de las siguientes gráficas muestra la velocidad con que se mueve el auto del problema anterior. Explique.

i) **ii)** **iii)** **iv)**



La resolución de estas actividades exige que los alumnos pongan en juego sus concepciones sobre las trayectorias de cuerpos en movimiento y su velocidad a partir de la lectura de gráficas cartesianas espacio recorrido-tiempo y velocidad-tiempo.
Al analizar las respuestas de los alumnos se observó que, de los 76 equipos, la mayoría eligió la opción correcta. En la primera, solamente tres equipos seleccionaron la primer opción, y en la siguiente, dos optaron por la segunda.
Sí se presentaron dificultades para explicar la elección, ya que muchos justificaron repitiendo lo expresado en las consignas. Razonaron correctamente 40 equipos (53%).

Actividad
Los valores de la tabla dan la posición e (en metros) de un automóvil desde cierto punto de referencia, en el instante en que han transcurrido t segundos.

t (segundos)	0	1	2	3	4	5
e (metros)	17	34	51	68	85	102

a) ¿Qué valores puede tomar la variable independiente? ¿Y la variable dependiente?
b) Teniendo en cuenta los valores de la tabla, ¿cómo varía la variable dependiente a medida que los valores de la variable independiente aumentan?
c) Complete las siguientes tablas con el cambio entre dos valores consecutivos de la variable considerada. Escriba en cada casillero la operación que realiza.

t	0	1	2	3	4	5
	cambio	cambio	cambio	cambio	cambio	

e	17	34	51	68	85	102
	cambio	cambio	cambio	cambio	cambio	

¿Qué significado tienen las operaciones hechas en cada tabla? ¿Por medio de qué operación calculó los cambios? ¿Cómo fueron los cambios para cada una de las variables?
La pregunta sobre qué valores pueden tomar las variables, espera indagar qué interpretan los alumnos de una función de la cual sólo se presentan algunos pares de valores. Las respuestas fueron variadas, observando dificultades para realizar este análisis.
No lograron interpretar la consigna 11 equipos (14,5 % aproximadamente). En lugar de analizar los valores que pueden tomar las variables respondieron que la variable independiente es “t” y la dependiente es “e” o que la variable independiente son los segundos y la dependiente los metros.
Cuatro equipos se refirieron a valores enteros positivos o enteros para ambas variables, mientras que otros cuatro supusieron que “t” y “e” toman solamente los valores de la tabla, dando como respuesta: *“La variable independiente toma los valores 0, 1, 2, 3, 4, 5 y la variable dependiente 17, 34, 51, 68, 85, 102”*.
En las demás respuestas se notó una consideración de la continuidad de las variables, si bien no todos aclararon el conjunto numérico. Las distintas respuestas se muestran en la siguiente tabla.

Respuesta	Cantidad de equipos
La variable independiente toma valores reales positivos incluido el cero y la dependiente valores mayores o iguales a diecisiete.	15

La variable independiente toma valores reales positivos y la dependiente valores mayores a diecisiete.	4
La variable independiente puede tomar valores de cero a cinco mientras que la dependiente valores de diecisiete a ciento dos.	5
Cualquier valor para ambas variables.	5
Las dos variables pueden tomar cualquier valor positivo.	6
Las dos variables toman valores reales positivos incluido el cero.	7
La variable independiente toma cualquier valor real positivo y la dependiente cualquier valor real.	6

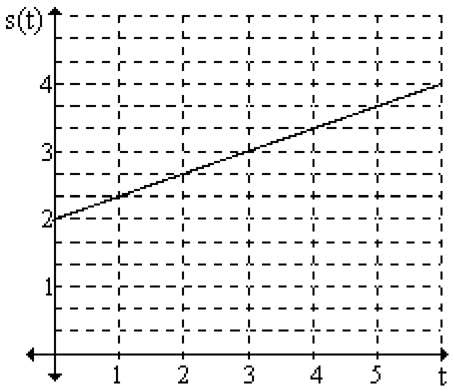
Cinco equipos no respondieron lo pedido, haciendo alusión a la relación de dependencia entre las dos variables y no a los valores que toma cada una.
Por último, cuatro equipos consideraron al revés las variables, tomando “t” como la dependiente y “e” como la independiente.

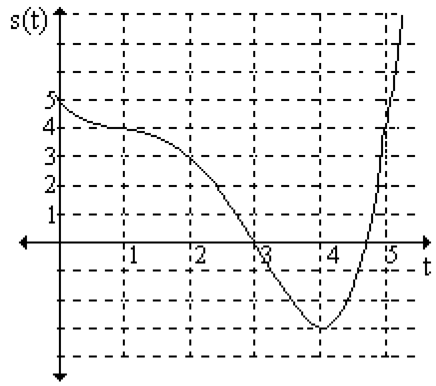
Actividad
En la tabla se muestran las ganancias de una pequeña empresa en cada uno de los primeros cinco años de trabajo. Complete la tabla con el cambio de ganancia año a año.

Año	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Ganancia (en miles de pesos)	7	18	45	34	30	30
Cambio de ganancia						

¿En qué períodos la ganancia aumentó? ¿En qué períodos la ganancia disminuyó? ¿En qué períodos la ganancia no cambió? ¿Qué puede observar en la cantidad que representa el cambio para cada una de las situaciones anteriores?
Los alumnos presentaron dificultades para responder a las preguntas. Las mismas estuvieron relacionadas con el tipo de situación, en la que se presenta la ganancia año a año. Consideramos que los problemas surgieron por el tipo de variables involucradas, esencialmente con la variable independiente. En general se trabajan situaciones en que el tiempo aparece como una variable continua. En ésta, aparece la variable temporal discreta, y la ganancia que se calcula anualmente. La variable independiente toma valores aislados (2000, 2001,...2005) y los alumnos no supieron cómo considerar los períodos.
Con la pregunta sobre qué se puede observar en la cantidad que representa el cambio para cada una de las situaciones, pretendíamos que observen que se presentan cambios positivos y negativos y que relacionen esta particularidad con su significado en el problema, de manera de comenzar a pensar cuándo la función crece, decrece o se mantiene constante. Los alumnos tuvieron que ser orientados porque no entendían qué se les pedía. Asimismo no respondieron 10 grupos. Sólo cinco equipos expresaron que el cambio es positivo cuando la ganancia aumenta, negativo cuando disminuye y cero cuando la ganancia es la misma.

Actividad
Las gráficas muestran la posición s(t) de dos partículas desde cierto punto de referencia para determinado intervalo de tiempo.





a) Para cada una de las gráficas, explique qué sucede con una de las magnitudes a medida que varía la otra.
b) *Complete las tablas para cada función. Recuerde que la letra Δ indica cambio de una cantidad, por lo que Δs significa el cambio de la variable s en el intervalo de t correspondiente.*

Intervalos	Δs
$0 \le t \le 1$	
$1 \le t \le 2$	
$2 \le t \le 3$	
$3 \le t \le 4$	
$4 \le t \le 5$	

Intervalos	Δs
$0 \le t \le 1$	
$1 \le t \le 2$	
$2 \le t \le 3$	
$3 \le t \le 4$	
$4 \le t \le 5$	

c) Describa el comportamiento de los cambios Δs para cada gráfica. Si corresponde, indique en qué intervalos los cambios de la variable dependiente fueron más rápidos.
En esta actividad se presentan dos funciones definidas gráficamente. La resolución de los distintos incisos exige su interpretación y la traducción del registro gráfico al numérico y al coloquial. Abarca aspectos cualitativos y cuantitativos de la variación para las funciones.
Ambos modelos presentan la dificultad de que la posición inicial no coincide con el origen, de manera que la variable dependiente ya no describe espacio recorrido sino desplazamiento desde el punto de referencia. En el caso de la primer función el análisis es más sencillo ya que se trata de una función de primer grado y, por lo tanto, de crecimiento constante en cada intervalo. La segunda gráfica tiene mayor grado de dificultad, ya que presenta imágenes negativas e introduce, a su vez, variaciones de espacio negativas.
En el inciso **a)** se requiere una explicación sobre el comportamiento cualitativo de una magnitud a medida que varía la otra para cada una de las funciones.
Para el caso de la primer función, 15 equipos respondieron que a medida que transcurre el tiempo, la posición aumenta. Seis contestaron de manera más general, escribiendo que a medida que una de las magnitudes aumenta la otra también aumenta. Otros 14 escribieron que a medida que aumenta el tiempo la posición aumenta en forma constante o la partícula avanza constantemente. Finalmente cuatro equipos expresaron que la partícula se aleja del punto de partida (o avanza) siempre a la misma velocidad.
Varios equipos se refirieron a cuánto varían las variables. Las respuestas fueron: *"A medida que t aumenta tres, s(t) aumenta uno"* (4); *"A medida que t varía en uno, s(t) lo hace en un tercio"* (3); *"Se produce una variación de crecimiento constante de un tercio unidades por segundo"* (1).
Destacamos que muchos equipos hacen alusión a una relación de proporcionalidad entre las variables. Nueve equipos respondieron directamente*"la posición de la partícula varía proporcionalmente con el tiempo"*. Otros casos (10) expresaron que a medida que el tiempo

aumenta, aumenta proporcionalmente la posición. Estos últimos nos dan lugar a dudas sobre lo que quisieron expresar en sus respuestas, pero por lo observado y escuchado durante el trabajo en clase podemos decir que, dado que la gráfica es una recta, consideran directamente que las variables posición y tiempo son proporcionales.

Un solo equipo no respondió la pregunta.

Con respecto a la segunda función, se esperaba que los alumnos respondan que a medida que el tiempo aumenta, la posición cambia de manera distinta (disminuye o aumenta) y distinta cantidad. Utilizando diferentes expresiones, 50 equipos (66%) dieron una respuesta de este estilo. Tres equipos no respondieron y las respuestas que consideramos incorrectas estuvieron caracterizadas en general por ser muy imprecisas (por ejemplo: *"La partícula se mueve irregularmente a través del tiempo").*

En el inciso **b)** de la misma actividad debían completar las tablas con los valores Δs para intervalos de tiempo de una unidad de amplitud para cada una de las funciones. Completaron bien ambas tablas 51 equipos. El mayor problema fue la falta de reconocimiento de la importancia en el orden de su cálculo (valor final menos valor inicial). Al no distinguir las diferencias entre variaciones positivas y negativas, completaron de manera correcta la primer tabla y, en la segunda, todos los valores positivos, aunque bien en valor absoluto (ocho equipos). Se observó además que algunos no supieron cómo expresar la diferencia entre cambios positivos y negativos, escribiendo por ejemplo, en la segunda tabla *"disminuye uno"*, *"aumenta siete"*. Otro error que apareció en algunos trabajos es que confundieron cambio de posición con la posición en el instante final del intervalo.

En la primer parte del inciso **c)** los alumnos debían describir el comportamiento de los cambios de la variable dependiente para cada función. Un buen porcentaje de alumnos respondió correctamente.

Para la primera función se obtuvieron 49 respuestas correctas (64%). La mayoría expresó que los cambios son iguales o se mantienen constantes, agregando, en algunos casos, el valor de los cambios.

Con respecto a las respuestas incorrectas, la mayoría estuvo relacionada con la confusión entre posición y cambios de posición. Escriben: *"aumentan constantemente", "son constantes y aumentan un tercio por vez", "a medida que aumenta t, aumenta s en un tercio de unidad".*

Destacamos también que vuelven a aparecer expresiones que hacen referencia a la proporcionalidad entre las variables: *"son proporcionales", "el tiempo es proporcional a la posición de la partícula".*

Para la segunda función se obtuvo menor número de respuestas correctas. Sólo 36 equipos (47%) respondieron que los cambios no son iguales, son irregulares o varían. Cuatro equipos contestaron que los cambios pueden ser positivos o negativos, lo cual no es incorrecto, pero sí incompleto.

Las respuestas incorrectas vuelven a referirse al comportamiento de la variable dependiente y no de sus cambios. Escribieron por ejemplo: "e*n el intervalo de cero a cuatro disminuye y en el intervalo de cuatro a cinco aumenta", "para* $0 \leq t \leq 4$ *decreciente y para* $4 \leq t \leq 5$ *creciente"*.

En relación a la última pregunta, acerca de los intervalos en que los cambios fueron más rápidos, para pensar en rapidez de cambio es necesario encontrar primero la razón de cambio promedio, lo que implica calcular los cambios de la variable dependiente en relación con los de la variable independiente. Si bien este tema no se desarrolló todavía en clase, se pretendía analizar si los alumnos son capaces de realizar una interpretación numérica (a través de la tabla) o gráfica, comparando el espacio recorrido en intervalos de igual longitud.

La respuesta dada por 47 equipos fue que los cambios más rápidos se pueden analizar en la segunda gráfica y ocurren en el intervalo que va desde cuatro hasta cinco.

Ocho grupos expresaron que para $2 \leq t \leq 3$ y $3 \leq t \leq 4$ disminuye más rápido y para $4 \leq t \leq 5$ avanza mucho más rápido. Si bien no responden lo pedido, muestra una diferenciación del significado teniendo en cuenta el signo de los cambios.

Nueve equipos no respondieron esta pregunta.

Consideraciones finales

Al iniciar el estudio de temas relacionados a la variación, tales como razón de cambio, derivada, análisis y graficación de funciones, entran en juego conocimientos variacionales que frecuentemente tendemos a naturalizar en nuestro discurso. Damos por interiorizadas nociones como, por ejemplo, intervalo, constante, variable, magnitud, variación, razón. Los resultados obtenidos en las distintas actividades nos muestran que muchos alumnos presentan dificultades a pesar de haber desarrollado estos contenidos desde los primeros años de su educación formal.

Los mismos problemas han sido detectados por diversos autores (Dolores y cols., 2002; Valero, 2003) que han investigado temas relacionados con las variables, las funciones y la variación. Coincidimos con ellos en que, entre los factores que provocan su aparición, podemos considerar las formas de enseñanza que, según nuestra experiencia docente, no tienen en cuenta la importancia de presentar situaciones de variación, tanto cotidianas como provenientes de la matemática, de manera de beneficiar el desarrollo del pensamiento variacional en los alumnos.

Por ejemplo, el modelo correspondiente a la función de primer grado y el caso particular de la función de proporcionalidad directa son elementales y los primeros que se desarrollan en la escuela. Observamos en varias situaciones que los alumnos no distinguen claramente las diferencias entre uno y otro. El tratamiento de estas dificultades requiere un cambio de postura. En lugar de sólo presentar la definición y ejemplos o aplicaciones correspondientes a cada función por separado, es posible trabajar desde distintos registros los aspectos relacionados con la variación. Mediante la confección de tablas y gráficos los alumnos pueden descubrir lo que tienen en común, es decir el hecho de que el cambio de la función para distintos intervalos es constante, lo que implica que en la gráfica los puntos queden alineados, así como también las diferencias, el valor constante añadido, que implica el traslado sobre el eje de ordenadas.

Los resultados obtenidos nos movilizaron a reflexionar, ya que el tema funciones fue tratado en el cuatrimestre anterior al que se presentó este cuestionario a los alumnos. En el esfuerzo de superar las dificultades, consideramos importante el desarrollo de acercamientos variacionales, previo al inicio del estudio de temas específicos del cálculo. Las nociones relacionadas con el cambio son muy intuitivas y susceptibles de ser abordadas por los alumnos desde los primeros años de escolaridad. El diseño e implementación de propuestas didácticas que contemplen a la variación como una temática transversal a distintos contenidos en todos los niveles favorecerá el desarrollo del pensamiento del alumno y contribuirá a proporcionarle una base matemática sólida.

Bibliografía

Cantoral, R., Farfán, R., Cordero, F., Alanís, J. Rodríguez, R. y Garza, A. (2003). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Trillas.

Dolores, C. (1999). *Una introducción a la derivada a través de la variación.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Dolores, C. (2007a). La derivada y el Cálculo. Una mirada sobre su enseñanza por medio de los textos y programas. En Dolores, C.; Martínez, G.; Farfán, R.; Carrillo, C.; López, I. y Navarro, C. (Eds.). *Matemática Educativa. Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula.* (pp. 2-25). México: Ediciones Díaz de Santos.

Dolores, C. (2007b). *Elementos para una aproximación variacional a la derivada*. México: Universidad Autónoma de Guerrero. Ediciones Díaz de Santos.

Dolores, C.; Guerrero, L.; Martínez, M. y Medina, M. (2002). Un estudio acerca de las concepciones de los estudiantes sobre el comportamiento variacional de funciones elementales. En Crespo, C. (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,15* (1) (pp. 73 – 84). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ministerio de Educación Nacional (2004). *Pensamiento variacional y tecnologías computacionales*. Colombia: Enlace Editores Ltda.

Valero, M. (2003). Estabilidad y cambio de concepciones alternativas acerca del análisis de funciones en situación escolar. Tesis de doctorado. CICATA-IPN, México. Extraído el 3 de Marzo de 2008 desde http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/doctorado/valero_2003.pdf.