

O ESTUDO DA NOÇÃO DE DERIVADA DE UMA FUNÇÃO UTILIZANDO O GEOGEBRA

André Lúcio Grande

andreluciogrande@gmail.com

Faculdade de Tecnologia de Mauá - Brasil

Núcleo temático: Recursos para o ensino e aprendizagem da matemática

Modalidade: CB

Nível educativo: Formação e atualização de ensino

Palavras chave: Derivada de uma função, GeoGebra, Pensamento Visual, Intuição e Rigor

Resumo

Pesquisas em Educação Matemática ligadas ao ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral evidenciam as dificuldades manifestadas pelos estudantes na compreensão do significado da derivada de uma função e suas aplicações. Esses resultados de um modo geral podem refletir um modelo de ensino que se utiliza predominantemente na construção do conhecimento matemático de métodos procedimentais, algoritmos ou técnicas algébricas memorizáveis, em detrimento da exploração de outros aspectos cognitivos. Com isso, essa pesquisa objetiva analisar quais são as contribuições do estudo da derivada de uma função privilegiando a utilização de elementos como o raciocínio intuitivo e o pensamento visual elaborando conjecturas e hipóteses acerca do objeto de estudo. A fundamentação teórica baseou-se em alguns princípios e ideias ligadas ao papel da visualização e suas inter-relações com a intuição e o rigor segundo os trabalhos de David Tall. Como procedimentos metodológicos foram analisadas, numa intervenção de ensino por nós elaborada, as resoluções de questões relacionadas ao tema efetuadas pelos estudantes de um curso de Cálculo de uma faculdade de tecnologia no Brasil utilizando o software GeoGebra. Destacamos que o uso do software como recurso pedagógico auxiliou a possibilitar explorar alguns significados da derivada de uma função, auxiliando sobremaneira sua compreensão e formalização.

1. Introdução

As principais noções do Cálculo Diferencial e Integral como limite, continuidade, derivada e integral de uma função podem ser consideradas, em grande medida sofisticadas, pois trazem em seu bojo conceitos como “infinitamente pequeno” ou “tendendo a um número”, e mesmo na tentativa procurarmos expressar seus significados utilizando termos como “tão próximos quanto quisermos” ou “à medida que se aproxima cada vez mais” percebemos a dificuldade em sua compreensão.

Esse fato pode ser explicitado nas pesquisas em Educação Matemática, especificamente sobre o ensino e aprendizagem do Cálculo, em que se constata a dificuldade e a incompreensão por parte dos estudantes dos significados e das aplicações de conceitos fundamentais como por exemplo a derivada de uma função.

Dentre essas pesquisas, Tall (2002) analisou os obstáculos apresentados pelos estudantes na compreensão da notação simbólica utilizada na representação algébrica do conceito de derivada de uma função. O autor ressalta que o ensino do Cálculo privilegiando o uso de técnicas algébricas memorizáveis, métodos procedimentais e algoritmos dados pelos professores, ao lecionarem a disciplina de Cálculo, faz com que os alunos apresentem uma compreensão tipicamente algébrica e não visual dos conceitos.

Em nossa prática docente, observamos que num curso de Cálculo muitos conceitos são tratados meramente como fórmulas memorizáveis na resolução de questões sem nenhuma relação com outros conceitos, sendo que isso pode se refletir em obstáculos encontrados pelos estudantes no seu estudo.

Todavia, devemos buscar estratégias e recursos pedagógicos no ensino das principais noções do Cálculo procurando desenvolver nos estudantes o raciocínio intuitivo e o pensamento visual por meio do uso de analogias, elaboração de conjecturas e hipóteses, no sentido de visualizar e melhor compreender os objetos em questão na construção do conhecimento matemático.

No caso da derivada de uma função, podemos explorar sua interpretação geométrica como o coeficiente angular da reta tangente a uma curva de maneira intuitiva e dinâmica utilizando um recurso computacional auxiliar, como por exemplo o software GeoGebra, em detrimento de um ensino carregado de formalismos ou fórmulas procedimentais.

Sendo assim, essa pesquisa objetiva descrever e analisar quais são as contribuições de uma intervenção de ensino sobre a introdução ao estudo da noção de derivada de uma função a partir de sua interpretação geométrica utilizando o GeoGebra, privilegiando a utilização do raciocínio intuitivo e o pensamento visual no sentido da construção e formalização do objeto matemático.

2. Fundamentação Teórica

Podemos considerar de um modo geral que a questão da visualização na Matemática foi responsável pela elaboração de muitas ideias por grandes descobertas assim como levou os matemáticos a alguns resultados enganadores.

Em seus trabalhos sobre o ensino e aprendizagem do Cálculo, Tall (2002) discute o papel da visualização do contexto do Cálculo nos últimos anos e suas possíveis contribuições procurando relacioná-lo com as noções de intuição e rigor. Para ele, nas fases iniciais do desenvolvimento da teoria de funções, limite e continuidade, a visualização provou ser uma fundamental fonte de ideias. Segundo o autor:

Ao introduzir as visualizações adequadamente complexas de ideias matemáticas, é possível fornecer uma visão muito mais geral dos modos possíveis de aprender os conceitos, fornecendo intuições muito mais poderosas do que através de uma linguagem tradicional (Tall, 2002, p. 20 – tradução nossa).

Por visualização o autor entende como uma ação de transformar conceitos abstratos em imagens mentalmente visíveis. Essa ação constitui-se em dois momentos: constrói-se algo mentalmente e posteriormente representa-se o que pensou.

No caso do ensino dos conceitos fundamentais do Cálculo, como a derivada de uma função por exemplo, Tall defende uma abordagem inicialmente que privilegie aspectos ligados ao raciocínio intuitivo e o pensamento visual, baseando na interação com a imagem física do gráfico de uma função, por exemplo, antecipando dessa maneira qualquer demonstração matemática ou formalização do objeto de estudo.

Sobre a introdução da noção de derivada de uma função num curso de Cálculo, Courant e John (2001) comentam que esse conceito, assim como integral, possui uma origem imediatamente intuitiva e de fácil compreensão privilegiando sua interpretação geométrica. Além disso, a derivada de uma função pode ser utilizada em vários contextos e aplicações, como na resolução de problemas de otimização, em que são envolvidas questões de máximos e mínimos de uma função, bem como na Mecânica no estudo da velocidade como taxa de variação instantânea do espaço em função do tempo.

Cabe ressaltar que a derivada de uma função pode ser definida sem qualquer referência a algum tipo de representação gráfica da função. Entretanto, consideramos que introduzir o esse conceito explorando suas propriedades geométricas se constitui em um valioso recurso

para o seu ensino e aprendizagem, pois envolve aspectos ligados ao raciocínio intuitivo e o pensamento visual.

Para isso, Tall (2002) ressalta o uso do computador como uma interface visual e atuante em que é possível criar modelos de uma situação proposta destinados a explorações sensoriais por meio de percepções, visualização e intuições, se constituindo um “organizador genérico” de algumas ideias e conceitos, sendo um ambiente em que os estudantes podem manipular exemplos e contraexemplos desses conceitos.

No caso da presente pesquisa, utilizaremos na intervenção de ensino o software GeoGebra como recurso computacional auxiliar, pois o mesmo possibilita interagir de maneira dinâmica com o objeto matemático, no caso o gráfico de uma função, utilizando-se das representações algébrica, numérica e geométrica do mesmo, conforme será descrito a seguir.

3. Intervenção de Ensino e Resultados

Elaborou-se uma intervenção de ensino formada por três questões objetivando explorar de maneira intuitiva a visualização de algumas propriedades geométricas da noção de derivada de uma função utilizando representações gráficas com o software GeoGebra.

Para responder às questões da intervenção por nós elaborada efetuou-se um convite aos estudantes de um curso de Tecnologia numa faculdade pública do Estado de São Paulo para participarem de uma atividade relacionada com a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I da turma do primeiro semestre. Cinco estudantes se prontificaram em participar de tal atividade fora dos seus horários de aula, que foi realizada no laboratório de informática da própria instituição.

Destacamos que os estudantes que participaram da intervenção de ensino cursam a disciplina de Cálculo I porém tiveram um breve contato com o tema derivada de uma função apenas em Física Geral I, sendo que o professor da disciplina apresentou as regras de derivação de algumas funções no intuito de estudar as funções horárias do movimento sem, entretanto, fazer menção ao significado e a interpretação geométrica da derivada de uma função, que será abordada e formalizada posteriormente no curso de Cálculo no próprio semestre letivo.

Foi entregue um protocolo contendo as três questões para os estudantes, sendo que a Questão 01 foi respondida sem o auxílio do software GeoGebra como recurso computacional auxiliar. Com isso os alunos deveriam, segundo Tall (2002) construir mentalmente os conceitos envolvidos e posteriormente representar aqui que se pensou. Ressaltamos que os alunos nunca haviam participado de uma atividade semelhante como essa, apesar de todos terem manuseado de maneira informal o software em outras situações. Sobre a intervenção de ensino, a Questão 01 objetivou avaliar quais são as concepções que os alunos apresentavam sobre o conceito de reta tangente e quais as estratégias que os mesmos apresentavam para se traçar a mesma num ponto pertencente a um gráfico, conforme a figura a seguir:

01. A figura abaixo representa a curva C e um ponto P pertencente a C. Como você faria para traçar uma reta tangente à curva C pelo ponto P? Justifique sua resposta.

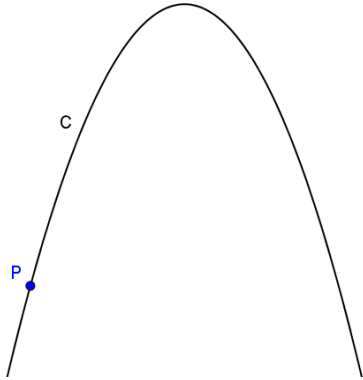


Figura 01 – Questão 01
Fonte – Autor (2017)

Como resultados, destacamos que três dos cinco estudantes comentaram que não era possível traçar a reta tangente, pelo fato da mesma ser determinada por dois pontos e a questão apresentava apenas um ponto. Outros dois estudantes responderam que para se traçar a reta tangente era necessário calcular a derivada dessa função, sem ao menos justificar o motivo. Um dos participantes ainda comentou que o resultado da derivada de uma função do segundo grau era uma função do primeiro grau, e que utilizaria o coeficiente

angular resultante e substituiria na equação da reta $y - y_0 = m(x - x_0)$ para se determinar a reta tangente.

Essas estratégias podem refletir, de certa forma, o conceito ainda primitivo sobre derivada de uma função, em que uma técnica algébrica possivelmente abordada num curso Física seja suficiente para resolver o problema em questão.

Na Questão 02 desejamos analisar como os estudantes compreendiam a variação do coeficiente angular da reta tangente em função da abscissa do ponto A do gráfico de uma função dada utilizando e manipulando o ponto A no software GeoGebra. Outro fato a ser observado diz respeito como os estudantes visualizariam no gráfico que no intervalo em que a função é crescente o coeficiente angular da reta tangente vai decrescendo e o no intervalo em que a função é decrescente o coeficiente angular decresce, sendo nulo nos pontos de máximo e mínimo da função, conforme a figura a seguir:

02. Dados a curva C a seguir definida no intervalo $[-1, 6]$ e um ponto A pertencente à curva C, faça um esboço do gráfico que represente a variação do coeficiente angular da reta tangente (m_t) em função da abscissa do ponto A (x_A).

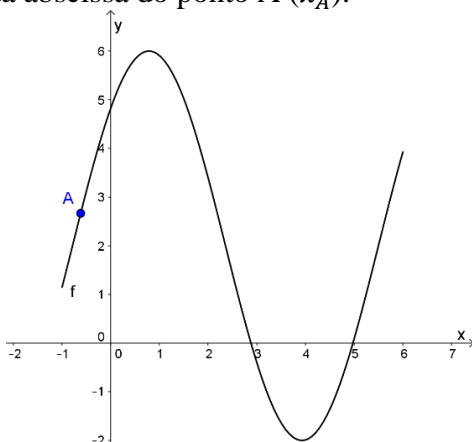


Figura 02 – Questão 02
Fonte – Autor (2017)

Quanto à resolução dessa questão, os estudantes procuraram intuir como variava o coeficiente angular da reta tangente em função da abscissa do ponto A, tanto nos trechos crescentes, decrescentes, quanto nos pontos de máximo e mínimo, conforme a resolução a seguir:

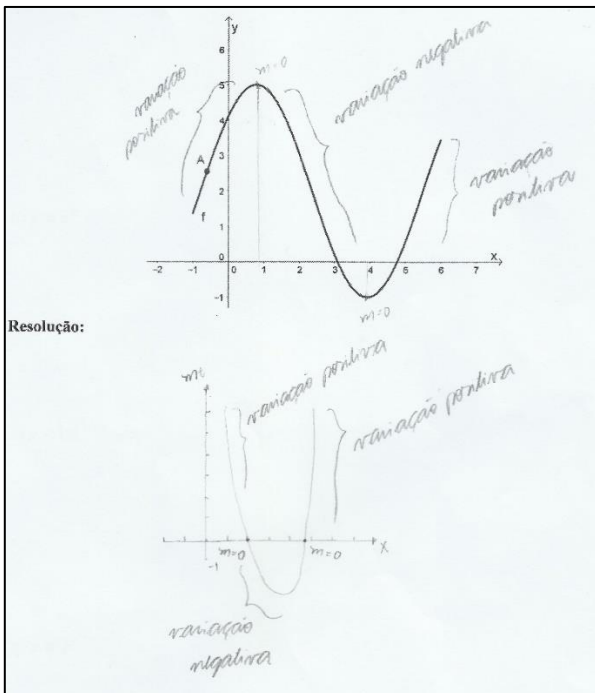


Figura 03 – Resolução da Questão 02
Fonte – Autor (2017)

Para responder à Questão 03, permitiu-se construir as funções solicitadas no GeoGebra bem como inserir um ponto sobre o gráfico das funções (comando: ponto sobre objeto) e a seguir a construção da reta tangente (comando: reta tangente) e manipular de modo dinâmico para se intuir e conjecturar a variação do coeficiente angular da reta tangente, conforme a figura a seguir:

03. Sejam as funções de variável real definidas a seguir. Esboce o gráfico que represente a variação do coeficiente angular da reta tangente (m_t) em função da abscissa do ponto A (x_A).

a) $f(x) = 2x - 4$ b) $f(x) = x^2 - x$ c) $f(x) = \text{sen } x$ d) $f(x) = |x|$
 e) $f(x) = 2^x$

Figura 04 – Questão 03
Fonte – Autor (2017)

Para essa questão, além de analisar como os alunos observam o que ocorre com o crescimento e o decrescimento do gráfico, procurou-se avaliar como os alunos tratam da função $f(x) = |x|$ em que a mesma não é derivável no ponto $x = 0$.

Um dos estudantes comentou que nesse ponto não era possível traçar a reta tangente, visto que o GeoGebra não define a reta tangente nesse ponto, pois a mesma não aparece na tela ao passar por esse ponto.

A seguir, mostrou-se aos participantes no GeoGebra que a partir de uma função é possível construir outro gráfico, derivado do primeiro, que relaciona a variação do coeficiente angular da reta tangente em função da abscissa do ponto.

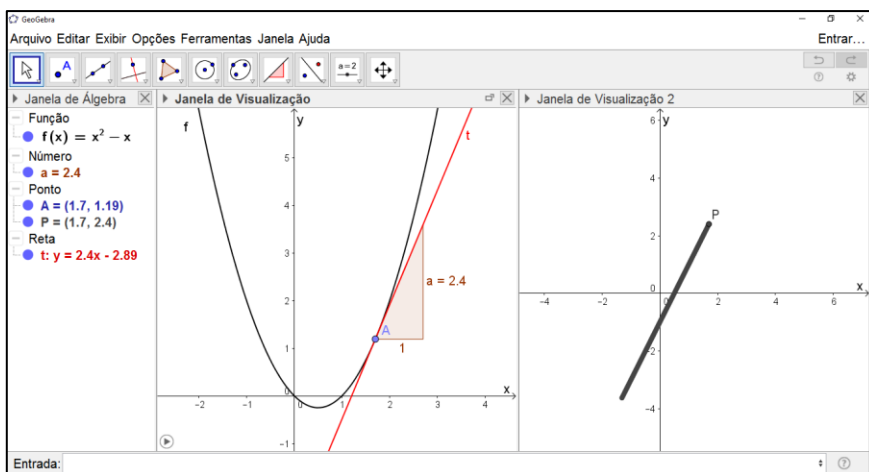


Figura 04 – Questão 03

Fonte – Autor (2017)

Destacamos que todas as conjecturas e hipóteses levantadas pelos alunos sobre o traçado da reta tangente, a variação do coeficiente angular da reta tangente relacionando com o conceito de derivada bem como possíveis pontos do gráfico onde a função não é derivável foram discutidas e formalizadas posteriormente durante as aulas de Cálculo.

Considerações Finais

Ressaltamos que a utilização do software GeoGebra permitiu aos estudantes uma visualização de maneira interativa e dinâmica da variação do coeficiente angular da reta tangente em um ponto do gráfico em função da abscissa desse ponto.

Nesse aspecto, a contribuição do GeoGebra é muito significativa, pois alguns conceitos do Cálculo como a derivada de uma função podem ser analisados de maneira dinâmica e não estática, e o software permite aos alunos observar essa variação de maneira dinâmica possibilitando explorar alguns significados.

Percebemos que a visão sobre as noções a respeito do conceito de derivada de uma função por meio da visualização de sua interpretação geométrica foi ampliada, pois os estudantes

passaram a perceber que a derivada de uma função não se resume a fórmulas e procedimentos algébricos memorizáveis.

Por meio dessa intervenção desejou-se não somente aquilatar as concepções dos alunos sobre o traçado da reta tangente como introduzir o conceito da derivada de uma função, procurando mostrar aos mesmos que a derivada de uma função é uma função e possui um gráfico associado ao mesmo e qual a relação entre essas duas funções.

Gostaríamos de ressaltar que essa intervenção de ensino permitiu fazer com que os estudantes participassem de maneira ativa na construção do conhecimento matemático, por meio da elaboração de conjecturas além de testar hipóteses.

Como sugestão, poderíamos solicitar, a partir do gráfico construído, que os estudantes elaborassem o gráfico da função primitiva, o que faria emergir o conceito de integral de uma função, mas deixaremos essa atividade para uma próxima oportunidade.

Referências Bibliográficas

Courant, R. John, F. (2001). *Introducción Al Cálculo y Al Análisis Matemático Vol. 1*. México: Limusa Noriega Editores.

Grande, A. L. (2013). *Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao seu ensino*. Tese de Doutorado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Tall, D. (2002). *Using Technology to Support and Embodied Approach to Learning Concepts in Mathematics*. In: *Primeiro Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática na Universidade do Estado do Rio de Janeiro*. Rio de Janeiro – Brasil.