

Dificultades, conflictos, errores y obstáculos epistemológicos en la identificación visual del resto de la división con números decimales

Ana Belén Cabello Pardos
M^a Isabel Rodríguez Cartagena
Martín M. Garbayo Moreno
Mercedes Hidalgo Herrero
*Facultad de Educación Universidad
Complutense de Madrid*

Resumen: *En este trabajo se muestra que la identificación visual del resto de la división de números decimales, como si se tratase de una división de números naturales, constituye un obstáculo epistemológico. La investigación se ha realizado con una muestra de 151 alumnos de Secundaria y Bachillerato en la Comunidad de Madrid. En primer lugar se han analizado las dificultades, errores y conflictos que manifiestan los alumnos en la tarea de identificación del resto y en la realización de la prueba de la división. A partir de dicho análisis, se han verificado las características que definen el obstáculo epistemológico. Finalmente, se realiza una propuesta metodológica para franquear el obstáculo basada en imágenes conceptuales correctas.*

Palabras clave: *dificultad, error, conflicto, obstáculo epistemológico, resto de la división, número decimal.*

Difficulties, conflicts, errors and epistemological obstacles in the visual identification of the remainder of the division with decimal numbers

Abstract: *In this paper we show that visual identification of the remainder in the division of decimal numbers, as if it were a division of natural numbers, is an epistemological*

obstacle. The research was conducted with a sample of 151 students from 7th to 12th degree in the Community of Madrid. First we have analyzed the difficulties, errors and conflicts showed by students in the task of identifying the remainder and in checking the proof of division. From this analysis, we have verified the characteristics that define the epistemological obstacle. Finally, a methodological proposal is made to cross the obstacle based on correct conceptual images.

Keywords: *difficulty, error, conflict, epistemological obstacle, remainder of the division, decimal number*

INTRODUCCIÓN

El enfoque de esta investigación es el tratamiento didáctico del error como parte del proceso de construcción del conocimiento (Rico, 1997). En concreto, en este trabajo se muestra el origen del error detectado en la identificación del resto de la división con números decimales, se analiza en detalle la formación del concepto (las dificultades y los conflictos) y se realiza una propuesta metodológica de corrección de dicho error.

Los errores más frecuentes relacionados con los números decimales, su escritura y sus operaciones, han sido ampliamente estudiados y, según Centeno (1988), se pueden clasificar en cuatro grupos:

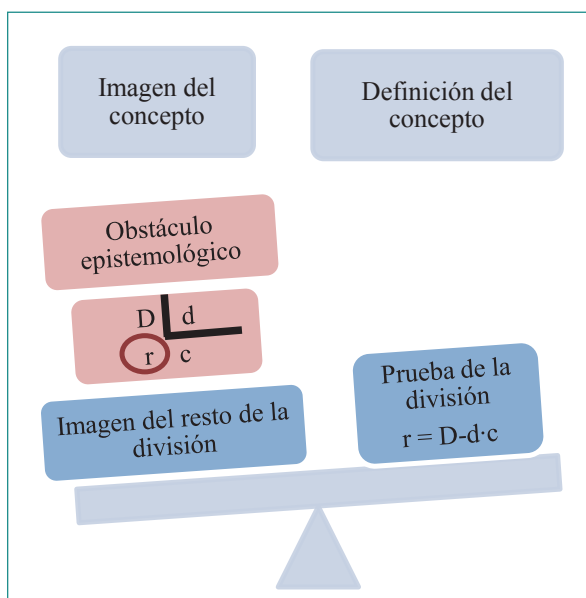
- a) Errores relacionados con la lectura y escritura de los números: valor de posición.
- b) Errores relacionados con el cero.
- c) Errores relacionados con el orden entre decimales.
- d) Errores relacionados con las operaciones.

En este último grupo, no aparece mencionado el resto de la división sino el cociente. Tras el estudio realizado, la presente investigación sobre la formación del concepto “resto de la división con números decimales” supone una aportación novedosa en el ámbito de la Didáctica de los Números Decimales.

La particularidad que tiene la división es que es la única operación aritmética en la que se obtienen dos resultados, cociente y resto, a partir de dos números dados, dividendo y divisor. En el presente trabajo se ha estudiado la comprensión del resto, con un planteamiento descontextualizado, en el caso en el que el dividendo sea un número decimal y el divisor un número natural. El motivo de centrar la investigación en este aspecto es que cualquier división de números decimales se transforma en una división de números naturales o en una división de un número decimal entre un número natural.

Existen estudios que muestran que en las divisiones con números decimales los alumnos tienen dificultades en la identificación del resto de la división (Llinares, 2003; Rojas y Flores, 2010). En la presente investigación se muestra que dicha dificultad se debe a que los alumnos tienen imágenes conceptuales erróneas del resto en la división de un número decimal entre un número natural. Siguiendo el modelo cognitivo imagen del concepto-definición del concepto (Tall y Vinner, 1981; Vinner, 1975, 1983), se puede afirmar que, al realizar la tarea de identificación del resto, se activa solamente la celda de la imagen del concepto y los alumnos responden erróneamente. Este error es la manifestación

Figura 1. Conflicto planteado entre la imagen y la definición del concepto “resto de la división de un número decimal entre uno natural” (Cabello, Rodríguez, Garbayo, e Hidalgo, 2014)



de un obstáculo epistemológico (Brousseau, 1976, 1983, 1989, 2007) de fuerte componente visual, derivado de la división de números naturales. El poder que tiene la imagen errónea es tal que fuerza la prueba de la división, para obtener el resultado deseado cometiendo un error en la suma de números decimales, sin que se produzca una corrección de la imagen del concepto por la definición del mismo. La imagen conceptual y la definición conceptual entran en conflicto (Figura 1).

En este párrafo se han presentado los términos de la investigación, dificultad, conflicto, obstáculo epistemológico y error, que se definen en el epígrafe siguiente.

Con este planteamiento, en la presente investigación se propone corregir el error creando imágenes conceptuales correctas que permitan la explicitación de la resolución del conflicto planteado entre la imagen y la definición del concepto y, por otro lado, entre los dos ámbitos de trabajo (números naturales y números decimales) (Figura 2).

MARCO TEÓRICO

En este epígrafe, se exponen los dos referentes teóricos en los que se basa la investigación y se definen los términos que se utilizan.

Modelo cognitivo imagen del concepto-definición del concepto

El primer referente teórico de esta investigación es el modelo cognitivo imagen del concepto-definición del concepto (Tall y Vinner, 1981; Vinner, 1975, 1983).

Por un lado, se considera el dibujo (*picture*) mental de un concepto, es decir, el conjunto de todos los dibujos, representaciones visuales y símbolos que el alumno ha

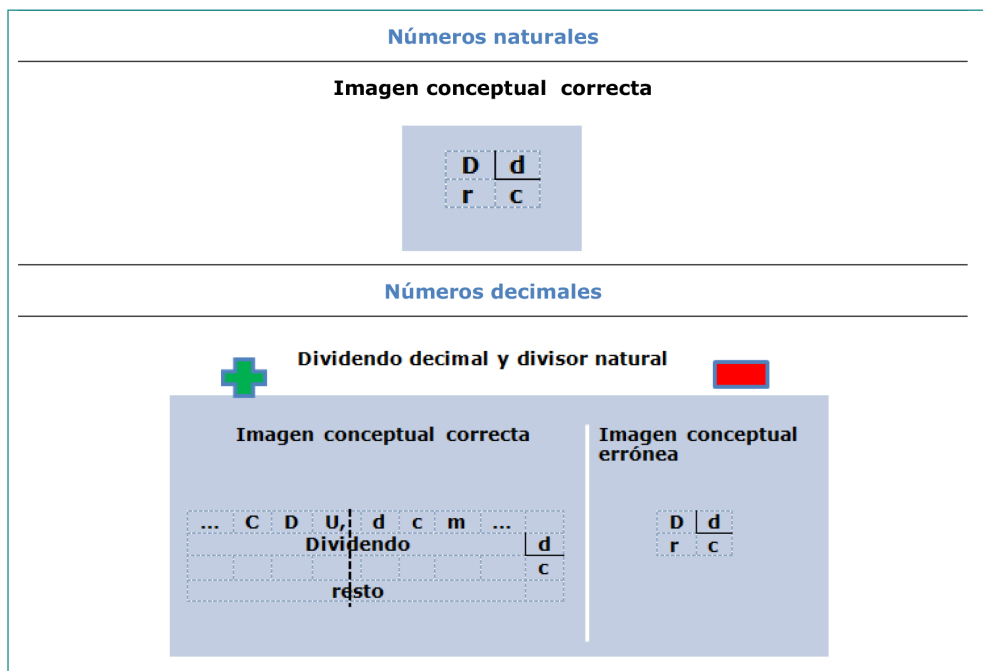


Figura 2. Imágenes conceptuales de la división en el ámbito de los números naturales y en el de los decimales (elaboración propia)

asociado con el concepto en su mente. Por otro lado, se consideran las propiedades y procedimientos que también ha asociado con el concepto.

Con estos elementos se define la imagen del concepto como el dibujo mental junto con dichas propiedades y procedimientos. La definición del concepto es una expresión verbal que lo explica con precisión.

Para cada concepto, se supone la existencia de dos celdas en la estructura cognitiva, una para la imagen y otra para la definición, que pueden interactuar tanto en la formación de conceptos como en la realización de tareas, pudiendo entrar ambas en conflicto.

En el modelo (Vinner, 1983) se analizan las tres modalidades de interacción que implícitamente asume la mayoría de los profesores cuando se realiza una tarea.

La primera modalidad es la interacción definición-imagen-definición (Figura 3), la segunda consiste en la activación de la definición del concepto (Figura 4) y la tercera es la interacción unidireccional imagen-definición (Figura 5). Las tres coinciden en que la respuesta pasa por la consulta de la definición conceptual.

Sin embargo, el modelo sostiene que no se puede forzar a la estructura cognitiva a utilizar definiciones y que, lo que ocurre es que, generalmente, la celda de la definición del concepto no se activa (Figura 6).

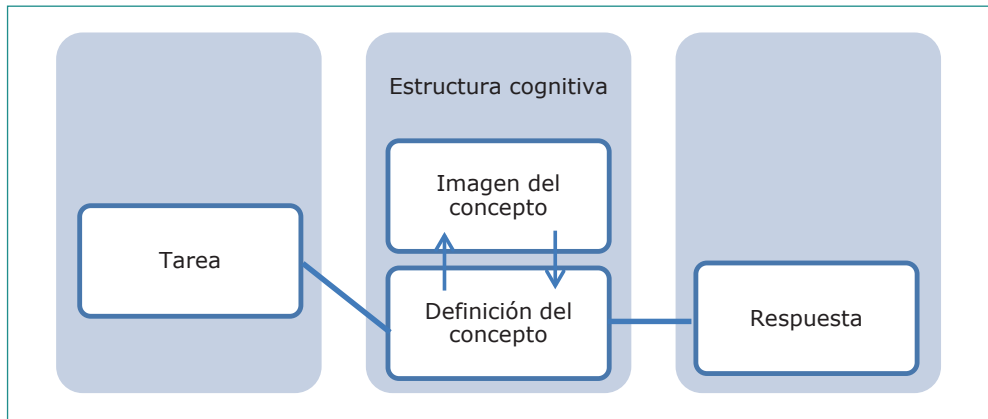


Figura 3. Modalidad definición-imagen-definición, basada en Vinner (1983)

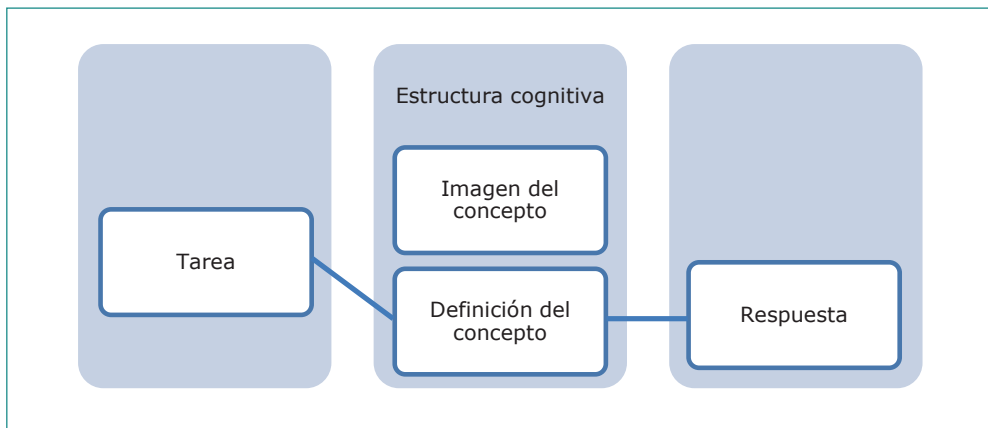


Figura 4. Activación de la definición del concepto, basada en Vinner (1983)

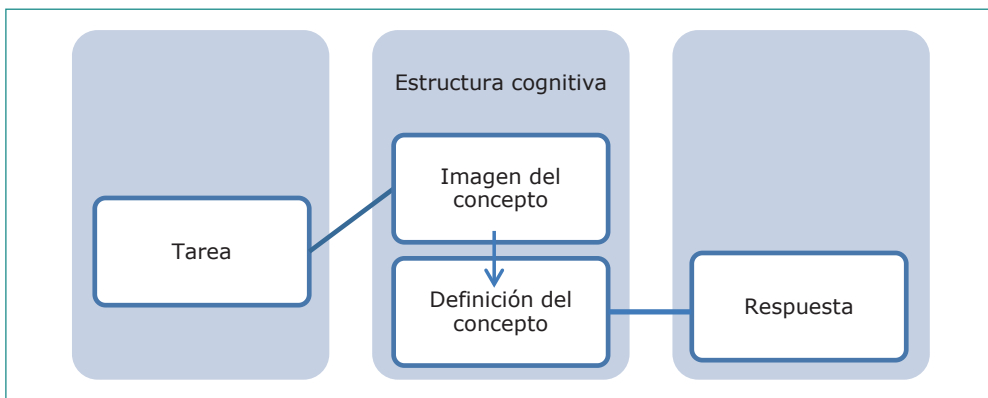


Figura 5. Interacción imagen-definición, basada en Vinner (1983)

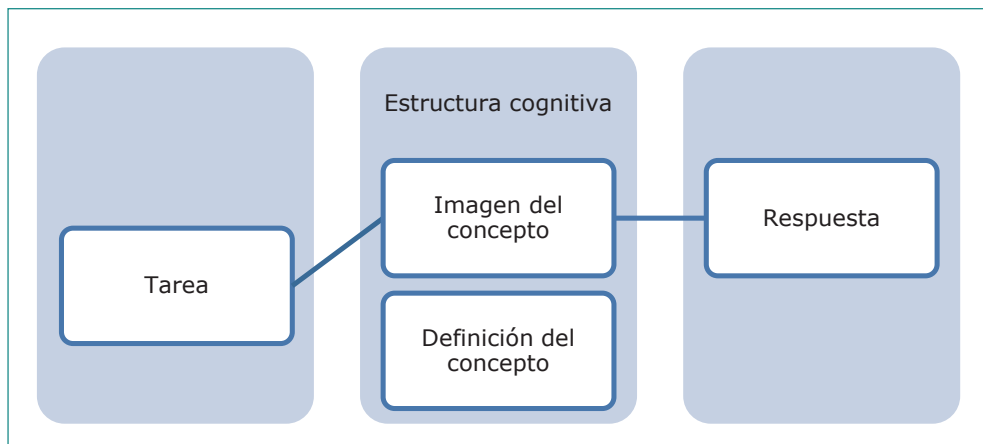


Figura 6. Activación de la imagen del concepto, basada en Vinner (1983)

Dificultades, conflictos y errores. Los obstáculos epistemológicos

El segundo referente teórico lo constituye el estudio de los obstáculos epistemológicos iniciado por Bachelard (1938) en el campo de las Ciencias Experimentales al plantear el problema del conocimiento científico en términos de obstáculos y propuesto por Brousseau (1976, 1983, 2007) en Matemáticas al pensar en la modelización de las situaciones didácticas.

Brousseau define un obstáculo (1976, 1983) como un conocimiento, que tiene su dominio de validez y eficacia y también un dominio donde a priori parece pertinente pero donde se revela falso, ineficaz y fuente de errores. Se manifiesta con errores persistentes, ofreciendo resistencia a su rechazo.

La definición de obstáculo de Brousseau ha sido utilizada por numerosos investigadores en Matemáticas para examinar las dificultades que encuentran los alumnos en distintas nociones matemáticas, aunque también hay autores que utilizan la palabra “obstáculo” en un sentido distinto (Vosniadou, 2013).

Brousseau establece una clasificación de obstáculos dependiendo de su origen (Figura 7), según esté situado en uno de los polos del sistema didáctico (alumno, profesor, saber), lo que permite definir obstáculos ontogenéticos, didácticos y epistemológicos (Cid, 2000).

Los obstáculos de origen ontogenético son los que proceden de las limitaciones del sujeto en el momento de su desarrollo (Brousseau, 1976).

Los obstáculos de origen didáctico son los que dependen de una elección o de un proyecto de sistema educativo (Brousseau, 1976).

Los obstáculos de origen epistemológico “son aquellos a los cuales uno no puede, ni debe escapar, del hecho mismo de su rol constitutivo en el conocimiento a que se apunta. Uno puede encontrarlos en la historia de los conceptos mismos. Eso no quiere decir que se deba amplificar su efecto ni que deban reproducirse en el medio escolar las condiciones históricas en las que han sido vencidos” (Brousseau, 1976).

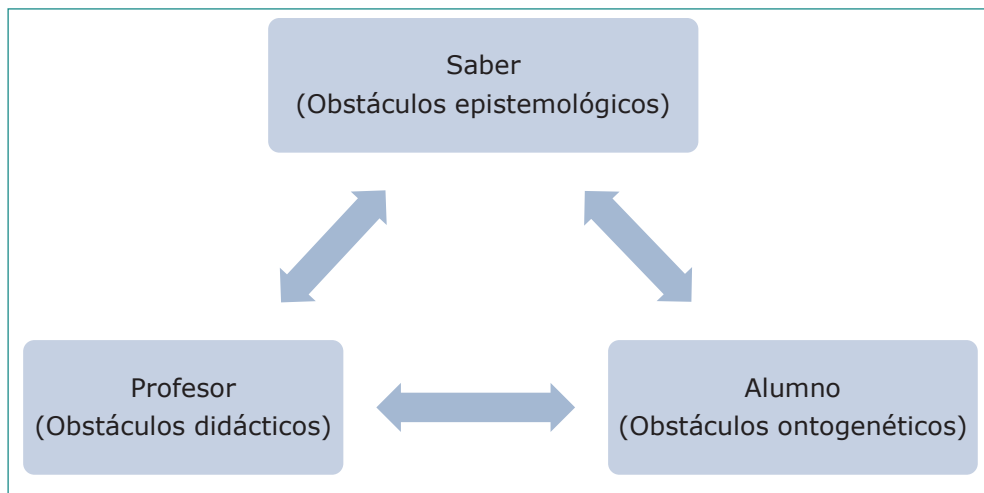


Figura 7. Clasificación de los obstáculos según Brousseau, (1976)

Un obstáculo epistemológico (Brousseau, 1976, 1983, 2007) es un conocimiento, válido en determinado ámbito, pero falso en un ámbito nuevo, que se manifiesta a través de errores, oponiendo resistencia a la adquisición del nuevo conocimiento y apareciendo de forma imprevista, siendo además, universal (no personal) y constitutivo del saber, es decir, que solo se puede rechazar explícitamente integrando su negación en el aprendizaje bajo la forma de contraejemplos (Figura 8).

Obstáculo epistemológico	Conocimiento, válido en determinado ámbito, pero falso en un ámbito nuevo.
	Se manifiesta a través de errores.
	Opone resistencia a la adquisición del nuevo conocimiento y aparece de forma imprevista.
	Universal (no personal).
	Constitutivo del saber: solo se puede rechazar explícitamente integrando su negación en el aprendizaje bajo la forma de contraejemplos

Figura 8. Características del obstáculo epistemológico según Brousseau, (1983), tomada de Cabello, Rodríguez, Garbayo, e Hidalgo, (2014)

En el marco epistemológico, se consideran los conceptos “dificultad”, “conflicto” y “error” según el lenguaje coloquial (Centeno, 1988). Conviene precisar su definición para no confundirlos. Una dificultad es lo que impide realizar y entender algo bien y pronto. Un conflicto es un choque o enfrentamiento como resultado de la coexistencia de tendencias contradictorias. Un error es un juicio falso que puede ser producido por una dificultad, un conflicto o un obstáculo.

Estas definiciones clarifican la relación entre los términos planteados en el epígrafe. El obstáculo se manifiesta a través de errores. El hecho de que haya una dificultad no significa que se trate de un obstáculo. El conflicto aparece al presentarse para un conocimiento, un dominio de validez y otro en el que es falso, o también, una imagen que no se corresponde con la definición del concepto.

Las investigaciones realizadas en el estudio de los obstáculos epistemológicos en el ámbito de los números decimales (Artigue, 1990; Brousseau, 1980, 1981, 1989; Castro, 2001; Centeno, 1988; Llinares, 2003; Ruiz, 2004; Ruiz y García, 2009), presentan el dominio de los números naturales como la fuente de los obstáculos epistemológicos detectados en los números decimales.

METODOLOGÍA

Esta investigación se plantea dentro de la línea de investigación sobre la formación de conceptos matemáticos, a partir de la detección de errores, mediante la indagación en las imágenes conceptuales y la determinación de los obstáculos epistemológicos que pueden producir dichos errores.

Tiene su origen en la detección generalizada del error de identificación del resto en las divisiones de números decimales, en un grupo de alumnos de 1^o de ESO de un Instituto de la Comunidad de Madrid. Se planteó el objetivo de determinar las causas de dicho error y su incidencia en el alumnado con un amplio rango de edades.

La hipótesis de la investigación es que los alumnos tienen imágenes conceptuales erróneas del resto de la división de números decimales debido a un obstáculo epistemológico derivado del ámbito de los números naturales. Los alumnos tienen la imagen conceptual de una cuadrícula en la que el resto ocupa la celda inferior izquierda.

Esta imagen conceptual es correcta en el ámbito de los números naturales y, en este ámbito, es coherente con la definición conceptual de resto de la división (Figura 9). Rey Pastor (1981) define el resto de la división de números naturales como la diferencia entre el dividendo y el mayor múltiplo del divisor contenido en él.

Para corroborar dicha hipótesis se indaga en dichas imágenes conceptuales y se analizan las características del obstáculo epistemológico. Finalmente se realiza una propuesta metodológica de corrección del error basada en la creación de imágenes conceptuales adecuadas.

Objetivos

La investigación se planteó con dos objetivos.

- Analizar las imágenes conceptuales de los alumnos sobre el resto de la división con números decimales e identificar el error.
- Indagar en la causa de dicho error y determinar si está originado por un obstáculo epistemológico.

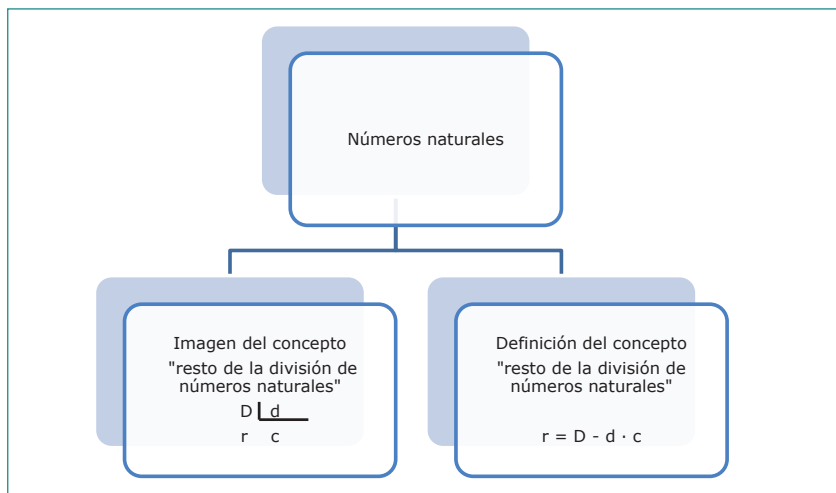


Figura 9. Conocimiento sobre el resto de la división, válido en el ámbito de los números naturales (elaboración propia)

Muestra

La muestra utilizada en la investigación es de carácter incidental ya que es la que se ha tenido a disposición en el momento de la investigación (Pereda, 1987). Está formada por alumnos de Secundaria y Bachillerato¹. Consta de 151 unidades de ambos géneros (53% mujeres, 45,7% hombres y 1,3% no han contestado) distribuidos por cursos como se muestra en la siguiente tabla (Tabla 1).

Diseño metodológico

La investigación tiene un diseño metodológico experimental de carácter cuantitativo basado en el análisis de las tablas de porcentajes de las respuestas de los alumnos a las cuestiones planteadas.

Tabla 1. Muestra de la investigación

Curso	Mujeres	%	Hombres	%	nc	%	Total	%
1º ESO	32	51,1	24	42,9			56	37,1
4º ESO	18	39,1	28	60,9			46	30,5
1º Bach CCNN	16	69,6	7	30,4			23	15,2
2º Bach CCSS	14	53,8	10	38,5	2	7,7	26	17,2
Total	80	53,0	69	45,7	2	1,3	151	100

1. IES Narcís Monturiol (Parla), IES Joaquín Araújo (Fuenlabrada), IES Menendez Pelayo (Getafe).

2	7,	8	7	1	1	
	5	8		2,	5	3
		3	7			
			4			

a) Al dividir $27,87 : 11$ se obtiene 2,53 como cociente y como resto.

b) Realiza la prueba de la división.

Figura 10. División de un número decimal entre un número natural.
Identificación del resto y realización de la prueba de la división.

El instrumento diseñado consta de una división de un número decimal entre un número natural, ofreciendo la resolución. Se indica cuál es el cociente y se proponen dos tareas, identificar el resto y realizar la prueba de dicha división (Figura 10).

Para poder discriminar otro tipo de errores en la segunda tarea, se eligió una división con divisor 11 para que en la prueba de la división, al multiplicar el divisor por el cociente solo tuvieran que aplicar la tabla del 1. Además, con este diseño también se consigue que la suma que tienen que realizar, sea “sin llevadas”, con lo que se controlan otros posibles errores laterales. Finalmente, también se controla el error de confundir el resto con la primera cifra decimal del cociente.

El ítem “a”, permite conocer las imágenes conceptuales del resto mediante el análisis de los distintos tipos de respuesta (correcta, no respuesta, error típico y otros errores).

En el ítem “b” se analiza la utilización de la definición del concepto (correcta, no respuesta, error típico y otros errores).

El análisis de la “no respuesta” determina el grado de convencimiento que tienen los alumnos de sus respuestas.

El estudio conjunto de ambos ítems, permite conocer en detalle los conflictos entre la imagen y la definición conceptual.

RESULTADOS

Una vez tabulados los datos, se cuantificó el porcentaje de las respuestas de los alumnos a cada ítem. En el ítem “a” se ha podido identificar el “error típico” que consiste en responder “el resto es 4”, con un porcentaje de aparición del 90,1%. Solo un grupo reducido (8,6%) responde correctamente “el resto es 0,04”. La no respuesta es un caso aislado (0,7%) y lo mismo sucede con el error “el resto es 5” en el que considera como resto la primera cifra decimal del cociente (Tabla 2).

En el ítem “b” el “error típico” a la hora de realizar la prueba de la división, ha sido la alineación a la derecha que efectúan los alumnos al sumar el resto al resultado de multiplicar el divisor por el cociente (Figura 11), con un porcentaje de aparición del 75,5%.

$$\begin{array}{r}
 2,53 \\
 \cdot 11 \\
 \hline
 + 22 \\
 \hline
 33 \\
 \hline
 33 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

4 → resto

$$\begin{array}{r}
 27,83 \\
 + 4 \\
 \hline
 27,87
 \end{array}$$

Figura 11. Prueba incorrecta de la división utilizando el resto 4 y sumando los números decimales alineados a la derecha

Tabla 2. Respuestas al ítem “a”

Ítem “a”	Frecuencia	Porcentaje
ns/nc	1	0,7
El resto es 4	136	90,1
El resto es 0,04	13	8,6
El resto es 5	1	0,7
Total	151	100,0

Un grupo reducido (14,6%) realiza correctamente la prueba de la división. También son pocos (5,3%) los que no terminan la prueba de la división pues solo multiplican el cociente por el divisor. En un caso aislado (0,7%) se realiza la prueba de la división utilizando 5 como resto. La no respuesta tiene muy poca presencia (1,3%). Además se presentan casos aislados de otros errores no reseñables (Tabla 3).

Los resultados conjuntos de ambos ítems se muestran en la siguiente tabla (Tabla 4), en la que se puede destacar el error típico que consiste en afirmar que el resto es 4 y “forzar” la prueba de la división para que se cumpla, alineando a la derecha la suma de decimales. Esto ocurre con un porcentaje del 74,17%. Por otro lado, también es destacable el hecho de que solo un 7,28% responde correctamente “el resto es 0,04” y además realiza correctamente la prueba de la división.

Tabla 3. Respuestas al ítem “b”

Ítem “b”	Frecuencia	Porcentaje
ns/nc	2	1,3
Alineación a la derecha	114	75,5
Realiza correctamente la prueba de la división	22	14,6
No termina la prueba de la división	8	5,3
Realiza la prueba de la división con el resto 4	2	1,3
Prueba de la división incorrecta con 0,4 como resto (en “a” ha escrito 4)	1	0,7
Prueba de la división incorrecta $D \cdot d + r$	1	0,7
Indica la prueba de la división pero utilizando como resto el número 5	1	0,7
Total	151	100,0

Tabla 4. Respuestas a los ítems “a” y “b”

Ítem “a”	Ítem “b”	Frecuencia	Porcentaje
ns/nc	Prueba de la división correcta	1	0,66
El resto es 4	ns/nc	2	1,32
	Alineación a la derecha	112	74,17
	Realiza correctamente la prueba de la división	10	6,62
	No termina la prueba de la división	8	5,30
	Realiza la prueba de la división con el resto 4	2	1,32
El resto es 0,04	Prueba de la división incorrecta con 0,4 como resto (en “a” ha escrito 4)	1	0,66
	Prueba de la división incorrecta $D \cdot d + r$	1	0,66
	Alineación a la derecha	2	1,32
El resto es 5	Realiza correctamente la prueba de la división	11	7,28
	Indica la prueba de la división pero utilizando como resto el número 5	1	0,66
Total		151	100,0

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

Una vez presentados los resultados, procede realizar un análisis y discusión de los mismos, previos a la obtención de las conclusiones.

Los alumnos no perciben dificultad en la identificación del resto de la división con números decimales.

El porcentaje prácticamente nulo de no respuesta en el ítem “a” (0,7%) significa que los alumnos están convencidos de su respuesta.

Los alumnos tienen imágenes conceptuales erróneas del resto de la división con números decimales.

El error típico (“el resto es 4”) tiene un elevado porcentaje de aparición (90,1%), lo cual confirma la hipótesis de trabajo sobre la identificación visual del resto de la división. Los alumnos han dado como resultado del resto el valor que aparece en la cuadrícula inferior izquierda de la división sin tener en cuenta que es un número decimal.

En un caso aislado (0,7%) se toma como resto la primera cifra decimal del cociente.

Solo un 8,6% de los alumnos responden correctamente, sabiendo identificar el resto de la división.

Es decir, el 90,1% de los alumnos tiene una imagen conceptual errónea, en un caso aislado (0,7%) se muestra otra imagen errónea y solo el 8,6% tiene la imagen correcta.

La imagen y la definición conceptual están en conflicto

Resulta sorprendente ver cómo la imagen conceptual errónea fuerza la prueba de la división, apoyándose en el obstáculo epistemológico de la alineación a la derecha en la suma de decimales (Centeno, 1988), para que resulte correcta (74,17%).

Además, se presentan otros dos tipos de conflictos. Por un lado, los que responden que el resto es 4, pero realizan correctamente la prueba de la división utilizando como resto 0,04 (6,62%) y, al revés, los que responden que el resto es 0,04 pero realizan la prueba de la división con el resto 4 alineándolo a la derecha (1,32%).

Solo un grupo muy reducido de alumnos tiene la imagen conceptual correcta (“el resto es 0,04”) y muestra coherencia entre la imagen y la definición del concepto, realizando correctamente la prueba de la división (7,28%).

CONCLUSIONES

Después de analizar los resultados obtenidos en la investigación, se puede afirmar que se han logrado los objetivos planteados.

Los alumnos tienen la imagen arraigada de que la división es una cuadrícula en la que el resto es el número natural que ocupa la celda inferior izquierda.

En primer lugar, se concluye que las imágenes conceptuales del resto de la división con números decimales son erróneas en su mayoría (90,1%). La imagen del resto es “la cuadrícula inferior izquierda”. Para dicho porcentaje de alumnos, el resto es el número natural (es decir, sin tener en cuenta el valor posicional de las cifras), que aparece en la cuadrícula inferior izquierda.

Se ha visto la fuerza que tiene esta imagen conceptual a la hora de realizar la prueba de la división porque se apoya en otro obstáculo epistemológico (alineación a la derecha en la suma de decimales, por extensión del algoritmo con números naturales).

Además los alumnos no son conscientes de su error pues aunque realicen la prueba de la división, no modifican su imagen conceptual. Esto dificulta la corrección del error y sugiere la creación de imágenes conceptuales correctas.

La identificación visual del resto de la división de números decimales como si se tratase del resto de la división de números naturales, es un obstáculo epistemológico.

En efecto, analizando las respuestas de los alumnos, se constata que dicha interpretación cumple las características de los obstáculos epistemológicos.

- **La “identificación visual del resto” es un conocimiento válido en el ámbito de los números naturales, pero falso en el ámbito de los números decimales.**
Si se tratase de realizar la división $2787:11$, el cociente sería 253 y el resto sería 4 (Figura 12).

- **El error manifestado consiste en no tener en cuenta el valor posicional de las cifras del resto.**
Al realizar la división, los alumnos que han respondido erróneamente “el resto es 4” (90,1%) no han tenido en cuenta que el 4 ocupa el lugar de las centésimas (Figura 13).

- **Opone resistencia a la adquisición del nuevo conocimiento.**
El error se mantiene aunque se realice la prueba de la división y a pesar de haber sido instruidos los alumnos en la división con números decimales.
Se ha podido constatar que los alumnos (74,17%) fuerzan la prueba de la división cometiendo el error de sumar números decimales alineándolos a la derecha, para que resulte la división correcta (Figura 10).

- **La “identificación visual del resto” es universal (no personal).**
Se ha identificado de manera generalizada en un amplio grupo de alumnos de diversas edades (desde 1º de ESO hasta 2º de Bachillerato).

- **Es constitutivo del saber, es decir, solo se puede rechazar explícitamente mediante su integración en el aprendizaje por medio de contraejemplos.**
Según el modelo cognitivo imagen del concepto-definición del concepto (Tall y Vinner, 1981; Vinner, 1975, 1983), lo que ocurre en la práctica es que se razona a partir de las imágenes conceptuales, como se ha podido constatar en esta investigación. Por tanto, conviene incidir en la creación de imágenes conceptuales correctas.

Con la propuesta metodológica de trazar una línea vertical en el lugar de la coma (Figura 2, Figura 12 y Figura 13) el alumno crea imágenes conceptuales adecuadas que le permiten producir un razonamiento correcto.

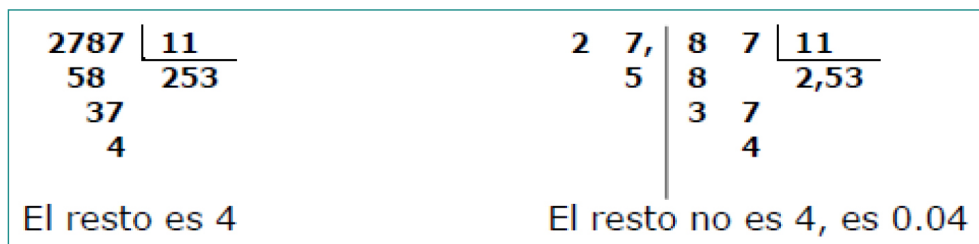
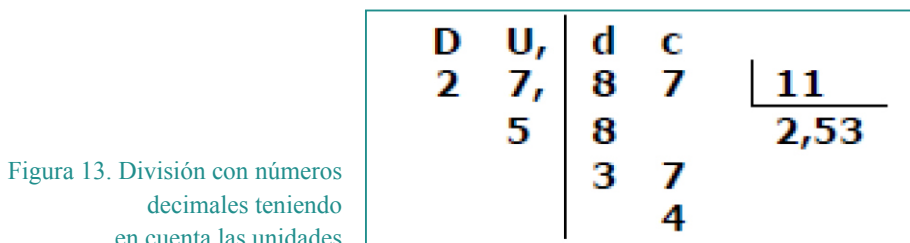


Figura 12. Identificación visual del resto en la división con números naturales y con decimales



REFERENCIAS

- Artigue, M. (1990). Epistémologie et didactique. *Reserches en Didactique des Mathématiques*, 10 (23), 241-286.
- Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris: Vrin.
- Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Comptes-rendus de la XXVIII rencontre de la CIEAEM, Belgique*, 101-107.
- Brousseau, G. (1980). Problèmes de l'enseignement des décimaux. *Reserches en Didactique des Mathématiques*, 1 (1), 11-59.
- Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Reserches en Didactique des Mathématiques*, 2 (1), 37-127.
- Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Reserches en Didactique des Mathématiques*, 4 (2), 165-198.
- Brousseau, G. (1989). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. En N. Bednarz, & C. Garnier, *Construction des savoirs, Obstacles et Conflits* (págs. 41-63). Montréal: CIRADE Les éditions Agence d'Arc inc.
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.
- Cabello, A. B., Rodríguez, M. I., Garbayo, M. M., e Hidalgo, M. (2014). La identificación visual del resto de la división de números decimales como obstáculo epistemológico. *XV Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*. Baeza: (Pendiente de edición).
- Castro, E. (2001). Números decimales. En E. Castro, *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria* (págs. 315-345). Madrid: Síntesis.
- Centeno, J. (1988). *Números decimales. ¿Por qué? ¿Para qué?* Madrid: Síntesis.
- Cid, E. (2000). Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos. *ACTAS DEL XIV SEMINARIO INTERUNIVERSITARIO DE INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA*

- DE LAS MATEMÁTICAS (SIIDM)*. Pontevedra. Obtenido de <http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/boletin10.htm>
- Llinares, S. (2003). Matemáticas escolares y competencia matemática. En M. C. Chamorro, *Didáctica de las Matemáticas* (págs. 3-29). Madrid: Pearson Educación.
- Pereda, S. (1987). *Psicología Experimental. I Metodología*. Madrid: Pirámide.
- Rey-Pastor, J. (1981). *Elementos del Análisis Algebraico*. Madrid: Euler libros-Gómez Puig Ediciones.
- Rico, L. (1997). Reivindicación del Error en el Aprendizaje de las Matemáticas. *Revista Épsilon*, 38, 185- 198.
- Rojas, N., y Flores, P. (2010). Experiencia de reflexión docente: el resto de la división. En J. Berral, M. De la Fuente, & F. España, *Actas del XIII Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas: Matemáticas para observar y actuar* (págs. 522-529). Córdoba: Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES.
- Ruiz, L. (2004). Construcción de los números decimales en la Escuela Primaria. De las fracciones a la notación decimal. *Números, formas y volúmenes en el entorno del niño* (págs. 189-232). Madrid: MEC.
- Ruiz, L., y García, F. (2009). Arithmetica Practica y Specvlativa de J. Pérez de Moya (1513-1596). Análisis epistemológico y didáctico. *Llull: Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*, 103-134.
- Tall, D., and Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.
- Vinner, S. (1975). The Naive Platonic Approach as a Teaching Strategy in Arithmetics. *Educational Studies in Mathematics*, 6, 339-350.
- Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology Vol 14*, 293-305.
- Vosniadou, S. (2013). *International Handbook of Research on Conceptual Change*. New York: Routledge.