CB-74

UN HECHO DIDÁCTICO COGNITIVO MATEMÁTICO EN RELACIÓN AL CONCEPTO DE LÍMITE

José Abel Semitiel
semitiel@fceia.unr.edu.ar
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario, Argentina

Núcleo temático: Investigación en Educación Matemática
Modalidad: CB
Nivel educativo: Terciario o Bachillerato
Palabras clave: dificultades, hecho didáctico, límite de una función, fenómeno didáctico

Resumen

En los últimos años, la enseñanza de los principios fundamentales del Análisis Matemático es cada vez más problemática y las dificultades que se presentan en su aprendizaje son de diversa índole y se superponen y refuerzan mutuamente en redes muy complejas. Las dificultades en el aprendizaje del Análisis Matemático pueden ser reagrupadas en grandes categorías, y una de ellas son las relacionadas con la conceptualización y a la formalización de la noción de límite, centro del campo del Análisis Matemático.

En este artículo se presenta un hecho didáctico cognitivo matemático que pude observar durante el proceso de estudio de la noción de límite de una función en un punto a partir de la respuesta de un estudiante de Cálculo I de la carrera de Ingeniería Electrónica de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario (Argentina).

Introducción

A partir de la reforma de 1902 y con la introducción del Análisis Matemático en el liceo en Francia, pasando por la renovación de los años 60 hasta la contrarreforma de los años 80, la enseñanza de las nociones fundamentales del Análisis Matemático ha cambiado drásticamente su aspecto con el paso del tiempo.

La enseñanza del Análisis Matemático se concibe de múltiples formas según se trate de épocas, niveles educativos, sistemas escolares, o inclusive de regiones y países. La noción de límite de una función real en un punto es una de las más importantes del Cálculo como también una de las más complejas de abordar.

Es sabido que al iniciarse la enseñanza del Cálculo se presentan dificultades de diferente naturaleza. En primer lugar aparecen las provocadas por los esfuerzos para superar los

ISBN 978-84-945722-3-4

modos de pensamiento numérico y algebraico. Luego, las relacionadas con la conceptualización y formalización del concepto de límite.

Distintas investigaciones desarrolladas en los últimos años en el área de la Didáctica del Análisis, han promovido estrategias en los procesos de estudio que permiten remediar las dificultades y obstáculos encontrados en los estudiantes.

En este trabajo se presenta un hecho didáctico cognitivo matemático en relación al concepto de límite de una función en un punto, que ocurrió durante el proceso de estudio de tal noción en el aula universitaria de Cálculo I de Ingeniería Electrónica (2° semestre, año 2015) de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (FCEIA) de la Universidad Nacional de Rosario (UNR), Argentina.

El hecho didáctico cognitivo matemático fue observado a partir de la respuesta de un alumno a una actividad que tenía como objetivo principal el de formalizar, y por lo tanto construir, la noción de límite de una función real en un punto.

Este artículo está organizado en cuatro secciones.

La primera de ellas, es la presente *Introducción*. La segunda sección es un *Marco teórico-conceptual* donde, a partir del pensamiento de distintos autores, se fundamentan las ideas del presente artículo. En la tercera de ellas, denominada *El proceso de estudio y el hecho didáctico cognitivo matemático*, se muestra la secuencia didáctica seguida con la intención de formalizar el concepto de límite de una función en un punto y además, se presenta el hecho didáctico cognitivo matemático obtenido ante la respuesta de un alumno a una actividad propuesta. Por último, se presentan algunos *Comentarios finales* en relación al hecho didáctico cognitivo obtenido, y partir de éste formulo tres preguntas de investigación. que mediante un marco teórico adecuado podré transformarlo en un fenómeno didáctico cognitivo matemático.

Marco teórico-conceptual

Un proceso de estudio matemático es todo proceso de enseñanza, aprendizaje y evaluación de contenidos matemáticos específicos organizados en el seno de sistemas didácticos. Según Wilhelmi, Font y Godino "*un proceso de estudio son las secuencias temporalmente ordenadas de acontecimientos de manera que cada miembro de la secuencia toma parte en la determinación del siguiente.*" (Como se cita en Alderete y Porcar, 2007, p. 102).

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

El proceso de estudio de nociones fundamentales del Análisis Matemático, trae aparejado diferentes dificultades. M. Artigue (1995) indica que:

> Es evidente que la enseñanza de los principios del cálculo es una problemática. Numerosas investigaciones realizadas muestran, con convergencias sorprendentes, que si bien se puede enseñar a los estudiantes a realizar de forma más o menos mecánica algunos cálculos de derivadas y primitivas y a resolver algunos problemas estándar, se encuentran grandes dificultades para hacerlos entrar en verdad en el campo del cálculo y para hacerlos alcanzar una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento que son el centro de este campo de las matemáticas. (p. 97)

Un hecho didáctico cognitivo matemático es según Wilhelmi, M., V. Font y J. Godino (2005) cualquier acontecimiento que tiene un lugar y un tiempo durante los procesos de estudio de la Matemática en el aula. Ejemplo: durante el proceso de estudio un alumno identifica en la pizarra (o el cuaderno) la gráfica de una función real. Si un hecho didáctico cognitivo matemático es interpretado mediante una teoría adecuada se transforma en un fenómeno didáctico cognitivo matemático (Wilhelmi, M., V. Font y J. Godino, 2005, p.2).

De acuerdo a R. Cantoral (2005) respecto a las concepciones de la enseñanza del Análisis Matemático, éstas han cambiado su aspecto con el paso del tiempo, suelen modificarse también de un ciclo escolar a otro y transformarse según el sistema educativo que le cobije. Sin embargo, es posible identificar elementos comunes en su enseñanza y la estructura temática de los primeros cursos de Análisis suelen tener los mismos aspectos (Cantoral, 2005, p. 206).

A pesar de las diferentes concepciones de enseñanza del Análisis Matemático, R. Cantoral (2005) sostiene que todas giran en torno a las nociones de límite y función:

> A causa de que la enseñanza del Cálculo, en cualquiera de las tres vertientes descritas, se apoya en el programa de Cauchy para la fundamentación del análisis matemático, sus acercamientos se vertebran sobre dos conceptos centrales: el concepto de límite y la noción de función. En torno de ellos, se entreteje el resto del cuerpo teórico. (p. 208)

Con respecto a las dificultades en el aprendizaje del Análisis Matemático, M. Artigue (1995) indica que pueden ser reagrupadas en tres grandes categorías:

ISBN 978-84-945722-3-4

- Aquellas asociadas con la complejidad de los objetos básicos del Análisis Matemático (números reales, sucesiones, funciones) y al hecho de que estos objetos se conceptualizan plenamente cuando se inicia una enseñanza del análisis que va a contribuir de forma fuerte a tal conceptualización;
- Aquellas relacionadas con la conceptualización y a la formalización de la noción de límite, centro del campo del Análisis Matemático;
- Aquellas vinculadas con las rupturas necesarias en relación con los modos de pensamiento puramente algebraico, muy familiares, y con las especialidades del trabajo técnico en el Análisis Matemático. (p. 107)

La noción de límite de una función en un punto es uno de los conceptos más controvertidos en cuanto a su comprensión. Además, su enseñanza, siempre ha representado una fuente de problemas didácticos que es muy difícil de resolver. Al mismo tiempo, es una de las nociones fundamentales del Análisis Matemático y permite ser la base de la construcción del cálculo diferencial y del cálculo integral.

Al realizar ciertas actividades didácticas en el aula los alumnos ponen en juego competencias y estrategias de distintos tipos. La interpretación cognitiva matemática incluye la habilidad que se tiene para identificar y comprender las ideas fundamentales en una comunicación matemática, un mensaje matemático, una gráfica o diagrama matemático, un dibujo, para comprender las relaciones existentes entre estas ideas. La generalización en matemática es una competencia metacognitiva; es abstraer una característica común y esencial observada en un número limitado de casos para formar un concepto general que las comprenda todas. La comunicación es una competencia para interpretar y representar las relaciones que se establecen en los distintos marcos en los cuales haya trabajado y con los distintos registros posibles.

El proceso de estudio y el hecho didáctico cognitivo matemático

Cálculo I es una asignatura del primer semestre del ciclo básico de la FCEIA-UNR, Argentina. En este curso se desarrollan nociones fundamentales del Cálculo en una variable: funciones y sus gráficas, límite y continuidad y cálculo diferencial.

A lo largo de mi carrera docente he podido evidenciar dificultades que tienen los estudiantes en procesos de estudio relacionados con la construcción del concepto de límite.

Estas dificultades no son ajenas a los estudiantes de Cálculo I de la carrera de Ingeniería Electrónica de la FCEIA-UNR del primer semestre del año lectivo 2016.

A continuación presento la secuencia didáctica llevada a cabo en una comisión de 50 estudiantes de la carrera mencionada. Luego de haber trabajado, por aproximadamente cuatro semanas de clases, las funciones reales y sus gráficas, se desarrollaron actividades con la intención didáctica de construir el concepto de límite de una función en un punto, partiendo de la construcción de una definición más informal e intuitiva de dicha noción. Estas actividades fueron llevadas a cabo en una clase de 3 horas reloj. Los alumnos trabajaron grupalmente, en forma escrita y oral, compartiendo con los diferentes grupos las respuestas a las consignas.

Para lograr una primera aproximación al concepto de límite les planteé la función:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ tal que } f(x)=\begin{cases} 2x-1 & \text{si } x\neq 3 \\ 6 & \text{si } x=3 \end{cases}$$

y que esbocen su gráfica cartesiana.

Observando la gráfica de la función, les solicité que respondieran a la siguiente consigna: *¿puede decir a qué valor se "aproxima"* f *cuando* x *se "acerca" al valor* $x_0=3$*?*

Esta pregunta generó un primer obstáculo en el proceso de estudio. Algunos alumnos no interpretaron la consigna respondiendo que f se aproxima a 6 cuando x se acerca al valor $x_0=3$. Sin embargo, al hacer hincapié en las palabras "aproxima" y "acerca", y preguntándoles: *¿cuál es valor de la función* f *en* $x_0=3$*?, ¿coincide éste con el valor con que se aproxima* f *cuando* x *está cerca de* $x_0=3$*?,* la mayoría pudo responder correctamente, justificándose a partir de la gráfica cartesiana de la función. Además permitieron que los alumnos que al principio habían respondido incorrectamente pudieron identificar la diferencia entre el valor $f(3)$ con el valor al que se aproxima f cuando x está cerca de $x_0=3$.

Asegurándome de que se había comprendido la diferencia indicada anteriormente, llegamos a una primera conclusión: *Para estudiar a qué valor se aproxima una función* f *cuando* x *está cerca del valor* x_0*, no estamos interesados en saber el valor de* f *en* x_0*; es más la*

ISBN 978-84-945722-3-4

función f *podría no estar definida en* x_0. *Lo que sí es importante es que la función esté definida "alrededor" de* x_0.

Las actividades anteriores permitieron establecer un acercamiento intuitivo a la noción de límite de una función real en un punto mediante la observación de su gráfica cartesiana y construir una primera definición (informal) de límite de una función en un punto: *Sea* f *una función definida "alrededor"* x_0. *La función* f *tiene por límite el número* L *cuando* x *tiende a* x_0 *si* f *se aproxima al número* L *cuando* x *se acerca al valor* x_0 *pero* $x \neq x_0$. *Notamos* $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$.

Con esta notación, y en base a nuestro ejemplo, quedó bien identificado que $f(3) = 6$ y que $\lim_{x \to 3} f(x) = 5$.

Sin embargo, se requería formalizar dicha noción, pues frases como "estar cerca de", "aproximarse a", "alrededor de", son muy útiles para una primera aproximación al concepto de límite pero no son adecuadas para algunos fines.

Es por ello, que para obtener una información más detallada acerca de cómo se aproxima la función f al número $L = 5$ cuando x se acerca al valor $x_0 = 3$ pero con valores de $x \neq 3$, es decir que $\lim_{x \to 3} f(x) = 5$, les propuse la siguiente actividad: *¿cuán cerca de* $x_0 = 3$ *debe estar* x, *con valores de* $x \neq 3$, *para que* f *se aproxime a* $L = 5$ *con un error menor de* 0.1 *?*

Con esta pregunta el proceso de estudio se vio interrumpido nuevamente. Noté que los alumnos no identificaron que se estaba aludiendo al concepto de distancia entre dos números reales, la cual a su vez, está relacionada con la noción de valor absoluto de un número real. Por esta razón, les hice notar que el problema consistía en: *encontrar a qué distancia debe encontrarse* x *de* $x_0 = 3$ *de manera que la distancia entre* $f(x)$ *y* $L = 5$ *sea menor a* 0.1.

Otra dificultad que observé es que no podían expresar por escrito el problema simbólicamente, es decir, no interpretaron que el problema aludía a encontrar un número positivo δ tal que verifique que:

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

$$\left| f(x)-5 \right| < 0.1 \text{ si } 0 < \left| x-3 \right| < \delta. \qquad (1)$$

Con mi intervención, lograron expresar el problema de la forma (1) y sin mayores dificultades la gran mayoría pudo notar que:

$$\left| f(x)-5 \right| = \left| (2x-1)-5 \right| = \left| 2x-6 \right| = 2\left| x-3 \right| < 0.1 \text{ si } 0 < \left| x-3 \right| < \frac{0.1}{2} = 0.05,$$

indicando que el número buscado es $\delta = 0.05$. A partir de este resultado, les pregunté: *¿cuál es el valor de* δ *si en lugar de tolerar un error de* 0.1*, cambiamos y tomamos uno más pequeño como por ejemplo* 0.01*?*

Teniendo en cuenta lo que habían realizado en la actividad anterior, notaron rápidamente que en este caso buscaban un número positivo δ tal que:

$$\left| f(x)-5 \right| < 0.01 \text{ si } 0 < \left| x-3 \right| < \delta,$$

donde sin mayores dificultades, obtuvieron $\delta = 0.0005$. Con el fin de construir la definición formal de límite de una función real en un punto, le solicité a un alumno, elegido al azar, que comunicara en la pizarra la respuesta a la siguiente consigna: *Si en lugar de tolerar un error de* 0.1 *ó de* 0.01 *como en las actividades anteriores, deseamos que la exactitud quede dentro de una tolerancia un número positivo arbitrario (infinitamente pequeño)* ε*, ¿cuán cerca debe estar* x *de* $x_0 = 3$*?*

Con esta actividad pretendía generalizar (para formalizar) lo que se había realizado en las actividades propuestas anteriormente. Debía comunicar la respuesta en forma escrita después de haber interpretado que fijado un número positivo arbitrariamente pequeño ε, buscaba un número real positivo δ tal que verifique:

$$\left| f(x)-5 \right| < \varepsilon \text{ si } 0 < \left| x-3 \right| < \delta.$$

El alumno pasó a la pizarra y escribió:

$$\left| f(x)-5 \right| = \left| (2x-1)-5 \right| = \left| 2x-6 \right| = 2\left| x-3 \right| < \varepsilon \textit{ siempre y cuando } 0 < \left| x-3 \right| < \delta$$

$$\therefore\ \delta = \frac{1}{2}.$$

Esta respuesta del alumno fue el hecho didáctico cognitivo matemático que observé durante el proceso de estudio destinado a gestionar el tema límite de una función real en un punto, dentro del campo conceptual del Análisis Matemático escolar.

ISBN 978-84-945722-3-4

Comentarios finales

La enseñanza del Cálculo constituye uno de los mayores desafíos de la educación actual, ya que su aprendizaje trae aparejado numerosas dificultades en las que se encuentran implicados, entre otros, procesos como la interpretación, abstracción, generalización y la comunicación (expresión oral, escrita, etc.).

Durante el proceso de estudio de la noción de límite de una función en un punto, pude observar las dificultades mencionadas en los estudiantes de Cálculo I de la carrera de Ingeniería Electrónica de la FCEIA, UNR.

En particular, el hecho didáctico cognitivo matemático observado a partir de la respuesta (incorrecta) de un alumno, está relacionado con las dificultades descriptas (más particularmente relacionada con las dificultades de comunicación simbólica por escrito). Esta respuesta me permite formular las siguientes preguntas: El estudiante, *¿interpretó* que el problema aludía a encontrar un número positivo δ tal que verifique que $|f(x)-5|<\varepsilon$ si $0<|x-3|<\delta$, para cualquier número positivo ε?; *¿generalizó* lo que había realizado en las actividades didácticas anteriores?; *¿comunicó (expresó)* simbólicamente por escrito, de manera correcta, la respuesta solicitada en la última actividad?

Como trabajo a futuro, mi propuesta es responder dichas preguntas de investigación mediante un marco teórico adecuado y obtener así un fenómeno didáctico cognitivo matemático. A partir del mismo podría realizar una investigación fenomenológica, con la metodología y el método de un estudio de caso único, con una única unidad de observación: un alumno.

Referencias bibliográficas

Alderete, M. y Porcar, M. (2007). *Temas de Didáctica de la Matemática*. Mendoza: UNCuyo.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (Eds). *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas* (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

ISBN 978-84-945722-3-4

Cantoral, R. (2005). Pensamiento matemático avanzado: una revisión de los enfoques a la investigación sobre didáctica del análisis. En R. Cantoral, R. Farfán, F. Cordero, J. Alanís, R. Rodríguez y A. Garza (Eds). *Desarrollo del pensamiento matemático* (pp. 205-218). México: Editorial Trillas.

Wilhelmi, M., V. Font y J. Godino (del 25 al 27 de Mayo de 2005). Bases Empíricas de Modelos Teóricos en Didáctica de las Matemáticas: Reflexiones sobre la Teoría de Situaciones Didácticas y el Enfoque Ontológico y Semiótico. En Association Francophone Internationale de Recherche Scientifique en Education (AFIRSE), *Didactiques : quelles references epistemologiques?*. Coloquio Internacional llevado a cabo en el IUFM d'Aquitaine, Bordeaux, France.

ISBN 978-84-945722-3-4