Iniciación a los problemas de reparto igualatorio en educación infantil

María Elena López de la Fuente
Carlos de Castro Hernández
mariaelenalopezdelafuente@gmail.com
carlos.decastro@uam.es
Escuela Acesco, Parets del Vallés, Barcelona y
Universidad Autónoma de Madrid

Resumen: *En esta experiencia planteamos un taller de problemas en educación infantil, compuesto por ocho problemas, en el que se introducen dos problemas de reparto igualatorio a niños de 5-6 años. El objetivo es averiguar si los alumnos de estas edades son capaces de resolver este tipo de problemas y observar las estrategias que utilizan. Los problemas de reparto igualatorio parten de dos cantidades diferentes que se deben igualar pasando objetos de la mayor a la menor. Los niños han resuelto los problemas mediante variantes de una estrategia básica de modelización directa, que implica la representación de las cantidades a igualar y la redistribución de las mismas.*
Palabras clave: *Educación infantil, Resolución de problemas, Estrategias de modelización directa, Problemas de reparto igualatorio, Matemáticas.*

Initiation to equitable redistribution problems in kindergarten

Abstract: *In this experience, we propose a workshop on arithmetic problems in early childhood education, composed by eight problems, introducing two problems of equitable redistribution for children of 5-6 years old. We want to know if the students of these ages are capable of solving these kind of problems and to observe the strategies that children use. The problems of equitable redistribution start with two different quantities, which must be equated adding objects from the group with more objects to the group with*

less. Children have solved the problems using variants of a basic direct modeling strategy, using the representation of the quantities and their redistribution.
Keywords: *kindergarten, problem solving, direct modelling strategies, equitable redistribution, mathematics.*

1. INTRODUCCIÓN

La experiencia que presentamos en este artículo pertenece a una línea de trabajo sobre resolución de problemas en educación infantil que llevamos tiempo desarrollando con niños de 4-5 años (Molina, 2012) y 5-6 años (De Castro y Escorial, 2007). Basándonos en un modelo de enseñanza inspirado en la Instrucción Cognitivamente Guiada (Carpenter, Fennema, Franke, Levi, y Empson, 1999), planteamos problemas de muy diversos tipos a niños de educación infantil, sin enseñanza previa sobre cómo resolverlos. Los problemas están contextualizados, casi siempre basados en situaciones descritas en cuentos, para favorecer la comprensión. Los niños deben pensar los problemas ayudándose de objetos o representaciones gráficas, desarrollar modelos, razonar, comunicar las soluciones y sus estrategias. En definitiva, planteamos estos problemas en infantil para que los niños inicien el desarrollo de su competencia matemática (De Castro, Molina, Gutiérrez, Martínez y Escorial, 2012). Para ello, les planteamos problemas que, en principio, pueden no parecer nada adecuados para la educación infantil, como problemas de comparación multiplicativa (De Castro, Walsh, Del Coso, Salvador, González y Escorial, 2009), o problemas de descomposición factorial con varias soluciones (De Castro y Hernández, 2014). Al proponer este tipo de problemas, inusuales en educación infantil, deseamos propiciar un cambio en la visión que suele tenerse acerca de las primeras edades. En nuestros planteamientos, siempre destacamos las capacidades del pensamiento matemático infantil por encima de sus posibles limitaciones.

Los problemas de reparto igualatorio

Los problemas de reparto igualatorio parten de dos cantidades discretas diferentes (la *cantidad mayor* y la *cantidad menor*). Estas cantidades deben igualarse mediante el trasvase de cierto número de objetos (la *cantidad igualadora*) desde la cantidad mayor a la cantidad menor, hasta que ambas cantidades coincidan (*cantidad igualada*). Según la clasificación de Castro (2008) y de Nesher (1999), los problemas de reparto igualatorio son problemas de varios pasos.

Los problemas de reparto igualatorio resultan particularmente interesantes por admitir múltiples estrategias de resolución, dependiendo de la edad y otros factores, que ponen de manifiesto diferentes niveles en el pensamiento numérico. Estos problemas pueden plantearse en educación infantil, donde se resolverán mediante estrategias de modelización directa (De Castro, en prensa); también en los primeros cursos de educación primaria, en que se pueden resolver aplicando sumas y restas, como muestran Martínez y Sánchez (2013) en su trabajo con algoritmos ABN; por último, se pueden proponer a finales de primaria, para resolverse como problemas aritméticos verbales, en

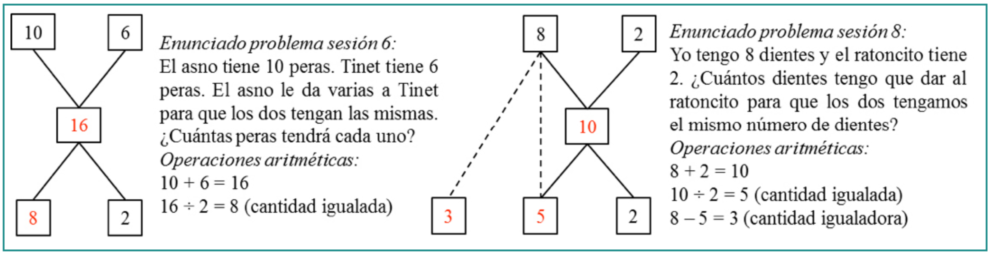

Figura 1. Esquemas y enunciados de los problemas de las sesiones 6 y 8

un enfoque tradicional, según se muestra en el análisis de la Figura 1. En el primer caso, se evidencia un pensamiento preaditivo (De Castro y Hernández, 2014); en el segundo, un pensamiento aditivo; en el tercero, un pensamiento multiplicativo (Castro y Castro-Rodríguez, 2010).

2. DISEÑO DEL TALLER DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

En este trabajo describimos dos sesiones de un taller de resolución de problemas, desarrollado en último curso de educación infantil (5-6 años), en un centro escolar de Parets del Vallés, Barcelona. En esta experiencia han participado 21 alumnos: 12 niñas y 9 niños.

El objetivo que teníamos al comenzar era estudiar cómo resuelven los niños de 5-6 años los problemas de reparto igualatorio. Por nuestra experiencia anterior en este tipo de talleres de resolución de problemas, los niños tardan entre 3 y 4 sesiones en entrar en la dinámica de trabajo que suponen los talleres. Por esta razón, diseñamos un taller en que los primeros problemas fueran sencillos, pero de complejidad creciente, y que requiriesen estrategias de modelización diversas. Esto se hace para fomentar en todo momento el razonamiento con la ayuda de objetos, y evitar que los niños afrontaran la resolución de forma mecánica (ver problemas en Tabla 1). Dado que cada semana dedicamos dos sesiones al taller, decidimos que, tras el proceso de adaptación de dos semanas (4 problemas), los problemas de reparto igualatorio se plantearían en las semanas tercera y cuarta, como segundo problema en ambas semanas.

En la Figura 1, empleamos el tipo de representación que usan Puig y Cerdán (1995) para los problemas de dos pasos. El problema 6 tiene la incógnita en la *cantidad igualada*, y está basado en el cuento "El cerezo que habla" (Díaz, 2013). Puede resolverse a través de una suma, seguida de una división (10 + 6 = 16; 16 ÷ 2 = 8); también mediante una resta, una división, y una suma o una resta (10 – 6 = 4; 4 ÷ 2 = 2; 6 + 2 = 8 o 10 – 2 = 8; ver Figura 1). Dado que los niños con los que desarrollamos el taller tienen 5 y 6 años, y no han recibido instrucción sobre operaciones aritméticas, esperamos que resuelvan estos problemas a través de la manipulación de objetos y el conteo, usando las llamadas "estrategias de modelización directa" (Carpenter y otros, 1999) que pueden aplicarse para resolver estos problemas tal como puede verse en De Castro (en prensa).

Tabla 1. Enunciados y tipos de problema para las 8 sesiones del taller

Sesión	Enunciado	Tipo de problema
1	Hansel tenía 6 golosinas y Gretel le da 5. ¿Cuántas golosinas tiene Hansel ahora?	Cambio creciente, con incógnita en la cantidad final
2	En un cesto había 12 maderas y Gretel coge 3. ¿Cuántas maderas quedan en el cesto?	Cambio decreciente, con incógnita en la cantidad final
3	Gretel tiene 4 maderas. ¿Cuántas maderas debe coger para tener 11?	Cambio creciente, con incógnita en la cantidad de cambio
4	Kim ha hecho 13 churros. 5 son churros normales. ¿Cuántos churros geniales ha hecho?	Combinación, con incógnita en una de las partes
5	Kim tiene 12 churros. Pone 3 en cada bolsa. ¿Cuántas bolsas puede llenar?	División agrupamiento
6	El asno tiene 10 peras. Tinet tiene 6 peras. El asno le da varias a Tinet para que los dos tengan las mismas. ¿Cuántas peras tendrá cada uno?	Reparto igualatorio 2, con incógnita en la cantidad igualada.
7	Tinet ha cogido 5 ramilletes de cerezas y cada ramillete tiene 2 cerezas. ¿Cuántas cerezas ha cogido Tinet?	Multiplicación
8	Yo tengo 8 dientes y el ratoncito tiene 2. ¿Cuántos dientes tengo que dar al ratoncito para que los dos tengamos el mismo número de dientes?	Reparto igualatorio 1, con incógnita en la cantidad igualadora.

El problema 8 se basa en el cuento de “El ratoncito Pérez” (Coloma, 2013/1894) y tiene por incógnita la *cantidad igualadora*. El problema se puede resolver aritméticamente de dos maneras: La primera opción es mediante una suma, una división (haciendo la media aritmética de las dos cantidades), y una resta (8 + 2 = 10; 10 ÷ 2 = 5; 8 – 5 = 3 o 5 – 2 = 3). La segunda opción es mediante la resta y la división (8 – 2 = 6; 6 ÷ 2 = 3).

Como vemos, tanto en el problema 6 como en el 8, son necesarias dos o tres operaciones aritméticas, mezclando además en ambos casos la estructura aditiva y multiplicativa. Con todo esto, si esperásemos una resolución aritmética, sería muy difícil obtenerla antes de cuarto de educación primaria, cuando se hayan visto la multiplicación y la división y se haya adquirido cierta soltura en la resolución de problemas de varias etapas que impliquen relaciones multiplicativas. Sin embargo, como hemos dicho al final de la sección anterior, mientras que las soluciones aritméticas esbozadas en párrafos anteriores denotan un tipo de pensamiento multiplicativo (Castro y Castro-Rodríguez, 2010), esperamos encontrarnos respuestas que ejemplifican un pensamiento preaditivo.

3. DESARROLLO DE LAS SESIONES DEL TALLER

Cada martes y jueves se realiza el taller en horario de 9:00 a 10:30. Las etapas de cada sesión son las siguientes: 1. Lectura del cuento; 2. Lectura de una carta en la que se nos plantea el problema; 3. Trabajo individual de cada niño para resolver el problema; 4. Puesta en común y consenso sobre resultados y estrategias; y 5. Escritura de la carta de respuesta. Esta metodología la hemos descrito en varios trabajos anteriores (De Castro, en prensa; De Castro y otros, 2009; De Castro y otros, 2012).

A continuación, vamos a describir con detalle las dos sesiones del taller centradas en los problemas de reparto igualatorio (sexta y octava). Estamos interesados en mostrar la estrategia base y todas sus variantes, incluyendo en ellas las características de los materiales empleados y de los dibujos que los niños elaboran para resolver los problemas o para ilustrar las soluciones de los mismos. Para documentar la actividad infantil y describir las sesiones, recogemos los trabajos de los pequeños, entrevistamos (preguntamos) a los niños y a la maestra durante la sesión, tomamos apuntes en hojas de registro, y realizamos fotografías de los procesos de resolución.

Desarrollo de la sesión 6

La sesión comienza con la lectura del cuento “El Cerezo que habla” (Díaz, 2013), tras la que se lee el enunciado del problema: “El asno tiene 10 peras. Tinet tiene 6 peras. El asno le da varias a Tinet para que los dos tengan las mismas. ¿Cuántas peras tendrá cada uno?” La mayoría de los niños han resuelto este problema mediante una estrategia de modelización directa que implica una redistribución de las dos cantidades (10 y 6 peras) en partes iguales entre los dos protagonistas de la historia. Esta estrategia consiste en representar las dos cantidades mencionadas en el enunciado e ir pasando objetos del grupo de 10 al de 6 hasta que ambos se igualan. Ahora bien, siendo esta la estrategia básica, se pueden apreciar variantes de la misma de gran interés, que ponen de manifiesto un uso inteligente y pertinente de ciertas características de la representación con los materiales empleados, como el color, la disposición espacial de los objetos, etc. Describimos a continuación, e ilustramos con imágenes, las diferentes variantes de la estrategia base.

Redistribución con correspondencia uno a uno y con objetos diferentes para cada cantidad

En la Figura 2 observamos la estrategia empleada por Jana. Coge 6 tapones negros para representar las peras de Tinet y 10 tapones de otros colores (verdes y azules) para representar las peras del asno. Jana coloca ambas cantidades en dos filas, una frente a otra, lo que permite compararlas mediante una correspondencia uno a uno. A partir de aquí, Jana comienza el proceso de igualación de las dos cantidades, lo que logra pasando primero un tapón azul de la cantidad mayor a la menor, y a continuación, pasando un segundo tapón (Figura 2, centro y derecha). Al haber dispuesto las cantidades emparejadas, evita tener que recontar ambas cantidades a cada paso que da para comprobar si son iguales y puede detener el proceso. Por otra parte, aunque en este problema no se pregunta por la *cantidad igualadora*, el uso de materiales de distinto color para las dos cantidades iniciales permite, tras el proceso de igualación, diferenciar perfectamente la *cantidad menor* de la *cantidad igualadora* (los 6 tapones negros de los 2 azules en la fila de abajo, Figura 2).

Figura 2. Estrategia de Jana en la que se aprecia la secuencia del paso de objetos de un grupo al otro

Noa utiliza pinzas para representar la cantidad mayor y tapones para la menor (Figura 3). La estrategia es completamente análoga a la descrita en el párrafo anterior, con la salvedad de que, en este caso, en lugar de utilizar colores diferentes para cada cantidad inicial, se utilizan materiales distintos. En este caso, se aprecia además que la comparación no se hace por la longitud de la fila (que es algo que cabría pensar en la Figura 2), sino mediante la correspondencia uno a uno.

Figura 3. Estrategia de Noa.

Redistribución con correspondencia uno a uno sin objetos diferentes para cada cantidad

En el ejemplo siguiente, se observa la misma correspondencia uno a uno realizada con palillos por Keyla (Figura 4). A diferencia de los casos anteriores, no utiliza el color ni el tipo de objetos para diferenciar las cantidades iniciales. Esto no supone ningún inconveniente para el proceso de igualación, pero sí para la distinción entre cantidad menor y cantidad igualadora, que en este problema no es necesario realizar.

Redistribución con comparación de longitudes

En algunos casos en que se han utilizado materiales de construcción encajables, como las piezas de Lego o los cubos encajables (y se encajan los materiales, no como en la Figura 6), el proceso de comparación se realiza sin necesidad de conteo, a través de las

Figura 4. Estrategia de Keyla.

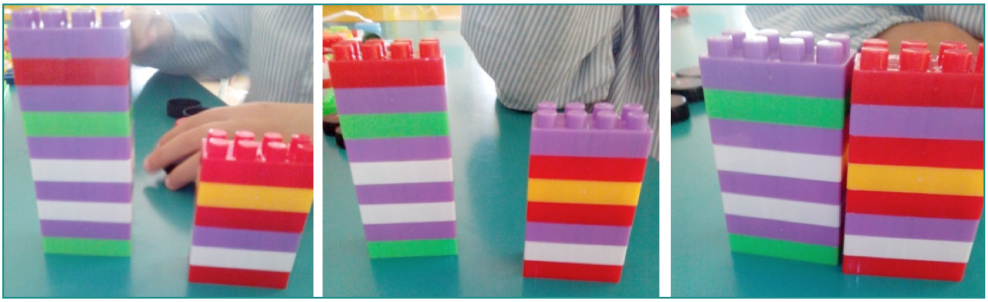

Figura 5. Estrategia de Unai.

longitudes, como observamos en la Figura 5. Unai va pasando piezas de un grupo a otro hasta que coinciden ambos en altura (Figura 5, a la derecha). En ese momento, tras conseguir la igualación, cuenta las piezas de una de las torres y responde que son 8. Esta variante tampoco permitiría diferenciar la cantidad menor de la igualadora.

Estrategia de redistribución sin correspondencia uno a uno

En algunos casos se representan las cantidades sin representar la relación de comparación entre ellas (ni con correspondencia uno a uno ni con modelo de longitud). Gisela forma los dos grupos, de 10 y 6 objetos, y va desplazando piezas del mayor al menor. A cada paso que da, debe comprobar a través del conteo si ha igualado o no ambas cantidades (Figura 6). Consideramos esta estrategia como igualmente válida aunque menos eficiente que las anteriores.

Del mismo tipo que la estrategia de Gisela es la de Lucía (Figura 7). Sin utilizar ninguna disposición que facilite la comparación, pasa los dos palillos de su derecha al extremo más alejado de la fila que tiene a su izquierda (Figura 7). Tras resolver el problema, lo representa gráficamente de un modo "más organizado" (Figura 7, derecha) más cercano a casos anteriores en que se emplea la correspondencia uno a uno. Un tercer ejemplo de esta variante de la estrategia base de redistribución, se presenta en la estrategia de Aina (Figura 8).

Figura 6. Estrategia de Gisela.

Figura 7. Estrategia de Lucía.

Figura 8. Estrategia de Aina.

Estrategia de redistribución sin correspondencia uno a uno y con objetos diferentes para cada cantidad

Para completar la panorámica ofrecida en esta sección, falta la estrategia en que se utilizan materiales diferentes para ambas cantidades, lo que permite diferenciar la cantidad menor de la igualadora, pero no se utiliza la correspondencia uno a uno, con lo que la comprobación de la posible igualdad nos remite al conteo. Ivet es la autora de esta estrategia implementada con tapones y palillos. Tras la resolución, en la representación gráfica (Figura 9, derecha), parece, como en el caso de Lucía (Figura 7, derecha) que va evolucionando hacia el uso de la correspondencia uno a uno, aspecto que merecería ser observado con más detalle en experiencias futuras.

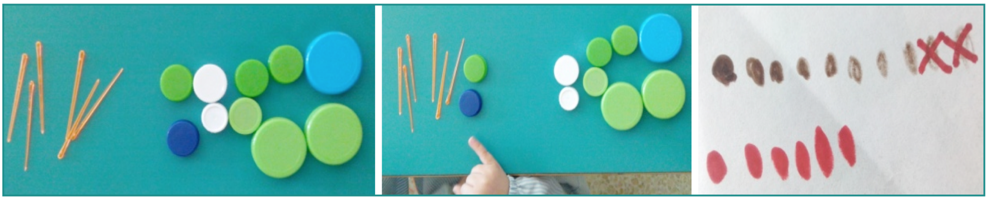

Figura 9. Estrategias de Ivet.

Por último, en la Figura 10 observamos la ejecución en papel de algunas de las variantes que hemos mostrado en esta sección. En los dos casos de la izquierda (dibujos de Ainhoa y Mar) aparecen perfectamente representadas las cantidades implicadas en el problema, como el proceso de igualación. En los otros dos casos (Noa y Gael), no se distingue adónde va la cantidad igualadora, aunque sí se aprecia de dónde parte, gracias a los dos objetos tachados en cada imagen.

Resumiendo, de los 21 alumnos que asistieron a esta sesión, todos han resuelto el problema mediante alguna de las estrategias descritas en este apartado. De ellos, 6 han necesitado ayuda o se han fijado en el trabajo de sus compañeros.

Figura 10. Estrategias de Ainhoa, Mar, Noa, y Gael.

Desarrollo de la sesión 8

La sesión comienza con el cuento "El Ratoncito Pérez" (Coloma, 2013/1894). El enunciado del problema es: "Yo tengo 8 dientes y el ratoncito tiene 2. ¿Cuántos dientes tengo que dar al ratoncito para que los dos tengamos el mismo número de dientes?" Se trata de un problema de reparto igualatorio, como en la sesión sexta del taller. La diferencia es que, en este caso, la incógnita es la cantidad igualadora en lugar de la cantidad igualada. En principio, los niños aplican el mismo tipo de estrategia de modelización directa, de redistribución. Sin embargo, en este caso es crucial que la ejecución de la estrategia permita diferenciar la cantidad menor de la cantidad igualadora. Pasamos a describir las soluciones encontradas por los alumnos.

Jana ha utilizado una estrategia de modelización directa con ayuda de los dedos. Comienza levantando 8 dedos para representar los dientes que tiene uno (Figura 11, izquierda) y luego levanta los otros 2 (Figura 11, centro). Con los 10 dedos extendidos se da cuenta de que, para que los dos tuvieran la misma cantidad, deben tener 5 dientes cada uno (la cantidad igualada). A continuación responde: "Me parece que son 3". Le pedimos que lo haga con otros materiales para comprobarlo.

Figura 11. Estrategia de Jana.

Redistribución con correspondencia uno a uno y con objetos diferentes para cada cantidad

Lia utiliza palos de color verde y naranja. Coloca en la parte superior 8 palos de color verde y en la inferior 2 de color naranja. Realiza el proceso de igualación pasando palos de la fila de arriba a la de abajo. En todo momento dispone los palos de ambas filas manteniendo una correspondencia uno a uno entre ambas cantidades, lo que supone una ayuda visual que hace innecesario el conteo para la comparación de las cantidades. Al finalizar la igualación, dice que hay 5 en cada uno. Al recordarle la pregunta del enunciado, responde inmediatamente que son 3 y los desplaza para mostrar la solución (Figura 12, derecha). Haber elegido dos colores diferentes para representar ambas cantidades, le permite controlar visualmente cuáles forman la *cantidad menor* (los 2 naranjas) y cuáles la *cantidad igualadora* (los 3 verdes que pasan de una fila a otra).

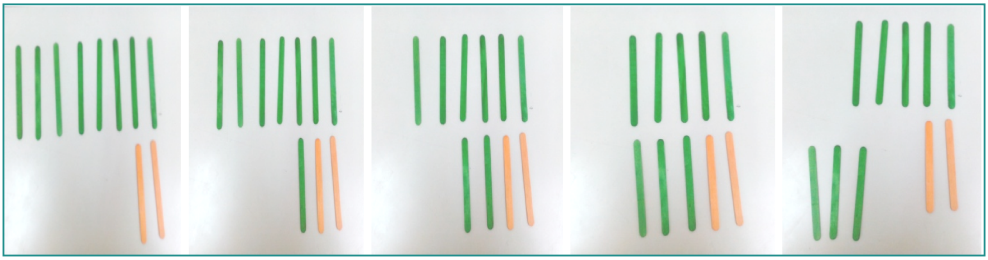

Figura 12. Estrategia de Lia.

Redistribución sin correspondencia uno a uno y con objetos diferentes para cada cantidad

Lucía emplea tapones y piezas de construcción. Forma una fila de 8 tapones y coloca en frente dos piezas sin marcar una correspondencia uno a uno (Figura 13). Después, va pasando tapones de la cantidad mayor a la menor hasta que se produce la igualación, que se comprueba a través del conteo. Cuenta el número de tapones que ha pasado a la fila de piezas de construcción y da la respuesta de 3. Haber utilizado material diferente para representar ambas cantidades le ha permitido diferenciar la cantidad menor de la igualadora y dar una respuesta inmediata al problema. A continuación, en la Figura 13 a la derecha, vemos como Lucía vuelve a resolver el problema sobre el papel. En este caso no distingue las dos cantidades con colores, pero el sistema que utiliza de tachar corazones y representar con una flecha dónde van, le ayuda a localizar la cantidad igualadora. Además, debemos advertir que está representando un problema previamente resuelto.

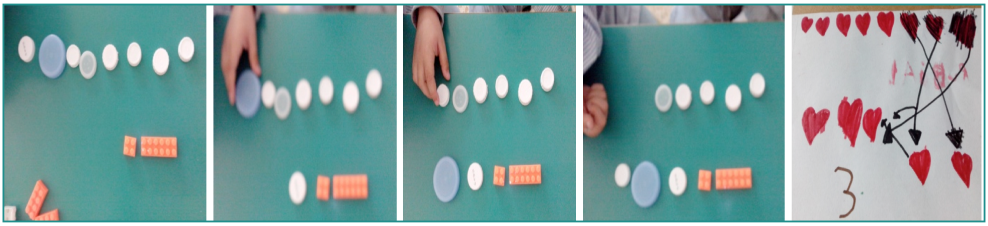

Figura 13. Estrategia de Lucía.

Inés forma un grupo con 8 tapones de color verde claro y otro con 2 tapones de color verde oscuro (Figura 14). Realiza el proceso de igualación y da como solución 5, pero al leerle el enunciado del problema de nuevo, responde que son 3 los dientes que le ha dado la ratoncita al ratoncito. Al haber elegido diferentes colores para cada grupo, le ha resultado fácil visualizar la respuesta, al distinguir, en los 5 objetos que quedan a su derecha, la cantidad menor (los 2 tapones verde oscuro) de la cantidad igualadora (los 3 verde claro). En su dibujo (Figura 14, derecha), Inés no representa el proceso de igualación, sino la situación de igualdad, enfatizando con colores la diferencia entre los 2 caramelos azules y los 3 rosa.

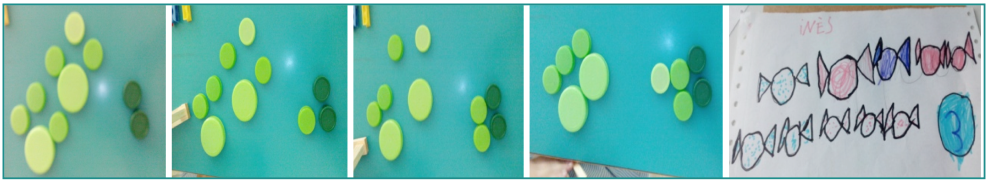

Figura 14. Estrategia de Inés.

Redistribución con comparación de longitudes y con objetos diferentes para cada cantidad

Aleix utiliza piezas de construcción y forma dos torres: una con 8 piezas y otra con 2 piezas. Completa el proceso de igualación comparando las alturas de las torres construidas (Figura 15). Su respuesta es 5 y no sabe continuar con el problema. Aina dibuja 8 dientes para formar un primer grupo y otros 2 dientes para formar el segundo grupo. A continuación, tacha 3 dientes de la cantidad mayor y con flechas marca los desplazamientos de dichos dientes al grupo con 2 dientes. Escribe un 3 para indicar la solución del problema (Figura 15, derecha).

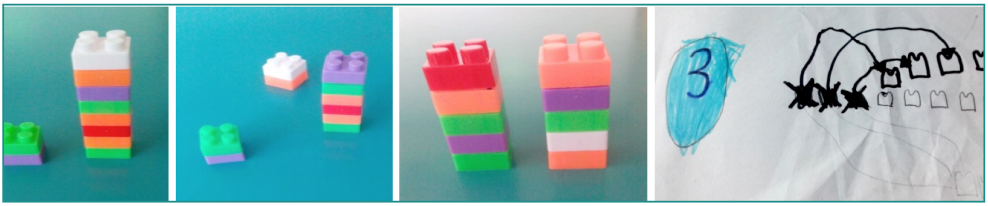

Figura 15. Estrategia de Aleix y dibujo de Aina.

Redistribución sin correspondencia uno a uno y sin objetos diferentes para cada cantidad

Jana coge 10 tapones con distintos tamaños y colores, forma grupos de 8 y 2 objetos, toma directamente 3 tapones del grupo de 10 y los añade al de 2, igualando las cantidades, y dice que hay 5 en cada grupo. Al preguntarle por el número de dientes que tiene que dar la ratoncita al ratoncito, responde que son 3 y los separa para que se vean. De nuevo, la representación gráfica (Figura 16, derecha) muestra un buen grado en la comprensión de la situación que describe el enunciado.

Figura 16. Estrategia de Jana.

Mar toma 10 piezas de construcción y forma dos colecciones: una de 8 y otra de 2. Pasa 3 piezas de uno a otro hasta igualarlos, pero no sabe continuar el problema (Figura 17, izquierda). Noa resuelve el problema en papel dibujando las dos cantidades con dientes de color verde. Después va tachando de uno en uno dientes de la cantidad mayor y pasándolos a la menor. Después colorea los dientes que quedan en cada grupo, tras la igualación, cuenta los que ha pasado de un grupo a otro (los tachados) y escribe la solución (3) en espejo (Figura 17, derecha).

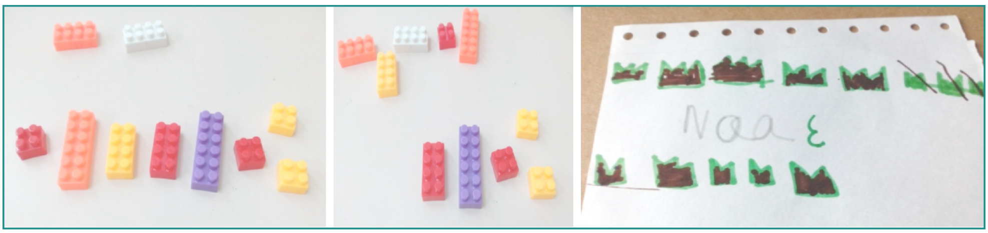

Figura 17. Estrategia de Mar y Noa.

Ivet hace un grupo con 8 palillos de plástico y otro con 2. Pasa un palillo y comprueba, contando, que hay 7 y 3 respectivamente en cada grupo; repite su acción una vez (para contar 6 y 4 palillos) y una vez más, hasta comprobar la igualación (Figura 18). Le volvemos a leer el enunciado del problema y da una solución de 3.

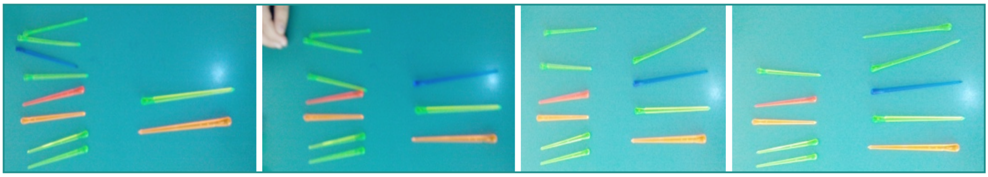

Figura 18. Estrategia de Ivet.

Gael resuelve el problema con palillos (Figura 19). Al llegar a la cantidad igualada, duda un poco. Se le vuelve a leer el enunciado y, después de pensar un rato, da la respuesta de 3. En el dibujo que elabora tras la resolución, queda clara su comprensión del proceso (Figura 19, derecha).

Figura 19. Estrategia de Gael.

Pau coge el ábaco, desplaza 8 cuentas rojas hacia su derecha, para representar el primer grupo, y deja las 2 cuentas rojas a su izquierda para representar el segundo grupo. Después, va pasando cuentas rojas de izquierda a derecha hasta que se produce la igualación (Figura 20), y da como respuesta 5. Al leerle de nuevo el enunciado, vuelve a pensar su respuesta y responde que son 3 los dientes que la ratoncita le da al ratoncito.

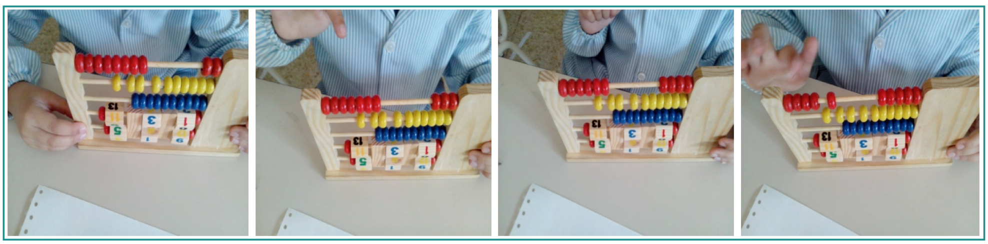

Figura 20. Estrategia de Pau.

Jana pide ayuda a Inés para representar con dedos el problema. Jana pone 8 dedos con las manos y pide a Inés que ponga 2 (Figura 21, izquierda). Jana va diciendo: "Yo te doy una. Ahora tú tienes 3 y yo tengo 7. Ahora te doy otra, Inés, y tú tienes 4 y yo 6. Te doy una más y ahora tú tienes 5 y yo tengo 5. Inés cierra la mano completa con los 5 dedos y peginta a Inés: "¿cuántas te he dado?" Inés responde: "Tres" (Figura 21). Jana dirige todo el proceso de resolución, salvando la dificultad inicial de representar el problema con los dedos, pidiendo "prestados" dedos a su compañera. Inés sigue el proceso de Jana y contribuye a la solución del problema respondiendo a la pregunta final de Jana por la *cantidad igualadora* (3).

Figura 21. Estrategia de Jana e Inés.

En general, ha resultado más difícil el problema de la sesión octava que el de la sexta. En el primer caso, la incógnita era la *cantidad igualada*; en el segundo, la *cantidad igualadora*. En este último problema, hemos visto errores debidos a que los niños completaban el proceso de igualación, pero no eran capaces de diferenciar la *cantidad menor* de la *cantidad igualadora*. Esto solo lo hicieron de forma sencilla los niños que eligieron materiales diferentes (en color o tipo de objeto) para representar las cantidades iniciales del problema (la mayor y la menor).

CONCLUSIONES Y REFLEXIONES FINALES

Con respecto al diseño del taller, pensamos que la alternancia de tipos de problemas para evitar la mecanización ha resultado acertada. Al no haber dos problemas seguidos iguales, los alumnos han tenido que inventar estrategias diferentes para cada problema. En las primeras sesiones, los niños demostraban confusión e interferencias debidas a la metodología tradicional que empleaban en el aula. La mayoría de los niños decían que había que sumar, porque era la operación que habían trabajado en clase. Una niña comentó a la maestra: "Es que siempre hacemos problemas de añadir", a lo que la maestra respondió: "Ya, pero es que hay más tipos de problemas y no todos se resuelven siempre igual. No todos son de añadir". En este sentido, parece adecuado proponer varias sesiones de adaptación, para que los niños entren en una dinámica nueva de trabajo, antes de explorar con ellos un tipo particular de problemas de nuestro interés, como los de reparto igualatorio.

En estas reflexiones finales, queremos compartir nuestro aprendizaje sobre esta forma de trabajar desde que comenzamos (De Castro y Escorial, 2007). Algo que hemos aprendido es que en educación infantil es preferible trabajar con cantidades más manejables (de en torno a 10 objetos) que con cantidades mayores. En algunos problemas hemos utilizado cantidades mayores, por requerimiento del tipo de problema. Por ejemplo, en De

Castro y Hernández (2014), planteamos la descomposición factorial de 24 en filas iguales (1 fila de 24, 2 filas de 12, 3 filas de 8, etc.). Muchos niños de 5-6 años manejan bien cantidades de entre 20 y 30 objetos, y el 24 es un número muy interesante para este tipo de problemas por la cantidad de divisores que tiene. Sin embargo, encontrábamos niños que tenían dificultades para contar hasta 24 objetos; no tenían dificultad en comprender la situación, ni en representarla con objetos, pero la excesiva demanda de destreza en el conteo les impedía ejecutar una estrategia perfectamente planificada. Por esta razón, en esta experiencia, no hemos utilizado cantidades superiores a diez. Damos prioridad a la invención infantil de estrategias informales y entendemos que el rango de estrategias aplicables es mayor con cantidades menores.

Por otra parte, otro aprendizaje que hemos hecho es relativo a los materiales que pueden utilizar los niños en los talleres de problemas. Aunque el enfoque que seguimos es bastante flexible y abierto y, en principio, dejamos que los niños utilicen los materiales que ellos prefieran, el maestro no puede evitar tener sus propias preferencias sobre los materiales. Por ejemplo, los cubos encajables son materiales muy versátiles, que permiten muchas posibilidades y estrategias. Sin embargo, materiales de uso cotidiano no estructurados, como la plastilina, o las pinzas de la ropa, podrían no parecer tan interesantes a primera vista. Como hemos dicho, aunque se dé libertad a los niños para elegir material, el repertorio inicial de materiales que ponemos al alcance de los niños en la sesión es crucial. Algo que hemos aprendido sobre los materiales es que, cuanto más diversos sean estos, más amplia es la gama de estrategias, o de formas de aplicar las mismas. Además, las peculiaridades que muestran los niños en las elecciones de materiales nos ayudan más a los profesores a comprender cómo es el pensamiento infantil y, en definitiva, a ayudar a los niños a seguir desarrollando su competencia matemática, que es nuestro principal objetivo docente.

Con respecto a los problemas de reparto igualatorio, sabíamos que se podían utilizar en educación infantil (De Castro, en prensa), pero no conocíamos la variedad de estrategias que llegan a utilizar los niños de 5-6 años al abordar estos problemas. En esta experiencia nos ha sorprendido el uso espontáneo que hacen los niños de esquemas de comparación (mediante la comparación de longitudes, la correspondencia uno a uno, o el conteo) y también cómo los pequeños utilizan las características de los materiales, como el color o el tipo de material, para diferenciar la *cantidad menor* de la *cantidad igualadora*. Esto encaja con el uso similar que hacen los niños, cuando resuelven problemas de cambio creciente con incógnita en la cantidad de cambio. Al emplear la estrategia de "añadir hasta", añaden objetos diferentes a los que forman la cantidad inicial, hasta llegar a la cantidad final, pudiendo diferenciar en todo momento entre la cantidad inicial y la de cambio (Carpenter y otros, 1999; De Castro y Escorial, 2007).

Finalizamos el relato de esta experiencia expresando la convicción que tenemos de que "otra matemática es posible en la educación infantil". Es una matemática diferente a la tradicional en esta etapa educativa, pero perfectamente alineada con los planteamientos curriculares actuales sobre la competencia matemática (De Castro y otros, 2012), y con las recomendaciones de instituciones dedicadas a la enseñanza de las matemáticas en general (NCTM, 2003), y a las matemáticas en la educación infantil (NAEYC y NCTM, 2013). Animamos a los lectores a realizar experiencias en esta línea con sus alumnos de educación infantil.

REFERENCIAS

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L. y Empson, S. B. (1999). *Children's mathematics: Cognitively guided instruction*. Portsmouth: Heinemann.

Castro, E. (2008). Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 113-140). Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Castro, E, y Castro-Rodríguez, E. (2010). El desarrollo del pensamiento multiplicativo. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas, 54*, 31-40.

Coloma, L. (2013/1894). *Ratoncito Pérez*. Barcelona: Santillana Educación.

De Castro, C. (En prensa). Problemas de fácil modelización y difícil resolución aritmética. En *Actas del XV Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. El sentido de las matemáticas: matemáticas con sentido*. Jaén: SAEM THALES.

De Castro, C. y Escorial, B. (2007). Resolución de problemas aritméticos verbales en la Educación Infantil: una experiencia de enfoque investigativo. *Indivisa. Boletín de Estudios e Investigación (Monografía IX)*, 23-48. Disponible en: http://eprints.ucm.es/12643/

De Castro C. y Hernández, E. (2014). Problemas verbales de descomposición multiplicativa de cantidades en educación infantil. *PNA, 8*(3), 99-114.

De Castro, C., Molina, E., Gutiérrez, M.L., Martínez, S. y Escorial, B. (2012). Resolución de problemas para el desarrollo de la competencia matemática en Educación Infantil. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 80*, 53-70.

De Castro, C., Walsh, J., Del Coso, E., Salvador, C., González, V. y Escorial, B. (2009). "Dos de todo": El cuento chino de los problemas de comparación multiplicativa en la Educación Infantil. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales" 73*(3), 33-42.

Díaz, I. (2013). *El cerezo que habla*. Barcelona: Santillana Educación.

Martínez, J. y Sánchez, C. (2013). *Resolución de problemas y método ABN*. Madrid: Wolters Kluwer.

NAEYC y NCTM (2013). Matemáticas en la Educación Infantil: Facilitando un buen inicio. Declaración conjunta de posición. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2*(1), 1-23.

NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Nesher, P. (1999). El papel de los esquemas en la resolución de problemas de enunciado verbal. *Suma, 31*, 19-26. Recuperado de: http://revistasuma.es/IMG/pdf/31/019-026.pdf

Puig, L. y Cerdán, F. (1995). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

Molina, E. (2012). Narración de un taller de resolución de problemas aritméticos con niños de 4 años. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 1*(1), 63-79. Recuperado de: http://www.edma0-6.es/index.php/edma0-6/article/download/5/18