

## REGRESIÓN LINEAL Y NO LINEAL EN CONTEXTO, “NUNCA FUE MÁS FACIL” CON LAS NUEVAS TECNOLOGÍAS.

Armando López Zamudio

[larmandozam@hotmail.com](mailto:larmandozam@hotmail.com)

CBTis No. 94, conTIgo, México.

Núcleo temático: IX,

Modalidad: CB,

Nivel educativo: 4

Palabras clave: Estadística, Tecnología, Calculadoras graficadoras

### Resumen

*La Propuesta Curricular para la Educación Obligatoria 2016(SEP, 2016) en México, enfatiza trabajar con datos reales y tecnología. Kaput, Noss y Hoyles (2002) señalan “el software se ha vuelto más visual, más interactivo y...más dinámico” el hardware ha evolucionado volviéndose más portable en términos de su manejo manual. El software de la TI Nspire CX CAS, es un ejemplo de ésta evolución. Abordaremos algunas herramientas del software con ejemplos que muestran la forma amigable en que los conceptos matemáticos se pueden abordar. La App nos permite trabajar por lo menos con cuatro representaciones. En este trabajo mostraremos el diseño de unas actividades que incorporan el uso de la Apps TI-Nspire CX CAS trabajando con datos reales y que fueron piloteadas en un grupo de estudiantes del Centro de Bachillerato Tecnológico Industrial y de Servicios No. 94. En esta investigación abordamos los conceptos de regresión lineal y no lineal, coeficiente de correlación, diagrama de dispersión, el método de mínimos cuadrados.*

### Objetivo

Diseñar actividades y probar su efectividad al trabajar con el software Ti Nspire CX CAS, a fin de lograr la apropiación de conceptos matemáticos, particularmente: tipos de variable, regresión lineal y no lineal, coeficiente de correlación, diagrama de dispersión, el método de mínimos cuadrados.

### Antecedentes

Los resultados obtenidos por Robutti (2011) encontraron que esta tecnología proporciona formas sociales de producir conocimiento, el rendimiento en los aprendizajes es mayor, además que los alumnos se apropian del conocimiento de una manera más efectiva. Con la App TI-Nspire CX CAS se cuenta con un ambiente rico para la exploración creando en los estudiantes la necesidad y el deseo por el trabajo colaborativo, el sistema TI-Navigator nos permite dar este paso, pues nos brinda una red local en el aula, abriéndonos un canal de comunicación no solamente entre un estudiante y un software, sino también entre cada estudiante y sus compañeros. La experiencia del aprendizaje adquiere un fuerte aspecto social. Utilizando la App y/o las calculadoras Ti Nspire CX CAS, los estudiantes pueden crear objetos matemáticos y luego enviarlos a un espacio común en el que aparece el conjunto de contribuciones. El potencial de este equipo radica en la simultaneidad y el anonimato de las comunicaciones de los estudiantes. En medios tradicionales, la participación no puede ser simultánea ni anónima. Los estudiantes tienen que esperar su turno para contribuir a la discusión, y cuando un estudiante contribuye a la clase verbalmente, es inevitable que revele su identidad como el que haga una pregunta o comentario. El TI- Navigator elimina estas y otras limitaciones. El anonimato permite al estudiante hacer contribuciones a los límites de su capacidad, sin tener miedo a estar expuesto. (Brady 2010).

González Martín, Hitt y Morasse(2008) consideran el rol de las representaciones, señalan que un concepto matemático es construido por la forma en que se articulan las diferentes representaciones del concepto, mencionan que la utilización espontánea de las representaciones semióticas usadas por los estudiantes son importantes, y son influenciados por la institucionalización del maestro o los textos. Raymond Duval (1988) señaló que esta articulación se debe dar en la coordinación de al menos dos registros de representación. La calculadora y la Apps TI Nspire CAS nos permite trabajar por lo menos con cuatro registros, con lo que se puede lograr la comprensión de un concepto de forma más integral, abordaremos varios ejemplos tomados de la estadística, mostrando las ventajas que nos ofrece la App de TI Nspire CX CAS para el Ipad y la gran posibilidad de enmarcar las aplicaciones en contextos de significado e interés para los alumnos. Este trabajo, tiene como antecedente un curso remedial de Geometría Analítica de acuerdo a López (2012) en

el cual se reporta, que la tecnología propuesta da buenos resultados en el proceso enseñanza-aprendizaje.

### **De la propuesta y la población**

El estudio se realizó con alumnos del Centro de Bachillerato Tecnológico Industrial y de Servicios número 94, una institución que cuenta con cerca de 1400 alumnos, ubicada en la ciudad de Pátzcuaro, Michoacán, una ciudad de aproximadamente 90,000 habitantes. Las actividades fueron piloteadas en un grupo de 22 estudiantes de bachillerato del sexto semestre (alumnos de entre 17-18 años) que habían reprobado un curso de estadística, a los cuales se les da la oportunidad de recurrir.. Esta institución cuenta con 55 calculadoras Ti Nspire CX CAS y dos Sistemas Ti Navigator, el software de estas calculadoras es simulado en la App Ti Nspire CX CAS por lo que podemos referirnos indistintamente a él ya sea en la calculadora o en el Ipad.

### **Metodología**

Se usaron calculadoras Ti Nspire CX CAS para los estudiantes la computadora del profesor con software de conectividad instalado y una conexión entre las calculadoras de los estudiantes y la computadora del profesor mediante una red local conocida como TI Navigator. Se impartió una primera sesión de dos horas, se da a conocer el software Ti Nspire CX CAS de manera general, la experiencia nos mostró que los alumnos se familiarizan de manera casi automática con el ambiente de la App, a diferencia de algunos docentes. Se dieron cinco sesiones de tres horas; en cada una de las sesiones se repartieron hojas de trabajo y una calculadora o Ipad por alumno. En un primer paso se les pidió que leyeran la hoja de trabajo dándoles 10 a 15 minutos, luego se integraron en parejas para ir contestado en su hoja de trabajo a la vez que lo hacían en la calculadora. Algunas actividades incluyeron la comparación entre contestar a lápiz y papel y usando la tecnología. En un tercer momento discutían y conciliaban sus respuestas con otra pareja formando así equipos de cuatro alumnos. En un cuarto momento se hacía una discusión en plenaria guiados y moderados por el docente hasta la institucionalización del conocimiento. La calculadora TI Nspire CX CAS nos permite realizar los cálculos de regresión con sólo dar un clic al comando del modelo que decidamos, lo cual nos permite indagar más sobre

aspectos conceptuales, por ejemplo si los datos que se están analizando tienen un comportamiento lineal o no, qué tan confiable es el modelo asociado.

Las actividades están diseñadas para ir guiando al lector en el estudio de la regresión lineal y su cálculo a través de la calculadora en cuestión. Abordamos cuatro actividades con datos que se ajustan mejor a modelos lineales, primero mostramos dos casos ideales cuyo coeficiente de correlación es uno, a continuación provocamos un conflicto cognitivo mostrando dos ejemplos cuyo conjunto de puntos están dispersos pero pueden ajustarse a un modelo de regresión lineal, luego mostramos una quinta actividad donde el alumno tendrá que concluir que no todos los fenómenos se ajustan a un modelo lineal y que el modelo que mejor se ajusta es el potencial y de coeficiente de correlación casi perfecto, finalmente proponemos una sexta actividad donde los datos están dispersos, pero se pueden ajustar a un modelo de una función potencial o exponencial.

A continuación se muestra un ejemplo de cómo se calcula el modelo de regresión lineal en un caso. Se cuenta con una colección de datos que relacionan distancia recorrida (medida en kilómetros) en bicicleta y calorías quemadas (medida en kilocalorías) éstos están capturados en la aplicación de la calculadora Figura 1, **Listas y Hojas de Cálculo**, después se pide al alumno que realice a lápiz y papel la dispersión de puntos y luego la compare con la que construye la aplicación (Figura 2 **Datos y Estadísticas**) para ello el alumno debe decidir cuál es la variable independiente y escoger entre distancia y calorías, por lo tanto la otra será la variable dependiente.

	A	B	C	D
	distan...	calorias		
1	1.31	32		
2	4.6	130		
3	8.21	235		
4	11.94	344		
5	15	439		

Figura 1. Distancia en Km, calorías en Kc.



Figura 2. Escoger variable

Al escoger distancia como variable independiente ésta se grafica en el eje “x”, calorías se grafica en el eje “y” como variable dependiente(Ver figura 3)



Figura 3. Gráfica de dispersión de datos

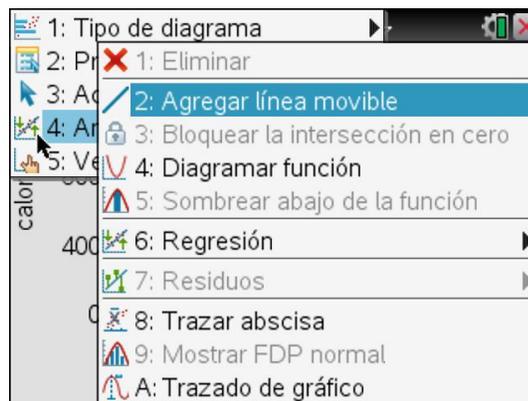


Figura 4 Menú analizar

A continuación se agrega una línea móvil (en la aplicación Datos y Estadística da un clic en el menú, **Analizar**, escoge el comando **Agregar línea móvil**) (ver Figura 4). Esta recta móvil puede ser ajustada a ojo de forma dinámica cambiando la pendiente y la ordenada al origen ver (figuras 5 y 6).

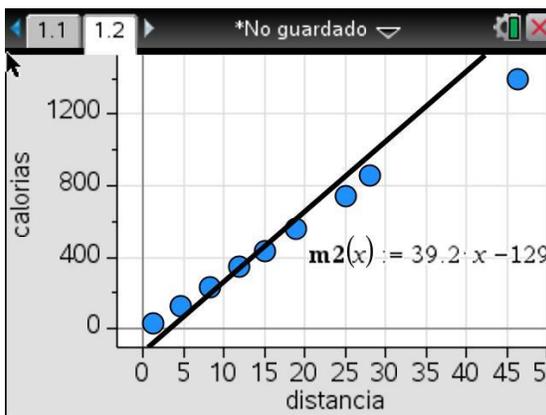


Figura 5 Recta Móvil

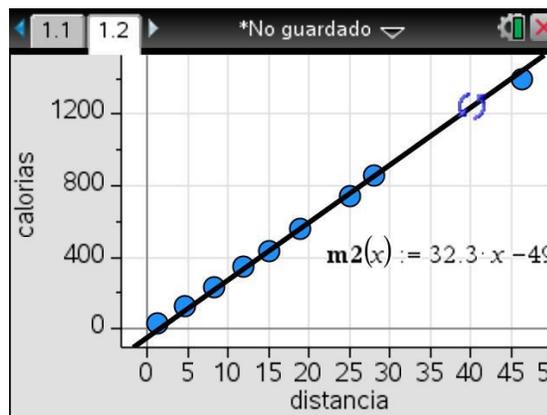


Figura 6 Recta Móvil mejor ajustada

Observemos cómo la expresión algebraica cambia al mover la línea recta. Se pide a los estudiantes que detecten a ojo la recta que a su criterio mejor se ajusta a los datos y cuál es el modelo lineal. Después de visualizar y registrar todas las respuestas de los alumnos, se da a conocer el método de regresión lineal. El método que aplica el software de la aplicación es el método de mínimos cuadrados, donde la pendiente (m), la ordenada al origen (b) y el coeficiente de correlación (r) se calculan con la siguientes fórmulas:

$$SC(x)=\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^2}{n}, SC(y)=\sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n y_i)^2}{n},$$

$$SC(x*y)=\sum_{i=1}^n x_i * y_i - \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)*(\sum_{i=1}^n y_i)}{n}$$

$$m=\frac{SC(x*y)}{SC(x)}, b=\frac{\sum_{i=1}^n y_i - m \sum_{i=1}^n x_i}{n}, r=\frac{SC(x*y)}{\sqrt{SC(x)*SC(y)}}$$

Se pide a los alumnos que realicen los cálculos a lápiz y papel y contrasten su resultado con el modelo que obtuvieron a ojo obtenidos con la App. Se hace notar que los datos son menos dispersos mientras el valor absoluto de r tienda a uno, es decir si están totalmente alineados r es igual a 1 o -1.

Ahora se obtendrá el modelo usando la App, los alumnos se darán cuenta lo rápido que es encontrar el modelo de regresión lineal presionado en el menú **analizar**, de ahí escogen el comando **regresión** y a su vez escogen **mostrar lineal**. Al dar clic aparece la línea recta que mejor se ajusta a los datos (ver figura 7). En la figura 8 encontramos un caso donde se muestra una línea recta con los cuadrados de las desviaciones de los datos hacia la línea recta propuesta, también nos indica el total de la suma de los cuadrados de las desviaciones, los alumnos detectan de manera intuitiva y visual que la recta que mejor se ajusta es cuando la sumatoria mencionada es mínima.

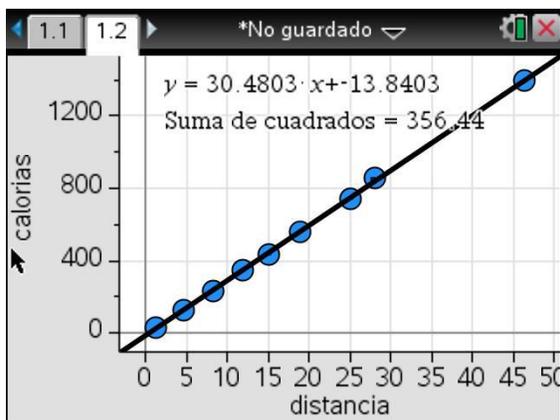


Figura 7. Línea recta con mejor ajuste

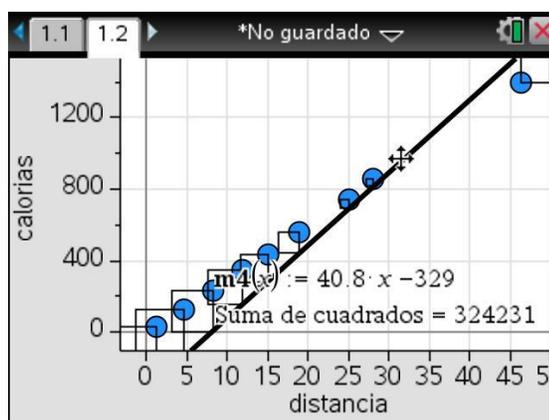


Figura 8 Línea recta con desviaciones.

Después de esta actividad inicial se plantean una serie de problemas de contextos reales que detectamos son de interés de los alumnos, involucrando variables tales como: peso en gramos de chocolates (diferentes presentaciones), marcas y el número de calorías. También se analiza las circunstancias astronómicas y geográficas que influyen en la determinación

de los distintos tipos de clima del planeta en base a los trabajos de MacGivney Jean, MacGivney Raymond y MacGivney Katherin (2008), quienes analizaron modelos lineales que relacionan la latitud y la temperatura. Así mismo investigamos la relación entre la latitud y la cantidad de lluvia, la altura sobre nivel del mar y el promedio de precipitaciones pluviales anual. Los datos se extrajeron de la página web *www.worldclimate.com* en donde podemos encontrar un banco de datos de poblaciones de todo el mundo que indican la latitud, temperaturas promedio mensuales y anuales, promedio mensual y anual de precipitaciones pluviales, entre otros.

### **Resultados y Conclusiones.**

Se aplicó un cuestionario sobre la impresión que les dejó el uso de la tecnología propuesta, y un trabajo final sobre la aplicación de regresión a través de mínimos cuadrados usando la tecnología, se les solicitó que investigaran y propusieran otros ejemplos de variables relacionadas de tema libre. Se les indicó los aspectos a evaluar: uso de datos reales, presentación del reporte, resultados (valores bien calculados de  $m$ ,  $b$ , y  $r$ ) y conclusión.

Para el cuestionario el 100% de los alumnos manifestó que la App de la Ti Nspire CX CAS les ayudó entender el tema de estudio, el 81.6% mencionó que fue fácil aprender a usar la calculadora, algunos de los comentarios sobre la utilidad de la tecnología fueron: *“definitivamente fue de mucha ayuda para entender el tema. entendí un poco más”*. *“Me sentí muy cómoda y claro que fue de gran ayuda, además la clase fue más dinámica”*. *“Con la ayuda de la calculadora pudimos comprobar lo que realizamos manualmente”*. *“Facilitó mucho los procesos matemáticos”*. *“Me ayudó a entender ya que con una calculadora convencional hubiera sido más tardado”*. *“Me ayudo a reafirmar”*. *“Nos hizo fácil su comprensión y a evitar errores”*. *“Es una manera gráfica de realizar los procedimientos”*. Respecto del trabajo final el 57.14% de los alumnos obtuvo 100 en una escala de 1-100, 23.81% alcanzó 40 o menos puntos. Algunos de los datos que propuestos fueron la porosidad y la humedad de suelos típicos en estado natural para determinar el tipo de suelo, así como analizar las respiraciones normales por minuto en una persona en según su edad, la relación entre el ingreso y esperanza de vida, número de accidentes en determinada autopista en relación al número de autos que circulan, velocidad máxima que

alcanza un auto y su relación con el precio, edad de mujeres embarazadas y cantidad de muertes fetales.

Considerando que estos alumnos son repetidores del curso, observamos que su actitud hacia las matemáticas cambió. El 76% aprobó la actividad final y reconoció a la tecnología usada como una herramienta que facilita el aprendizaje de las matemáticas.

### **Referencias bibliográficas**

Brady C. (2010) El aprendizaje colaborativo con tecnología. Innovaciones Educativas. ED. Texas Instruments. USA.

Duval Raymond, (1998) Gráficas y ecuaciones: la articulación de dos registros. Traducción en Antología de Educación Matemática (Editor E. Sánchez). Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN, México

González-Martín, Hitt Fernando & Morasse Christian (2008) The Introduction Of Graphic Representation Of Functions Through The Concept Of Co-Variation And Spontaneous Representations. A Case Study. In Figueras, O Cortina, J, L., Alatorre, S Rojano, T. & Sepúlveda, A. (Eds.), (2008). Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX Vol. 3 México: Cinvestav-UMSNH

Kaput, J, Noss, R & Hoyles, C (2002). *Developing new notations for a learnable mathematics in the computational*. In L. English (Ed.) Handbook of international research in mathematics education

López Z. A. (2012) Aprendizaje Colaborativo Un Caso de Éxito en la Enseñanza de la Geometría Analítica Usando Ti-Navigator y la Ti-Nspire CX CAS, Innovaciones Educativas, Duodécima Edición 5-7.

MacGivney-Burelle J., MacGivney R., MacGivney K. Investigation the Relationship between Latitude and Temperature. Mathematics Teacher, Vol. 102 Número 3, Octubre 2008. Pp172-177

Robutti Ornella (2011) Las calculadoras Graficadoras y el Software de Conectividad para Construir una Comunidad de Practicantes de Matemáticas, Reporte de Investigación. Departamento de Matemáticas, Universidad de Torino Torino Italia. Traducción de Socorro Valero para Texas Instruments-

SEP (2016) *Propuesta Curricular para la Educación Obligatoria* 2016. México.

WorldClimate.com (2012). <http://www.worldclimate.com> Consultado 22/12/2016