REVISIÓN CRÍTICA DE LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA EN CONTEXTOS FÍSICOS

Zabala, Analía; Berenguer, María del Carmen; Moyano, Analía
Facultad de Ingeniería – Universidad Nacional de San Juan - Argentina
azabala@unsj.edu.ar
Nivel Educativo: Medio (13-17 años)
Palabras Clave: Modelaje matemático, contextos físicos, validación de modelos, aprendizaje

Resumen

Se presenta un taller en el que se revisan contenidos básicos de Cinemática de la Partícula, como punto de partida para realizar un análisis crítico de la contextualización de modelos físicos que usa el profesor de matemática del nivel medio. Para que el modelaje matemático contribuya a facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje es preciso que el proceso de traducción esté formulado correctamente. Caso contrario, se fomenta el hecho de que el estudiante se aísle del contexto y busque la solución de la situación problemática planteada haciendo uso de conceptos sin significado y de técnicas memorizadas que nunca comprendió.

Introducción

Uno de los objetivos específicos del proyecto: “Hacia la integración a la vida universitaria. Propuesta de mejora del ingreso y permanencia”, en ejecución en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de San Juan – Argentina, es reconocer áreas claves del conocimiento en Matemática con dificultades de aprendizaje en la enseñanza media. Por ello, en la etapa de diagnóstico, se efectuó el análisis de los “errores” más frecuentes cometidos por los aspirantes en los exámenes de ingreso (Esteybar, 2007).
“Los resultados muestran que el mayor porcentaje de errores está asociado a la interpretación de gráficos y análisis crítico de los valores numéricos obtenidos al resolver una situación problemática” (Zabala, 2009).
En algunas entrevistas personales, los aspirantes argumentaron que: *en una evaluación de Matemáticas, nunca se les ocurrió pensar si el resultado es coherente o no*.
Al respecto, Mancipar de Katz (2009, Abril 22) opina que:
La “Matemática que se enseña” es ese cúmulo procedimental, algorítmico, lógico formal, cargado de ejercicios irrelevantes y soporíferos (…)
(….) hay que propiciar un aprendizaje basado en los significados por sobre las técnicas, otorgando un sentido al conocimiento matemático, en donde se establezca un lazo con los usos de la Matemática (...).
(….) La modelización matemática, en tanto estrategia didáctica y pedagógica, asume a la actividad matemática como un proceso continuo de resolución de problemas encuadrados en contextos reales permitiendo, a su vez, la combinación de diferentes tareas, según las necesidades de aprendizaje de los estudiantes.
Por otra parte, Camarena (2008) afirma que: “Los estudiantes no tienen en claro por qué estudiar matemáticas y esto demerita la motivación hacia esta ciencia (…)” (p. 83).
La enseñanza de la Matemática a través de problemas contextualizados es un recurso que, como ya se ha demostrado en el trabajo de numerosos investigadores, contribuye en gran manera a facilitar el proceso de aprendizaje del alumno. Sin embargo, para que el mismo promueva el conocimiento perenne es preciso que el proceso de traducción esté formulado correctamente; solo así el alumno puede extender a la realidad las conclusiones obtenidas mediante su análisis y/u operación.
Ya que la construcción de los modelos físicos plantea la inclusión de parámetros y constantes, que reflejan la dimensión de las relaciones entre las variables del modelo, es necesaria una contextualización adecuada que permita al alumno realizar una validación del modelo; caso

contrario, el aprendizaje se reduce a una memorización de fórmulas y algoritmos que con el tiempo se olvidan.
"La desarticulación que existe entre los cursos de matemáticas y las demás asignaturas que cursa el estudiante se convierte en un conflicto cotidiano para los alumnos" (Camarena, 2008, p. 83), lo que fomenta el hecho de que los estudiantes se aíslen del contexto y busquen la solución de la situación problemática planteada haciendo uso de conceptos sin significado y de técnicas memorizadas que nunca comprendieron.
Por ello, Godino (2003) recomienda que "(…) el profesor debe ser cuidadoso y hacer un uso crítico de los libros de texto. (….) Más allá de que la presentación sea agradable, que los ejercicios y problemas sean interesantes hay que cuidar que el contenido sea adecuado…" (p. 129).

Metodología: En este taller se analizan los contenidos de Física involucrados en algunos problemas contextualizados para ilustrar que la preocupación por la formalización matemática y el rigor científico no siempre es adecuadamente orientado, desfavoreciendo el proceso de enseñanza- aprendizaje.
A modo de ejemplo se muestran algunos problemas contextualizados y las variables didácticas específicas relacionadas con la situación (en especial los elementos de la situación que puedan afectar el proceso de enseñanza-aprendizaje).
Usando la metodología de trabajo colaborativo en grupos pequeños, con la orientación permanente del docente a cargo, se realiza el análisis crítico de problemas contextualizados, que involucran Fundamentos de Física, seleccionados de la bibliografía disponible para docentes y alumnos del nivel secundario.
Al culminar cada jornada de trabajo se realiza la exposición y argumentación de las conclusiones a las que arriban los distintos grupos.

Revisión de Fundamentos de Cinemática para contextualizar problemas en Matemática

Cabe aclarar que los contenidos específicos de Física a continuación desarrollados no han sido diagramados para reemplazar un texto de la asignatura, constituyen sólo la base para acordar, con los docentes de matemática asistentes al taller, los criterios de revisión de los contextos físicos en el modelaje matemático.

Cinemática: Es la parte de la mecánica que se relaciona sólo con los aspectos geométricos del movimiento.

Movimiento: Se dice que un objeto se encuentra en movimiento con respecto a otro, cuando su posición, medida con respecto al segundo cuerpo, cambia a medida que transcurre el tiempo. Por otra parte, si esta posición relativa no cambia a medida que transcurre el tiempo, el objeto se encuentra en reposo relativo.
Tanto el movimiento como el reposo son conceptos relativos; esto es, dependen de la condición del objeto con relación al cuerpo que se usa como referencia.

Sistema de Referencia: Para describir un movimiento, el observador debe definir un cuerpo de referencia adecuado, que se idealiza en la forma de un sistema de coordenadas.
El Sistema de Referencia que se elige para estudiar el movimiento de un cuerpo no es absoluto, su elección es completamente arbitraria.
Si dos observadores que describen el movimiento de un cuerpo utilizan distintos sistemas de referencia en reposo relativo, observarán el mismo movimiento del cuerpo. Pero si usan sistemas de referencia en movimiento relativo entre sí, la descripción que haga cada uno de ellos del movimiento será diferente. Si los observadores conocen su movimiento relativo, pueden fácilmente conciliar sus observaciones respectivas.

Por ejemplo, consideremos dos observadores: uno fijo al Sol y el otro fijo a la Tierra; estudiando ambos el movimiento de la Luna (Figura 1). Para el observador terrestre que usa el sistema de referencia x'y'z', la luna describe una órbita casi circular alrededor de la Tierra. Sin embargo, para el observador situado en el Sol, que usa el sistema xyz, la órbita de la Luna es una línea ondulante (epicicloide).

Trayectoria: Es el lugar geométrico de los puntos que ocupa el cuerpo durante su movimiento.

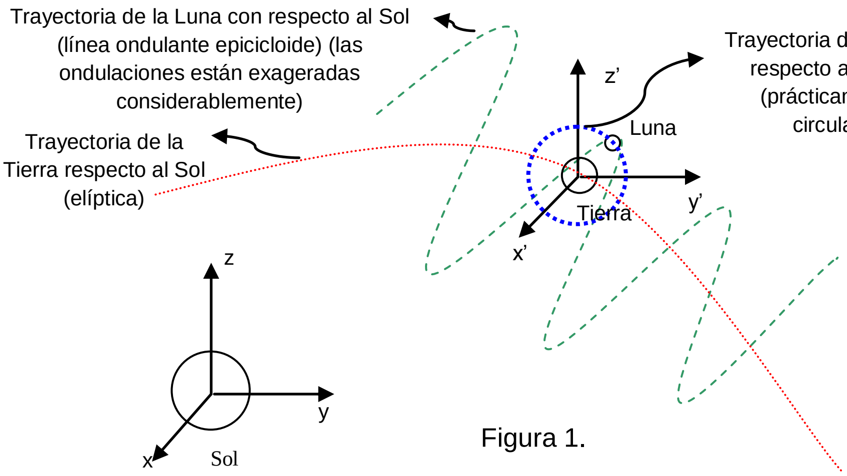


Figura 1.

Vector posición: La posición de un punto P del cuerpo (Figura 2), en movimiento, respecto del sistema de referencia elegido se determina en cada instante de tiempo "t" mediante un vector de posición $\vec{r}$, trazado desde el origen del sistema de referencia hasta el punto P.
Usando como sistema de referencia una terna derecha de ejes cartesianos ortogonales rígidos, se puede expresar $\vec{r}$ como: $\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j} + z(t)\,\hat{k}$

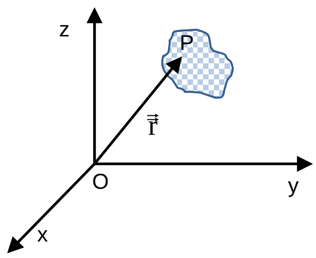


Figura 2.

Partícula: Para estudiar el movimiento de un cuerpo, se debe determinar el vector posición, en cada instante de tiempo "t", de cada uno de sus puntos respecto del sistema de referencia elegido. Para simplificar el problema es conveniente comenzar a estudiar el movimiento de un cuerpo idealizado llamado partícula**.**, que matemáticamente se representa con un punto. El concepto de partícula es un concepto relativo, depende del movimiento que se quiere estudiar.
Un cuerpo puede considerarse como una partícula cuando:

- Los vectores posición de cada uno de los puntos del cuerpo (en un instante dado), tienen prácticamente la misma dirección, el mismo módulo y el mismo sentido. Lo que equivale a decir que las proyecciones de estos vectores diferirán "muy poco" entre sí.

- La incerteza asociada a la medición del módulo del vector posición de un punto en el espacio es del orden de las dimensiones del cuerpo. Ejemplo: La Tierra puede ser considerada como partícula en su movimiento orbital como planeta; ya que la incerteza con la que conocemos la distancia Tierra – Sol (150.000.000 km ± 30.000 km) es mayor que el diámetro medio de la Tierra (~12.000 km).
- En el estudio de su movimiento sus dimensiones no tienen incidencia.
- Es indeformable y sólo tiene movimiento de traslación pura. Un observador puede afirmar que un cuerpo se mueve con movimiento de traslación pura si los ejes (x', y', z') (Figura 3) de un referencial que en forma imaginaria está rígidamente fijo al objeto, siempre permanecen paralelos a sí mismos; es decir, con igual orientación respecto al sistema de referencia del observador (x, y, z).

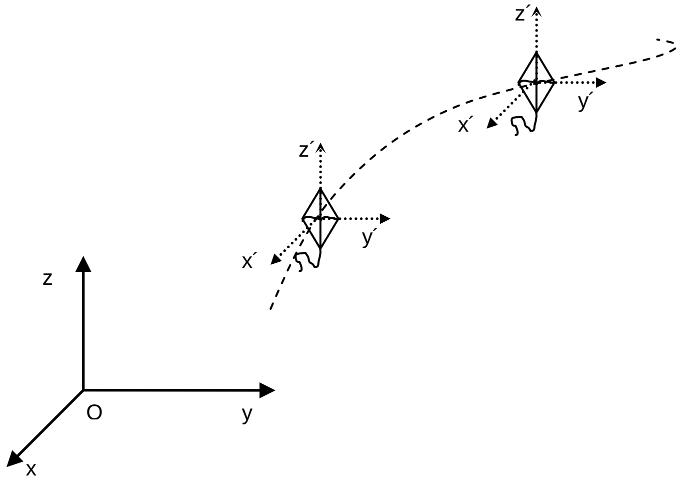


Figura 3

Todos los puntos de un cuerpo que describe un movimiento de traslación pura se mueven de la misma manera y describen la misma trayectoria, que no necesariamente es una recta. Entonces, la posición de un cuerpo puntual está fijada por un único vector posición en cada instante de tiempo.

Ecuación de movimiento: El movimiento de una partícula está determinado si se conoce como cambia su posición en el tiempo, respecto de un determinado sistema de referencia; es decir, si se conoce la función: $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Lo que equivale a decir que el objeto de la Cinemática es conocer las ecuaciones Paramétricas de la trayectoria, en el plano: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

Por otra parte, $y = y(x)$ representa la ecuación cartesiana de la trayectoria.

Hay partículas que describen trayectorias de igual forma; pero, no describen el mismo movimiento (responden a distintas ecuaciones horarias).

Vector desplazamiento: Si una partícula se mueve en el plano xy (Figura 4) su vector posición cambia a medida que transcurre el tiempo. Si $\vec{r}_1$ es el vector posición de la partícula en el instante t_1 y $\vec{r}_2$ es el vector posición en un instante posterior t_2; el vector desplazamiento de la partícula, que representa el cambio de posición de la misma en el intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$, es $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$.

En coordenadas cartesianas, el vector desplazamiento se expresa como: $\Delta\vec{r} = \Delta x\,\hat{i} + \Delta y\,\hat{j}$,

donde: $\begin{array}{l} \Delta x = x_2 - x_1 \\ \Delta y = y_2 - y_1 \end{array}$

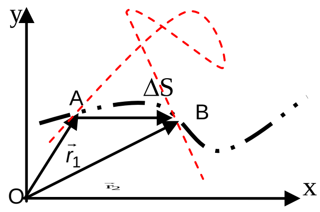


Figura 4

Se designa con ΔS a la longitud de arco; distancia recorrida por la partícula medida sobre su trayectoria.

Al observar la Figura 4 es posible concluir que:

- El módulo del vector desplazamiento no tiene por que coincidir con la longitud de la trayectoria recorrida por la partícula; coincide sólo cuando la trayectoria es rectilínea y el sentido del movimiento no cambia. Por ejemplo: si la partícula recorre una trayectoria cerrada (la posición final coincide con la inicial), $|\Delta\vec{r}| = 0$ pero $\Delta S \neq 0$.
- El vector desplazamiento es el mismo cualquiera sea la trayectoria descripta por la partícula en el intervalo Δt.
- El módulo y la dirección del vector desplazamiento, a diferencia del vector posición, no dependen del sistema de referencia elegido para estudiar el movimiento.

Velocidad media: Es la magnitud vectorial que representa la rapidez del cambio de posición en un intervalo de tiempo finito.

Matemáticamente: $\vec{v}_m = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$

En coordenadas cartesianas, en el plano: $\vec{v}_m = v_{mx}\,\hat{i} + v_{my}\,\hat{j}$

donde: $\begin{cases} v_{mx} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} \\ v_{my} = \dfrac{\Delta y}{\Delta t} \end{cases}$

La velocidad media $\vec{v}_m$ es un vector de igual dirección y sentido que el vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$ (secante a la trayectoria entre A y B).

Por estar asociada a todo el desplazamiento $\Delta\vec{r}$ el vector $\vec{v}_m$ se traza en un punto intermedio entre A y B.

Su módulo se calcula como: $v_m = \dfrac{|\Delta r|}{\Delta t}$ (rapidez media).

Análisis dimensional: $[v_m] = \dfrac{[L]}{[T]}$ Por ejemplo: m/s (SIMELA); km/h

Si la velocidad media es la misma (en magnitud y dirección) entre dos pares de puntos cualesquiera de la trayectoria, se concluye que la partícula se ha movido con velocidad constante; es decir, a lo largo de una línea recta (dirección constante) y con rapidez uniforme (magnitud constante). El movimiento que describe es un Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU).

Rapidez promedio: $v_p = \frac{\Delta s}{\Delta t} \rightarrow$ longitud recorrida sobre la trayectoria por unidad de tiempo.

Velocidad instantánea: El vector desplazamiento no tiene significado físico particular, ya que no proporciona ninguna información acerca de donde estuvo el móvil entre A y B (entre t_1 y t_2), ni cuál ha sido la trayectoria, ni si el movimiento ha sido uniforme o variado.
Pero si se elige el punto B cada vez más próximo al punto A, en el límite cuando B$\rightarrow$ A, el vector desplazamiento tiende a ser tangente a la trayectoria en el punto A y su módulo tiende a confundirse con la distancia dS (elemento de arco) recorrida sobre la trayectoria entre t_1 y t_2.
Al elegir B cerca de A, la relación entre el desplazamiento y el tiempo transcurrido se acerca a un valor límite definido, independizándose de la amplitud del intervalo Δt.

El valor límite de $\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ cuando $\Delta t \rightarrow 0$ se denomina velocidad instantánea en el punto A.

Matemáticamente: $\vec{v} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

La existencia de este límite indica, como empíricamente se comprueba, que el movimiento no puede ocurrir “a saltos”, que es un proceso continuo.

$$\vec{v}: \begin{cases} \text{direc}(\vec{v}): \text{tangente a la trayectoria en el punto} \\ \text{sent}(\vec{v}): \text{sentido de movimiento} \\ |\vec{v}| = v = \frac{|d\vec{r}|}{dt} = \frac{ds}{dt} \rightarrow \text{rapidez instántanea ó rapidez} \end{cases}$$

Si la $\vec{v} = cte$ se cumple que $\vec{v}_m = \vec{v}$ en todo instante de tiempo t.

Aceleración media: Si $\vec{v} \neq cte$; se dice que la partícula experimenta una aceleración. Se define la aceleración media como la magnitud vectorial que mide la rapidez de cambio de la velocidad instantánea durante un intervalo de tiempo Δt.

Matemáticamente: $\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ En coordenadas cartesianas en el plano: $\vec{a}_m = a_{mx}\hat{i} + a_{my}\hat{j}$

La dirección y sentido del vector aceleración media coincide con la dirección y sentido del cambio de velocidad instantánea en el intervalo de tiempo considerado.

Su módulo se calcula como: $a_m = \frac{|\Delta v|}{\Delta t}$

Análisis dimensional: $[a_m] = \frac{[L]}{[T]^2}$ Ejemplo: $\frac{m}{s^2}$

Aceleración instantánea: Si el cambio de velocidad, para iguales intervalos de tiempo, no es uniforme; la aceleración media no se mantiene constante en el transcurso del tiempo. En este caso, es conveniente determinar la aceleración en cada instante de tiempo, es decir la aceleración instantánea.

Matemáticamente: $\vec{a} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$

La existencia del límite significa que tampoco la velocidad puede "saltar de un valor a otro, sin pasar por todos los valores intermedios".

Como la aceleración es la magnitud vectorial que mide la rapidez de cambio de la velocidad instantánea en el transcurso del tiempo, se pueden presentar las siguientes situaciones:

$\vec{v} = cte: \begin{cases} direc(\vec{v}) = cte \to MR \\ v = cte \to MU \end{cases} \Rightarrow MRU$ (Movimiento Rectilíneo Uniforme)

$\vec{v} \neq cte: \begin{cases} direc(\vec{v}) = cte \to MR \\ v \neq cte \to MV \end{cases} \Rightarrow MRV$ (Movimiento Rectilíneo Variado)

$\vec{v} \neq cte: \begin{cases} direc(\vec{v}) \neq cte \to MCurv. \\ v = cte \to MU \end{cases} \Rightarrow$ Ej: Movimiento Circular Uniforme (MCU)

$\vec{v} \neq cte: \begin{cases} direc(\vec{v}) \neq cte \to MCurv. \\ v \neq cte \to MV \end{cases} \Rightarrow$ Ej: Movimiento Circular Variado

Movimiento en una dimensión con aceleración constante (MRUV)

Si una partícula describe una trayectoria recta es conveniente elegir uno de los ejes del sistema de referencia coincidente con la trayectoria.

Para describir la posición de la partícula en cualquier instante t, se debe determinar la función: x = x(t)

Teniendo en cuenta que: $a_x = \dfrac{dv_x}{dt}$; $v_x = \dfrac{dx}{dt}$ y las condiciones iniciales:

Para $t = t_0 \to \begin{cases} x = x_0 \\ v_x = v_{0x} \end{cases}$, resulta:

$$v_x = v_{0x} + a_x(t - t_0)$$

$$x = x_0 + v_{0x}(t - t_0) + \frac{1}{2}a_x(t - t_0)^2$$

Combinando las dos ecuaciones linealmente independientes, se obtiene:

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0)$$

Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado (MRUA) y Movimiento Rectilíneo Uniformemente Desacelerado o Retardado (MRUR)

Analizando la ecuación horaria de posición: $x = x_0 + v_{0x}(t - t_0) + \frac{1}{2}a_x(t - t_0)^2$ se observa que según los signos relativos de v_{0x} y a_x el comportamiento físico de la partícula será distinto.

Si v_{0x} y a_x tienen el mismo signo (no importa cuál) el término lineal y el cuadrático en Δt variarán en el mismo sentido, y el móvil se alejará monótonamente de la posición inicial (la distancia $|x - x_0|$ crece monótonamente), resultando un movimiento estrictamente acelerado.

Si en cambio v_{0x} y a_x tienen signos opuestos el movimiento es desacelerado.

En este último caso, el término lineal predomina sobre el cuadrático para pequeños intervalos de tiempo Δt y el móvil se alejará de x_0; pero, a medida que crece Δt, el término cuadrático empieza a "hacerse sentir", anulando paulatinamente la acción del término lineal, por tener signo opuesto. Entonces, el móvil vuelve a acercarse a x_0 y pasará por x_0 cuando los dos términos tengan igual valor absoluto, es decir cuando: $\Delta t = \dfrac{2\,v_0}{a}$.

Después de ese instante, el término cuadrático siempre “llevará la delantera” y el móvil se alejará definitivamente de la posición inicial x_0 en el sentido opuesto al movimiento inicial.

Matemáticamente, en el caso que $a_x > 0$ y $v_x < 0$ la ecuación de movimiento queda (considerando t_0=0): $x = x_0 - v_0\,t + \dfrac{1}{2} a\,t^2$

Esta función pasa por un extremo (mínimo) x’ en el instante t’:

$$\frac{dx}{dt} = -v_0 + a\,t' = 0 \Rightarrow t' = \frac{v_0}{a} \Rightarrow x' = x_0 - \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{a}$$

En este instante t’, v’ = 0 →el móvil invierte su sentido de movimiento. Vuelve a pasar por x_0 en el instante t’’ = 2 t’ = $\dfrac{2\,v_0}{a}$ con una rapidez $v_x'' = -v_{0x}$.

Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU)

Un caso particular del MRUV es el **MRU** (a_x=0 → v_x=cte)
La función x = x(t) que describe el movimiento es: $x = x_0 + v_{0x}(t - t_0)$

Ejemplo de MRUA: Caída libre

El ejemplo más común de movimiento con aceleración constante es el de un cuerpo puntual que bajo determinadas condiciones cae hacia la superficie terrestre.
Condiciones:

- La resistencia del aire es despreciable (vacío) $\rightarrow \vec{a} = \vec{g}$
- La altura desde la que se deja caer es menor a 4km → $g = cte = 9{,}8\,\dfrac{m}{s^2}$
- La rapidez inicial es nula: v_0=0

Eligiendo el eje “y” del sistema de referencia coincidente con la trayectoria y positivo hacia abajo, las ecuaciones que permiten estudiar el movimiento son:

$$v_y = g(t - t_0)$$
$$y = y_0 + \frac{1}{2} g\,(t - t_0)^2$$
$$v_y^2 = 2g\,(y - y_0)$$

Ejemplo de MRUA: Tiro vertical hacia abajo

Se deben cumplir las mismas condiciones que en el movimiento de caída libre, la diferencia es que la rapidez inicial no es nula.
Teniendo en cuenta el mismo sistema de referencia, resulta:

$$v_y = v_0 + g\left(t - t_0\right)$$

$$y = y_0 + v_0\left(t - t_0\right) + \frac{1}{2} g \left(t - t_0\right)^2$$

$$v_y^2 = v_0^2 + 2g\left(y - y_0\right)$$

Ejemplo de MRUV: Tiro vertical hacia arriba

Movimiento con $\vec{a} = \vec{g} = cte$

Eligiendo el eje "y" del sistema de referencia coincidente con la trayectoria y positivo hacia arriba, las ecuaciones que describen el movimiento son:

$$v_y = v_0 - g\left(t - t_0\right)$$

$$y = y_0 + v_0\left(t - t_0\right) - \frac{1}{2} g \left(t - t_0\right)^2$$

$$v_y^2 = v_0^2 - 2g\left(y - y_0\right)$$

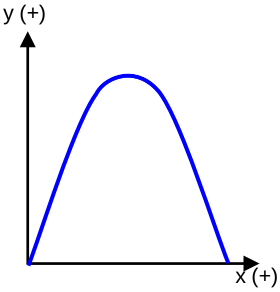
Tiro vertical hacia arriba: $\begin{cases} \text{MRUR} & \text{hasta el punto de altura máxima} \rightarrow v_y = 0 \\ \text{MRUA} & \text{desde el punto de altura máxima (caída libre)} \end{cases}$

Ejemplo de movimiento en el plano con aceleración constante: Movimiento parabólico
Ejemplo: Movimiento de proyectiles en el vacío

Para que un proyectil (cuerpo puntual que no es capaz de impulsarse por sí mismo) lanzado en forma oblicua describa una trayectoria parabólica se deben cumplir las siguientes condiciones:

- La resistencia del aire es despreciable (vacío) $\rightarrow \vec{a} = \vec{g}$
- $\vec{g} = cte: \begin{cases} \text{dir}\left(\vec{g}\right) = cte \rightarrow \text{curvatura de la Tierra despreciable} \\ g = cte = 9{,}8\,\frac{m}{s^2} \rightarrow \text{la altura máxima inferior a 4km} \end{cases}$

De acuerdo al sistema de referencia elegido (Figura 5), las ecuaciones horarias del movimiento son:



$$x = x_0 + v_{0x}\left(t - t_0\right)$$

$$y = y_0 + v_{0y}\left(t - t_0\right) - \frac{1}{2} g \left(t - t_0\right)^2$$

Con lo que la ecuación cartesiana de la trayectoria resulta (considerando x_0=0):

$$y = y_0 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x - \frac{g}{2\,v_{0x}^2} x^2$$

Figura 5

Actividad

Los enunciados que se incluyen son situaciones problemáticas contextualizadas, que involucran conceptos de Física, seleccionados de libros de textos de Matemática del Nivel Secundario.

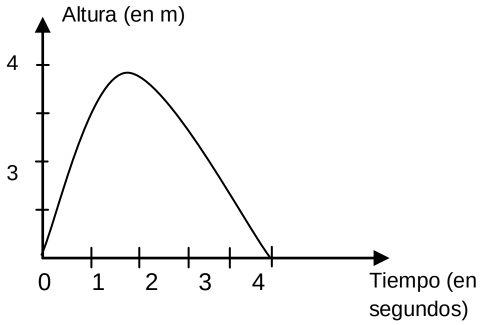
Para cada uno de ellos:

a) Esbozar la solución de los problemas propuestos; a fin de identificar los conceptos y procedimientos matemáticos que necesitarían poner en juego sus alumnos para resolverlo.
b) Identificar los contenidos de Física involucrados y la rigurosidad científica de la formulación del enunciado.
c) Analizar la validez científica de los resultados obtenidos y su posible generalización.
d) Si lo cree conveniente, reformular el enunciado.

Aclaración: Los enunciados han sido ordenados según el objeto matemático predominantemente involucrado, de acuerdo al criterio de los respectivos autores

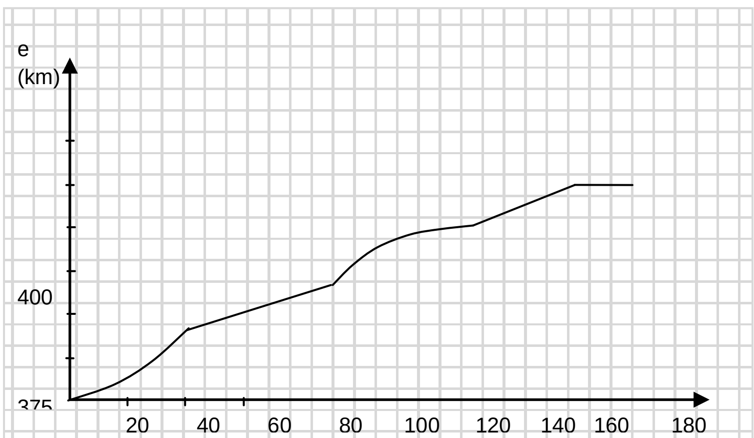
Algunos Ejemplos de Situaciones Problemáticas a analizar contextualmente:

1.- Martín arrojó hacia arriba una pelotita de tenis que pudo agarrar nuevamente cuando cayó. El gráfico muestra la altura que alcanzó la pelotita a medida que transcurrió el tiempo.



a) ¿A qué altura llegó la pelotita? Rta: 4 metros
b) ¿Cuánto tiempo tardó en llegar a la máxima altura? Rta: 2 seg.
c) ¿Cuánto tiempo tardó en bajar? Rta: 3 seg.

2.- En todos los tramos rectos de su camino un tren avanza a velocidad constante, siempre la misma; es decir, avanza espacios iguales en tiempos iguales. Observa el gráfico que muestra el espacio recorrido por el tren en función del tiempo.



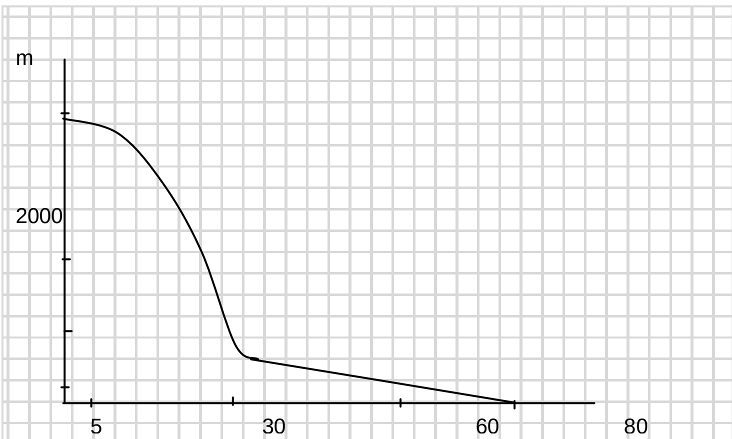
a) ¿Cuántos metros recorrió el tren en total? Rta: 375 000 m

b) ¿Cuánto tiempo duró el viaje? ¿Qué elemento del gráfico te lo indica? Rta: 190 minutos. A partir de ahí no varía e (el gráfico se convierte en un segmento horizontal)
c) ¿Cuántos metros avanzó en cada tramo recto y cuánto tiempo tardó para recorrer cada uno? Rta: En ambos casos recorrió 75 000 m en 50 minutos
d) ¿A qué velocidad avanzó el tren en los tramos rectos, o sea, cuánto vale la constante de proporcionalidad? Rta: 1,5 km/min.

3.- Una bola de béisbol es lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 64 m/s. El número de metros m sobre el suelo después de t segundos está dado por la ecuación $m = -16t^2 + 64t$.a) ¿En cuánto tiempo alcanza la pelota una altura de 48 m sobre el suelo? b) ¿Cuándo regresará al piso?

4.- Lanzamos una pelota, la altura alcanzada y (en m) y los metros recorridos x están relacionados por la ecuación: $y = -5x^2 + 10x$. Calcula la máxima altura alcanzada por la pelota.

5.- Ésta es la gráfica altura-tiempo de la caída de un paracaidista.



Di cuál es la velocidad de caída libre, cuánto tiempo la mantiene y que altura cae de ese modo; cuál es su velocidad con el paracaídas abierto, cuánto tiempo la mantiene y que altura recorre así.
¿En qué instantes lleva una velocidad de 50m/s?

6.- Si a un balde se le hacen agujeritos a distintas alturas y se le vierte agua con una manguera de modo que el balde se mantenga lleno, se observará que los chorros de agua que salen describen curvas que son parábolas. La fuerza con la que sale el agua está en función de la altura del agujerito. Por ejemplo, el chorro que sale por un agujerito que está a 8 cm de la base, llega a 2cm de distancia. La función cuadrática correspondiente es:

$$y = -2x^2 + 8.$$

¿A qué altura se debe practicar el agujerito para que el agua llegue a 4 cm de distancia?

Bibliografía

Educación Matemática:

- Camarena Gallardo, P. (2008). *La Matemática en el Contexto de las Ciencias*. Trabajo presentado en el III Coloquio Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas, Lima, Perú.
- Esteybar, I (2008). *Hacia la integración a la vida universitaria. Propuesta de mejora del ingreso y permanencia* (Proyecto de Inv.). San Juan, Argentina: Universidad Nacional de San Juan, Departamento de Matemática.
- Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros. Matemática y su didáctica para maestros. Manual para el estudiante*. Granada: Proyecto Edumat-Maestros. Extraído el 20 de Marzo de 2008 desde: http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/
- Mancipar de Katz, S. (2009, 22 de Abril) *Modelización: Una forma de encontrar el sentido de la Matemática*. Extraído el 15 de julio de 2009 desde http://www.ellitoral.com/index.php/diarios/2009/04/22/medioambiente/MED-02.html
- Zabala, A. Berenguer, M., Moyano, A. y Esteybar, I. (2009, Septiembre). *Análisis documental de las evaluaciones de matemática para ingreso a la FI – UNSJ*. Comunicación presentada en EMCI XV, Tucumán, Argentina.

Conceptos Físicos:

- Resnick, R., Halliday, D. y Krane, K. (2004). *Física - Volumen I*. México: Compañía Editorial.
- Serway, R. & Jewett, J. (2005). *Física para ciencias e ingenierías – Volumen I*. México: Thomson.
- Tippler, P. & Mosca, G. (2005). *Física para la ciencia y la tecnología* **-** *Vol 1A y C.* Argentina: Reverté.

Matemática para el Nivel Secundario:

- Altman, S. y otras. (2002). *Matemática/Polimodal. Funciones I*. Argentina: Longseller S.A.
- Andrés, M. (2006). *Actividades de Matemática 8*. Argentina: Santillana.
- Berio, A. (2008). *Logonautas matemática 2 versión docente*. Argentina: Puerto de Palos.
- De Guzmán, M. y Colera, J. (1998). *Matemáticas II*. *C.O.U*. España: Anaya.
- Etchegoyen, S. y otros. (1999). *Matemática 1 Biblioteca del Polimodal*. Argentina: Kapelusz.
- Ferraris, L. y Tasso, M. (2001). *Aprendamos matemática 9*. Argentina: Comunicarte.
- Pisano, J. (2006). *Logikamente Tomo III*. Argentina: Logikamente.