CB-39

UNA EXPRESIÓN IRRACIONAL QUE GENERA NÚMEROS PRIMOS

Saulo Mosquera López – Oscar Fernando Soto Ágreda
samolo@udenar.edu.co – fsoto@udenar.edu.co
Universidad de Nariño – Colombia – Universidad de Nariño - Colombia

Núcleo temático: Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos.
Modalidad: CB.
Nivel educativo: Educación de adultos.
Palabras clave: Números primos, algoritmos, competencias, estándares.

Resumen

Es un resultado conocido que no existe un polinomio que genere todos los números primos, sin embargo con la integración de las tecnologías computacionales en el aula de clase, en el marco de la asignatura Teoría de Números en el cuarto semestre del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Nariño, se desarrollaron, a través del trabajo colaborativo, una serie de actividades, indagaciones, experimentos y conjeturas que plantearon inquietudes cognitivas frente a un problema "imposible de resolver" cuál es el de "Construir una fórmula algebraica simple que genere todos los números primos". En esta presentación se sintetizan los esfuerzos realizados en esta dirección, cuyos resultados se pueden resumir en obtener una expresión, que involucra una raíz de segundo grado de una expresión lineal, que efectivamente genera tal clase de números, su implementación en el sistema de cálculo simbólico MAPLE y el análisis teórico de la fórmula.

1. Introducción

En la formación de un Licenciado en Matemáticas es indispensable un curso en Teoría de Números en el cual se presenten los elementos básicos de esta área de las Matemáticas que le permitan orientar y potenciar, en el ejercicio de su labor, algunos de los procesos generales de la actividad matemática, en particular, la formulación, tratamiento y resolución de problemas y el razonamiento (Estándares básicos de Competencias, Ministerio de Educación Nacional, 2006).

De otro lado, la utilización de la TIC en Educación Matemática, en particular en matemáticas, proporciona elementos para la reflexión, el análisis y la práctica que permiten

ISBN 978-84-945722-3-4

buscar alternativas las cuales posibiliten superar las dificultades en el aula. En particular, el uso de un CAS (Computer Algebra System, por sus siglas en inglés) posibilita:

- Reducir el tiempo y la atención dedicada al desarrollo de las habilidades de cálculo permitiendo realizar mayor énfasis en la asimilación de los procesos y en la comprensión de los conceptos.
- Utilizar el sistema como elemento de motivación, puesto que relega al computador los cálculos, posibilita la concentración en el análisis y planteamiento del problema, facilitando la realización de experimentación matemática, verificando conjeturas y proponiendo otras con base en los resultados.

En la perspectiva de conjugar en la clase de matemáticas tanto los aspectos teóricos como experimentales en él quehacer docente, en el programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Nariño, se ha intentado proporcionar, técnicas y teorías, que permitan, a los futuros docentes, apropiarse de algunos elementos teóricos y computacionales, que potencien determinados Estándares Básicos de Competencias y en consecuencia, el propósito de la comunicación es, presentar algunos de los resultados de esta labor.

2. Referentes Teórico – Prácticos Básicos

Aunque en los Estándares Básicos de Competencias (Ministerio de Educación Nacional, 2006) o en los Lineamientos Curriculares no se vislumbra con claridad el papel que podría desempeñar el estudio de los números primos y sus propiedades en el desarrollo del pensamiento numérico en la enseñanza básica y media es un hecho innegable que el estudio de la Teoría de números proporciona elementos básicos, que permiten en el aula de clase: Reconocer patrones, conjeturar, experimentar, generalizar, entre otros.

Complementariamente (Bailey & Borwein, 2001) validan "la utilización de la tecnología computacional…con el propósito de explorar la estructuras matemáticas, de examinar conjeturas…" (p. 123), lo cual confirma lo expresado anteriormente es por ello que, el

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

trabajo experimental complementado con la fundamentación teórica proporcionan el marco conceptual alrededor del cual se desarrolla esta propuesta.

3. Descripción general de la experiencia de aula

El propósito fundamental de la actividad era proponer situaciones que generaran, a través del trabajo colaborativo, ambientes de aprendizaje que plantearan inquietudes cognitivas frente a un problema "imposible resolver" cuál es el de: *"Construir una fórmula algebraica simple que genere todos números primos"* para ello se propusieron temas a tratar como: El concepto de número primo y algunas de sus propiedades, clases especiales de números primos (Fermat, Merssene), análisis de expresiones conocidas que generan algunos números primos y, finalmente, propuesta y análisis computacional y teórico de la fórmula.

El concepto de número primo y algunas de sus propiedades. En este apartado se trataron temas, esencialmente orientados por el docente, tales como:

El Teorema Fundamental de la Aritmética. Todo número entero mayor que uno, es primo o se puede expresar de manera única como producto de números primos, (Jiménez, R., Gordillo, E. & Rubiano, G. 2004).

La infinitud de los números primos. Aquí se trató la demostración de este resultado dada por Euclides.

El Teorema de Dirichlet. Si a y b son enteros positivos y $M.C.D(a,b)=1$ entonces existen infinitos números primos de la forma $an+b$, (Jiménez, et al. 2004).

Clases especiales de números primos. Existen muchas clases especiales de números primos, por ejemplo: Los Números primos de Prierpont, que son de la forma 2^a3^b+1, los Números primos de Proht, que son de la forma $k2^n+1$, los Números primos de Cullen, que son de la forma $n2^n+1$, sin embargo únicamente se trataron los números primos que, históricamente, han tenido mayor relevancia: Los Números primos de Merssene y los Números primos de Fermat.

ISBN 978-84-945722-3-4

Los números primos de Mersenne. Son todos los números primos de la forma $2^n - 1$.
Bajo el desarrollo del proyecto GIMPS, el Dr. Curtis Cooper de la Universidad de Missouri descubrió el 7 de enero del 2016, el mayor número primo conocido hasta el momento, este es el primo de Mersenne $2^{74207281} - 1$ el cual posee 22.338.618 dígitos.
Los números primos de Fermat. Son todos los números primos de la forma $2^{2^n} + 1$,

Fermat conjeturó que todos estos números eran números primos, sin embargo, en 1732, Euler demostró $2^{2^5} + 1$ es compuesto puesto que $2^{2^5} + 1 = 641 * 6700417$

Algunas fórmulas Polinomiales que generan números Primos. En esta sección se desarrolló una parte complementaria del trabajo, que consistió en la búsqueda de polinomios que generaran números primos y se trató el siguiente resultado fundamental:

Teorema: *No existe un Polinomio que genere todos los números primos,* (Ribenboim, P. 1987).

Entre los polinomios que se presentaron se tienen, por ejemplo, los siguientes:

El Polinomio de Euler $F(n) = n^2 - n + 41$, el cual genera primos para $n = 1,2,\ldots,40$ y para $n = 41$, se tiene que $F(41) = 41^2$.
El Polinomio de Legendre $F(n) = n^2 + n + 17$, el cual genera primos para $n = 1,2,\ldots,15$ y para $n = 16$, se tiene que $F(16) = 17^2$.

El Polinomio de J. Brox (2006) $F(n) = 6n^2 - 342n + 4903$, el cual genera primos para $n = 0,2,\ldots,57$ pero para $n = 58$, se tiene que $F(58) = 59 * 89$.

La fórmula propuesta y su análisis. En este apartado se realizó la parte experimental que consistió en tomar como referencia la parte teórica expuesta y proponer diversas expresiones algebraicas que posibilitarán la generación de números primos. En este sentido y a pesar de conocer la imposibilidad de que la expresión buscada fuera un polinomio, los primeros intentos presentados fueron de este tipo.

Después de realizar las orientaciones correspondientes y de resaltar la importancia que en esta tarea podría tener el *Teorema de Dirichlet* se propusieron diferentes expresiones las

ISBN 978-84-945722-3-4

cuales, en general, fueron invalidadas utilizando el CAS, MAPLE, hasta conciliar con la "mejor" expresión considerada $F(n) = \sqrt{24n+1}$.

Esta expresión, para diferentes valores naturales de n, genera en ocasiones números "decimales", pero lo importante es que genera todos los números primos a partir del 5. Por ejemplo, los primeros diez números primos, es decir, $5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37$ se generan para $n = 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 35, 40, 57$.

Adicionalmente se elaboró un código en MAPLE que permite experimentar con expresiones algebraicas de la forma $F(n) = \sqrt{an+b}$ en la cual $M.C.D.(a,b) = 1$ para verificar para que valores de n se producen números primos.

A continuación presentamos la demostración de que la expresión $F(n) = \sqrt{24n+1}$ efectivamente genera números primos. La prueba consiste básicamente en demostrar que con la fórmula no es posible generar números pares, ni múltiplos de tres, pero si todos los números enteros positivos impares que no son múltiplos de tres.

Teorema: *La expresión* $F(n) = \sqrt{24n+1}$ *genera infinitos números primos,*

Demostración:

a. La expresión $F(n) = \sqrt{24n+1}$ no genera números pares ya que si $\sqrt{24n+1} = 2k$ entonces $24n+1 = 4k^2$ lo cual no puede ser.

b. La expresión $F(n) = \sqrt{24n+1}$ no genera múltiplos de tres ya que si $\sqrt{24n+1} = 3k$ entonces $24n+1 = 9k^2$ lo que significa que $24n = (3k-1)(3k+1)$ y por tanto 3 divide a $3k-1$ o a $3k+1$ lo cual no es posible.

c. Todo entero positivo impar que no es múltiplo de 3 puede expresarse en la forma $\sqrt{24n+1}$.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Consideremos en primer lugar los números de la forma $x = 2t + 1$ entonces $x^2 = 4t(t+1)+1$ y puesto que t y $t+1$ son enteros consecutivos, uno de ellos debe ser par, por tanto $x^2 = 8m+1$, es decir 8 divide a $x^2 - 1$.

Consideramos ahora los números de la forma $x = 3t \pm 1$ es decir $x^2 = 9t^2 \pm 6t + 1$ o equivalentemente $x^2 - 1 = 3(3t^2 \pm 2t)$, es decir 3 divide a $x^2 - 1$.

En resumen, 3 y 8 dividen a $x^2 - 1$ y puesto que $M.C.D(3,8) = 1$ entonces 24 divide a $x^2 - 1$, por tanto x es de la forma $\sqrt{24n+1}$ y consecuentemente la expresión $F(n) = \sqrt{24n+1}$ genera infinitos números primos

4. **Reflexión final.** La actividad realizada, en cuánto a búsqueda de la formula mencionada, fue enriquecedora pues permitió generar nuevos conocimientos y fomentar el trabajo en grupo. Las diversas ideas que cada grupo generó y que fueron compartidas con sus compañeros, generó un ambiente de trabajo propicio para "*hacer matemáticas*", ya que alrededor de esta propuesta surgió una diversidad de conceptos y procedimientos que algunos de ellos aplican para llegar a resolver una situación dada.

Por último, es necesario considerar la importancia de la gestión del docente en el aula de clase en la búsqueda de actividades que generen ambientes de aprendizaje y en las cuales los estudiantes exploren, interpreten, argumenten, propongan alternativas y cuestionen la práctica educativa, sin embargo, es necesario realizar un equilibrio de ellas ya que es posible enfatizar demasiado en estas y no complementar los temas establecidos para la asignatura.

Referencias Bibliográficas

Bailey, D. & Borwein, J. (2001). Experimental Mathematics: Recent development and future outlook. En B. Engquist y W. Schmid (Eds.), *Mathematics unlimited 2001 and beyond*. New York: Springer-Verlag.

Great Internet Mersenne Prime Search, GIMPS. (2016). Largest Known Prime, 49th Known Mersenne Prime Found!!. https://www.mersenne.org/ Consultado 15/01/2017

ISBN 978-84-945722-3-4

Jiménez, R., Gordillo, E. & Rubiano, G. (2004). *Teoría de Números, para principiantes*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá: Imprenta Nacional de Colombia. Disponible en Internet en: http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf. Consultado 25/07/2016.

Ribenboim, P. (1987). El famoso polinomio generador de primos de Euler y el número de clase de los cuerpos cuadráticos imaginarios. *Revista Colombiana de Matemáticas*. 21 (2-4). 263-284.

ISBN 978-84-945722-3-4