Épsilon - Revista de Educación Matemática 2014, Vol. 31(1), nº 86, 9-20

El uso de tablas de valores para la representación gráfica de funciones

Félix Martínez de la Rosa
Universidad de Cádiz
felix.martinez@uca.es
Juan José Martínez Delgado-Ureña
I.E.S. Fernando Aguilar Quignon
juanjose.martinez@uca.es

Resumen: *La utilización, por los estudiantes de primer curso de matemáticas en la Universidad, de tablas de valores para representar gráficas de funciones elementales, pone de manifiesto un esquema mental deficiente. En este artículo se investigan las causas que lo provocan. Se analizan los tratamientos que dan algunos libros de texto de la Educación Secundaria a esta cuestión, y se proponen actuaciones para erradicarlo.*
Palabras Clave: *enseñanza secundaria, gráficas, funciones, tabla de valores, libros de texto.*

The use of tables of values for graphical representation of functions

Abstract: *The use by first-year students of mathematics at the University of tables of values in the graphic representations of elementary functions, shows a poor mental scheme. In this paper we investigate the causes that provoke it. It analyzes the treatments that give some textbooks of secondary education to this question, and proposes actions to eradicate it.*
Keywords: *secondary education, graphics, functions, table of values, textbooks.*

INTRODUCCIÓN

Durante los últimos años, los firmantes de este artículo han impartido docencia en asignaturas de matemáticas de primer curso en diversas titulaciones de la Universidad de Cádiz. Un asunto que nos ha llamado la atención surge al pedir a los estudiantes que realicen el esbozo de la gráfica de una función elemental (polinómica, de proporcionalidad inversa o exponencial) para poder visualizar mejor algún ejercicio, pero sin recurrir a las derivadas ni al estudio general de la función. Esto revela dos hechos. El primero es que en la mayoría de los casos no intuyen el aspecto que debería tener el dibujo. El segundo es utilizar una tabla de valores para representar la función uniendo los puntos: lo que obtienen poco tiene que ver con la gráfica correcta y evidencia un claro error de concepto.

Las tablas de valores aparecen en todos los cursos de la ESO (también en bachillerato). Esto hace que los alumnos conciban un marco de trabajo ingenuo que los condiciona al realizar la representación gráfica de curvas elementales, y pone de manifiesto la existencia de una deficiencia en su estructura cognitiva.

Los libros de texto son una pieza importante del sistema educativo. Los alumnos los utilizan para estudiar en sus casas, y los profesores se basan en ellos para articular y preparar sus clases. Por eso nos parece básico el papel que juegan en relación con la deficiencia detectada, y hemos analizado el tratamiento que se da a esa cuestión en una selección de textos de algunas conocidas editoriales.

Finalmente, se dan propuestas para que los alumnos basen sus dibujos de las gráficas de funciones elementales en el conocimiento de sus formas y no en la unión de los puntos de una tabla.

MARCOS DE REFERENCIA

En el artículo (Tall y Vinner, 1981) acerca de las dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje de límites y continuidad, los autores acuñaron el término *esquema conceptual* (concept image): son las estructuras cognitivas que una persona asocia a un concepto. Incluye todas las imágenes mentales que la persona ha interiorizado en sus años de aprendizaje acerca del mismo (representaciones gráficas, numéricas, simbólicas, etc.). A la hora de enfrentarse a un tema nuevo, un estudiante tiene en la mente sus esquemas conceptuales previos, los cuales pueden interferir en el nuevo aprendizaje cuando la información no puede ser simplemente añadida a la que ya poseen, porque ambas con incompatibles.

Puede ocurrir que el conflicto cognitivo se resuelva de forma positiva, dando lugar al *cambio conceptual* (Vosniadou, 1994), que constituye una reorganización de los conocimientos en la mente de los alumnos. Pero a veces este no se produce y aparecen los denominados *modelos sintéticos* (esquemas mentales deficientes que revelan que los nuevos conocimientos no han sido completamente asimilados) en el intento de los alumnos por adaptar la nueva información a la que ya tienen, aun cuando existan incoherencias obvias. Poner en evidencia las ideas previas de los alumnos, discutirlas y evaluarlas, crear conflicto conceptual con ellas y alentar y guiar la reestructuración conceptual, son las cuatro fases de una posible estrategia docente para el cambio conceptual (Nussbaum y Novick, 1992).

La investigación sobre ideas previas y cambio conceptual no es tan amplia en matemáticas como en otras ciencias, en las que resulta frecuente que los niños y adolescentes posean explicaciones *ingenuas* de algunos fenómenos naturales, que obstaculizan el aprendizaje de los conocimientos científicos. Quizás esto se deba a que en matemáticas el conocimiento ingenuo no es tan evidente como en otras áreas de la ciencia.

Investigaciones acerca de las dificultades del cambio conceptual al pasar del plano al espacio pueden verse en (Del Puerto y Seminara, 2010). La idea básica de la tangencia, que consiste en la visualización de una recta rozando a una circunferencia, puede dar lugar a modelos inadecuados, por ejemplo que una tangente a una curva no la puede atravesar (Martínez, 2012a). También en (Kajander y Lovric, 2009), se investigan los errores propiciados por los libros de texto acerca de la tangencia.

La utilización de tablas de valores para esbozar las gráficas de funciones elementales se empieza a explicar a los alumnos de trece años y se extiende a lo largo de toda la ESO. Esto puede hacer que esta práctica se instale en la mente de los alumnos y sea difícil erradicarla. En algunos estudios se investigan las capacidades de los alumnos de la especialidad de matemáticas, del Máster de profesorado de secundaria de la Universitat Pompeu Fabra y la Universitat Oberta de Catalunya (López y otros, 2013): la mayoría de ellos realizó la gráfica de una parábola a partir de tablas de valores y no sobre la base del conocimiento de las funciones polinómicas de segundo grado.

En este trabajo se analiza el uso (a veces abuso) de las tablas en algunos libros de texto, y su posible influencia en la aparición de esquemas inadecuados en los alumnos.

ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO

Cuando requerimos de los alumnos el esbozo rápido de la representación de una función sencilla, sin recurrir a las derivadas, se evidencia que no saben el aspecto o la forma que tienen las gráficas porque su único recurso consiste en confeccionar una tabla de valores y unir los puntos obtenidos. Hemos querido investigar cómo llega a formarse en ellos este esquema mental.

En el Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la ESO (BOE 5 enero 2007). Las tablas de valores aparecen en los cuatro cursos, tanto en los contenidos como en los criterios de evaluación del bloque 5, funciones y gráficas, como puede verse en la siguiente tabla (ver página 12).

A partir de estos principios generales, cada Comunidad Autónoma desarrolla con detalle los objetivos, competencias básicas, contenidos y criterios de evaluación del currículo de la ESO. Por último las editoriales lanzan sus libros de texto, procurando mantenerse fiel al desarrollo del Real Decreto hecho por cada comunidad. Los autores de este artículo pertenecen a la Comunidad Autónoma Andaluza, y los libros que a continuación se analizan están adaptados a la normativa aprobada por la misma.

	Contenidos	Evaluación
1º	Organización de datos en tablas de valores.	Evaluar el uso de las tablas como instrumento para recoger información y transferirla a unos ejes coordenados.
2º	Representación gráfica de una situación que viene dada a partir de una tabla de valores, de un enunciado o de una expresión algebraica sencilla.	Evaluar la interpretación de relaciones funcionales sencillas dadas en forma de tabla, gráfica, a través de una expresión algebraica o mediante un enunciado.
3º	Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de diferentes ámbitos, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica.	Evaluar la capacidad de analizar fenómenos mediante una función lineal, construir la tabla de valores, dibujar la gráfica utilizando las escalas adecuadas en los ejes y obtener la expresión algebraica de la relación.
4º	Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica.	A la vista del comportamiento de una gráfica o de los valores numéricos de una tabla, se evaluará la capacidad de extraer conclusiones sobre el fenómeno estudiado.

En primero de ESO los alumnos aprenden a ubicar puntos en el plano y a obtener figuras uniendo esos puntos con segmentos. Pero es en segundo de ESO donde se da el concepto de función y de ecuación de una función. Por ejemplo en (Santillana, 2º ESO, p. 267) se especifica que:

> La expresión algebraica de una función se escribe como $y=f(x)$ y se llama ecuación de la función. A partir de la ecuación obtenemos la tabla de valores. Para obtener el valor de y, damos valores a x y operamos. Representando estos puntos obtenemos la gráfica de la función.

Los alumnos van a tener que asimilar la relación entre variables, puntos y ecuación. Es la primera vez que van a obtener puntos a través de una ecuación, y por eso en todos los libros consultados se presta bastante atención, y de una forma muy parecida, a esta cuestión. En (Anaya, 2º ESO, p. 235) se expone el esquema 1:

ECUACIÓN ↓ TABLA DE VALORES ↓ REPRESENTACIÓN GRÁFICA	"Cuando existe una relación algebraica entre la x y la y de los puntos, a dicha ecuación se le llama *ecuación de la función*. Conociendo la ecuación de una función se puede obtener, a partir de ella, tantos puntos como se necesiten para representarla".

Esquema 1

El esquema 1 se sitúa en el primer momento en el que se dice a los alumnos cómo deben actuar para obtener una gráfica: calcular una tabla a partir de la ecuación y unir sus puntos. Por ser la primera vez, se debería ser más cuidadoso con una información que puede condicionar a los alumnos durante mucho tiempo. Como este esquema les resulta congruente con los ejercicios que han realizado en primero, esta manera de hacer va creando en ellos un esquema mental muy básico sobre las representaciones gráficas. Además, en innumerables ejercicios, tanto en segundo de ESO como en los cursos posteriores, este proceso se repite, por lo que el esquema se afianza, se interioriza y se convierte en un hábito difícil de cambiar.

Si analizamos el párrafo de la derecha del esquema 1, en seguida surgen tres cuestiones:

1) ¿Cuántos puntos se deben obtener?
2) ¿Qué valores debemos emplear?
3) ¿Cómo se unen los puntos?

No es lógico dar un algoritmo basándose en una premisa tan imprecisa y subjetiva como “tantos puntos como se necesiten”. Tampoco se especifica cómo se eligen los valores para la variable x: siempre acaban empleándose números enteros cercanos al origen. Tampoco se dice qué sucede entre los puntos, si hay que unirlos con segmentos o de otra manera, ni que una gráfica no comienza justo en el primer punto de la tabla ni acaba en el último.

Normalmente el esquema 1 se ilustra usando rectas, pero en algún libro se utiliza también alguna parábola como ejemplo. Esto es así en (Anaya, 2º ESO, p. 235) donde se representa la función cuya ecuación es $y = x^2 - 4x + 4$. Para ello se dan a x los valores 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Uniendo puntos se obtiene la figura 1.

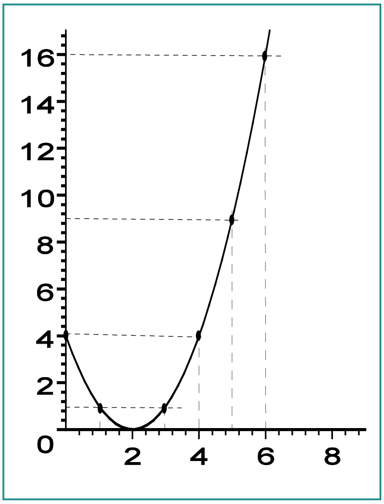

Figura 1

En ningún momento se indica cómo deben unirse los puntos, y de hecho los alumnos no ven extraño hacerlo mediante segmentos. Además, lo que ocurre a la izquierda del origen no parece importante: aparentemente la parábola comienza en el punto (0,4). Sirva este caso para poner de manifiesto las reservas expresadas acerca del esquema 1.

Finalmente, tras cursos y cursos de emplear el algoritmo anterior, en el final de la ESO se intenta un cambio de mentalidad, dando más importancia a la forma del dibujo que a las tablas, pero de una forma tímida y conservando algunos tics poco recomendables.

Rectas

En segundo y tercero de ESO se introducen las funciones lineales cuyas representaciones gráficas son rectas. En seguida se dan los conceptos de pendiente y de ordenada en el origen. Ambas son las características básicas de una recta y la determinan totalmente. Para representar una sólo se necesitan o bien esos datos, o bien dos puntos de la misma. Sin embargo, a pesar de haber dado esos conceptos, en los libros de segundo de ESO se siguen usando tablas con muchos valores para hacer esos dibujos. Sólo en algunos libros de tercero de ESO, se reconoce que no es necesario. Esto se hace tímidamente en (Anaya, 3º ESO, p. 151) donde se da una recta que pasa por el origen y se dice que sólo falta otro punto para representarla. También en (Santillana, 4º ESO, p. 178) se especifica que "para representar una recta sólo necesitamos dos puntos".

Parábolas

En tercero y cuarto de ESO se analizan con detalle las parábolas. Se introducen los puntos de corte con los ejes, vértice y simetría. Pero para hacer la gráfica todavía se recomienda (en algunos textos) realizar una tabla de valores y unir los puntos. Esto sucede en (Anaya, 4º ESO, p. 108) donde para representar $y = x^2 - 3x + 4$ se enumeran los siguientes pasos:

Paso 1: Obtención del vértice.
Paso 2: Obtención de puntos próximos al vértice. Realización de una tabla dando a x los valores -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5.
Paso 3: Puntos de corte con los ejes.
Paso 4: Representación.

Además del vértice y los puntos de corte, se requiere al estudiante que calcule nueve puntos en total y que los una para obtener la gráfica.

Uno de los inconvenientes de usar tablas es la de que el polinomio que define a una parábola tiene grado dos, y es fácil que aparezcan situaciones en la que los puntos que calculemos tengan ordenadas muy distantes entre sí, y sea complicado representarlos todos juntos. Por ejemplo, dos de los puntos de $f(x) = 10(x^2 - 1)$ son (0,-10) y (4,150).

Sus ordenadas se diferencian en 160 unidades, por lo que dibujar ambos y mantener igual la escala de los ejes es imposible. Hay que cambiar la escala y el dibujo se deforma. Aquí empieza a ponerse de manifiesto que saber de antemano la forma que tiene la gráfica simplificaría y mejoraría la realización de la misma.

A partir de tercero de ESO, los libros empiezan a decantarse por atender a la forma de la gráfica. Por ejemplo en (SM, colección Pitágoras, 3º ESO, p. 171) se especifica que:

> El estudio de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ consiste en determinar sus elementos principales: sentido de las ramas, corte con los ejes, vértice y eje de parábola. Una vez conocidos estos es posible esbozar su gráfica de forma muy aproximada.

Es muy interesante el comentario que viene a continuación:

> Las parábolas no se suelen representar utilizando tablas de valores, aunque en ocasiones, tras hallar sus elementos, resulta útil complementar la información obtenida con una tabla que proporcione algunos puntos para ayudar a realizar la representación gráfica.

Se recomienda intuir el dibujo y posiblemente calcular las coordenadas de algún punto como complemento de los datos que da la propia ecuación. También en (Santillana, 4º ESO, p. 180) se especifica la forma que tienen las parábolas:

> Las funciones polinómicas de segundo grado son funciones de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$
>
> Su gráfica es una curva con dos ramas, una creciente y otra decreciente, que se llama parábola. Si $a > 0$ las ramas de la parábola van hacia arriba y si $a < 0$ hacia abajo.

Incomprensiblemente, en la página siguiente de ese mismo libro (Santillana, 4º ESO, p. 181), se vuelven a emplear tablas de valores con numerosas entradas, para representar funciones que estarían perfectamente determinadas haciendo uso del esquema recomendado. Y es este volver atrás lo que va calando en los alumnos, que piensan que las tablas son siempre imprescindibles.

Funciones de proporcionalidad inversa y similares

En 4º ESO se introducen las funciones de proporcionalidad inversa. En (Anaya, 4º ESO, p. 110) o (Santillana, 4º ESO, p. 184) se motivan a través de casos reales y a continuación se emplean tablas de valores para la función $y = 1/x$, sacando conclusiones en cuanto a dominio, simetría, crecimiento o decrecimiento y asíntotas. A partir de esas deducciones se representan funciones similares, ya sin recurrir a las tablas.

Pero cuando todo está ya establecido reaparecen las tablas de valores. Por ejemplo en (Santillana, 4º ESO, p.185) para la gráfica de $y = -4/x$ cuyas características se han analizado con detalle, se calcula una tabla con ocho entradas (-8, -4, -1, -1/2, 1/2, 1, 4, 8) para x, y se especifica que representando esos puntos y uniéndolos se obtiene la gráfica. También en (Anaya, 4º ESO, p. 111) se da el siguiente cuadro acerca de la representación gráfica de $y = 6/(x-4)$:

La gráfica de esa función es como la de $6/x$, desplazada cuatro unidades a la derecha. Veamos que es así mediante una tabla de valores:

x	-2	0	1	2	3	…	5	6	7	8	10	…
$x-4$	-6	-4	-3	-2	-1	…	1	2	3	4	6	…
$y = 6/(x-4)$	-1	-1.5	-2	-3	-6	…	6	3	2	1.5	1	…

Podemos compararla con la gráfica de $6/x$. Son idénticas salvo en su ubicación.

Pero una tabla de valores no sirve para comprobar que dos gráficas son idénticas porque, por muy extensa que sea, sólo podrá tener un número finitos de puntos. Con la observación que se hace en el esquema anterior se está alimentando un error de concepto (hacer creer que una tabla sirve para identificar una gráfica), que sería fácil de eludir si nos limitáramos a decir que $y = 6/(x-4)$ es idéntica a $y = 6/x$ en su forma, pero en otro lugar del plano.

Los casos anteriores inculcan en los alumnos la idea errónea de que es mejor confiar en una tabla para realizar las gráficas, en lugar de hacer el esfuerzo de recordar las características que se deducen de la ecuación de la una función.

Funciones exponenciales

En cuarto de ESO se explican las funciones exponenciales. Por ejemplo en (Anaya 4º ESO. p. 113) se introducen con el siguiente enunciado:

Vamos a representar, dando valores a x, las funciones $y = 2^x$ e $y = (1/2)^x$

La obtención de algunos puntos, permite observar los comportamientos de estas funciones: se acercan infinitamente a un lado del eje x, y al otro lado los valores de y aumentan muy rápidamente. Pero esto es distinto a realizar la representación uniendo los puntos de una tabla. Hacerlo supone dar a x muchos valores y con guarismos muy altos, tanto positivos como negativos, para poder apreciar sus cualidades. Se obtienen así unas tablas enormes (ver (Santillana, 4º ESO, p. 198) o (Anaya 1º bach., p.258)) y con valores tan dispares que en la práctica resulta inviable representar los puntos de una manera exacta: inevitablemente, debemos cambiar la escala de los ejes. Entonces ya no tendríamos un dibujo real sino uno aproximado. Lo importante de estas curvas es conocer su forma. Una vez que se sabe, es innecesario recurrir a ninguna tabla para dibujarlas.

Funciones que describen fenómenos reales

En el caso de los fenómenos reales, si se estudia uno en el que las variables no guardan entre sí una relación funcional conocida, el empleo de una tabla de valores está justificado para obtener una aproximación de la gráfica a que da lugar el mismo, y observar sus particularidades.

A veces el análisis de los valores obtenidos puede llevar a deducir la fórmula que describe un fenómeno. Por ejemplo en (Santillana, 4º ESO, p. 184), tras definir las funciones de proporcionalidad inversa (y aclarar su expresión algebraica y que su gráfica es una hipérbola), se da un ejemplo que muestra los datos obtenidos en un laboratorio acerca de la presión y el volumen de un gas. Ya que el producto de ambas cantidades es constante, se puede deducir la fórmula de proporcionalidad inversa que rige el experimento. Es un ejemplo del uso correcto de una tabla de valores.

En (Anaya, 1º Bach, p. 246), se dan los datos de dos experimentos: uno relaciona profundidad y presión, y el otro la distancia que un recorre un coche hasta detenerse en función de la velocidad que lleva al frenar. En ambos casos los modelos funcionales que rigen esos experimentos no se deducen sino que se dan directamente (el primero es lineal y el segundo cuadrático). A partir de esos modelos realizar las gráficas de los experimentos (una recta y una parábola) no requiere ningún esfuerzo porque ya son de sobra conocidas por los alumnos. Sin embargo, en vez de emplear los conocimientos adquiridos en cursos anteriores para hacer la representación, esas gráficas se obtienen mediante la unión de los puntos de las tablas (diez en cada caso). Es precisamente este tipo de actuaciones las que provocan que los alumnos crean que la representación gráfica a través de una tabla es lo más aconsejable, fácil y fiable.

Si hay una situación especialmente apropiada para el manejo de tablas de valores, es el análisis de fenómenos reales. Pero si la fórmula que rige ese fenómeno se sabe, y su gráfica también, es inadecuado obtener la representación gráfica del mismo a través de una tabla.

PROPUESTAS DIDÁCTICAS: LA FORMA DE LAS GRÁFICAS

Como hemos visto en la sección anterior, las tablas de valores están presentes en las representaciones gráficas, a lo largo de toda la ESO (también en bachillerato). Esto hace que los estudiantes piensen que son imprescindibles para representar cualquier gráfica, creándose un esquema mental inadecuado: calcular una tabla a partir de la ecuación y unir los puntos. Es posible que esta práctica se viera reducida si a lo largo de la ESO, se incidiera de una manera más decidida en la *forma* de las representaciones gráficas de funciones elementales.

- Con respecto a las *rectas*, debería dejarse claro, desde el primer momento en que se habla de ellas, que sólo se necesitan dos puntos para representarla.
- En cuanto a las *parábolas*, la forma de sus gráficas es algo con lo que cualquier alumno está familiarizado, porque aparecen en muchos ámbito cotidianos (igual que la circunferencia). Otra cosa es su relación con los polinomios de grado dos. En un primer momento, emplear las tablas de valores para apreciar esa relación es necesario. Pero una vez aclarado este hecho, las gráficas deben basarse en el sentido de las ramas, corte con los ejes, vértice y eje de la parábola. En casos concretos se puede completar el estudio hallando las coordenadas de algún punto.
- A pesar de haber estado durante años trabajando con polinomios, dibujando rectas y parábolas, la primera vez que se mencionan explícitamente las *funciones polinómicas* es en 4º de ESO, y para las representaciones gráficas de las de grado mayor que dos, hay que esperar a primero de bachillerato, y a la introducción del concepto de derivada. Es claro que las tablas de valores no son útiles para estas gráficas: cuando el grado del polinomio aumenta, las ordenadas de los puntos también lo hacen, por lo que es muy difícil representarlos sin distorsionar el dibujo. Además cualquier elección de valores para x no vale: si nos limitamos a valores enteros cercanos al origen, posiblemente el dibujo no tenga nada que ver con la realidad.

Pero estas funciones pueden representarse anticipándose al concepto de derivada. Bastan dos pasos (ver también (Martínez, 2012b)):

Paso 1. La forma de los polinomios.
- Los de *grado impar* mayor que uno corresponden a curvas que recorren el plano, desde la parte superior derecha a la parte inferior izquierda si el *coeficiente del término de mayor grado* es positivo, y desde la desde la parte inferior derecha a la parte superior izquierda si es negativo.
- Los de *grado par* mayor que dos corresponden a curvas que recorren el plano, desde la parte superior derecha a la parte superior izquierda si el *coeficiente del término de mayor grado* es positivo, y desde la desde la parte inferior derecha a la parte inferior izquierda si es negativo.

Paso 2. Raíces del polinomio y su multiplicidad.
- Si una raíz tiene *multiplicidad par*, el polinomio no atraviesa el eje x en ese punto. Además el eje x es tangente al polinomio en ese punto.
- Si una raíz tiene *multiplicidad impar*, el polinomio atraviesa el eje x en ese punto. Además, si la multiplicidad es mayor que uno, el eje x es tangente al polinomio en ese punto.

El grado del polinomio, junto con el coeficiente del término de mayor grado, indica la forma básica de la curva. El cálculo de las raíces y su multiplicidad, indica la relación del eje x con la curva.

Aunque la recta tangente se da formalmente en las matemáticas de primero de bachillerato al explicar la derivada, los alumnos suelen tener su propia idea acerca de la tangencia porque es un término de uso común, que se emplea en todo tipo de ámbitos no matemáticos. Pero la idea que tienen sobre ella suele ser ingenua e incompleta. Así que relacionar la tangencia del eje x con la multiplicidad de las raíces (y dibujarlo a veces atravesando la curva pero siendo tangente) serviría para afianzar este concepto antes de la definición formal, y ayudaría a prevenir los esquemas mentales erróneos que surgen en relación con él.

- El análisis de datos obtenidos en un experimento es una forma habitual de introducir las *funciones de proporcionalidad inversa*. La representación de los puntos sugiere la forma de una hipérbola. Una vez analizadas las características de estas curvas, intuyendo y anticipando el concepto de asíntota, no tiene sentido volver sobre lo andado y utilizar de nuevo las tablas de valores para la gráfica. Hay que fijar la forma de estas funciones para que los alumnos la tengan presente en lo sucesivo.
- Analizar, en una *función exponencial* concreta, el comportamiento de los valores de y a medida que se le dan a x valores cada vez más alejados del origen, va configurando la forma de estas funciones. Y a partir de ahí debe quedar claro que es inadecuado dibujarlas a través de las tablas.

RESUMEN FINAL Y CONCLUSIONES

La utilización, por parte de nuestros alumnos universitarios, de tablas de valores para esbozar gráficas pone de manifiesto un modelo sintético que hemos intentado analizar y comprender.

Las tablas de valores están presentes en la normativa oficial del BOE, a lo largo de toda la ESO, y asimismo se recogen en los libros de texto analizados. Durante los cuatro años de la ESO, se requiere a los alumnos la realización de tablas para dibujar rectas, parábolas, funciones de proporcionalidad inversa y exponenciales. Como consecuencia del uso continuado, y de que unir los puntos de una tabla no requiere esfuerzo intelectual alguno, los alumnos interiorizan esa manera de actuar y aplican ese modelo en sus representaciones gráficas.

En cuanto a los libros de texto, aquí se han analizado algunos y se han detectado varios usos inadecuados de las tablas de valores. En un primer momento es útil representar puntos para empezar a descubrir la forma de las gráficas. Pero a partir de ahí, tras estudiar las características de las curvas cuyas formas se sugieren, las representaciones de funciones elementales no deben basarse en unir los puntos de las tablas. Sería bueno que los alumnos supieran reconocer con qué curva se asocia cada ecuación.

Visualizar la forma que tienen las gráficas de las funciones elementales no plantea dificultades, previene los malos hábitos y proporciona grandes dosis de motivación e intuición a los alumnos. Además, se les proporciona una base sólida en la que asentar, una vez dada la derivada, el estudio general de las funciones.

REFERENCIAS

Del Puerto, S. y Seminara, S. (2010). Las concepciones erróneas y el cambio conceptual en el aprendizaje de la geometría analítica. *Premisa,*12(44), 25-35.

Kajander, A. y Lovric, M. (2009). Mathematics textbooks and their potential role in supporting misconceptions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 40(2),173-181

López, M., Miralles, J. y Viader, P. (2013). Tres años del Máster de formación del profesorado de secundaria de matemáticas. *Suma*, 72, 31-36.

Martínez, F. (2012a). Detección y corrección de errores de concepto. *Suma,* 69, 73-81.

Martínez, F. (2012b). Errores en el producto, evaluación y gráficas de polinomios. *Números,* 81, 25-32.

Nussbaum, J. y Novick, N. (1982). Alternative frameworks, conceptual conflict, and accommodation: Toward a principled teaching strategy. *Instructional Science*, 11(3), 183-200.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics Education*, 12(7), 151-169.

Vosniadu, S. (1994). Capturing and modeling the process of conceptual change. *Learning and instruction,* 4, 45-69.

Libros de texto citados de la editorial Anaya

Colera, J. y Gaztelu, I. (2012). Matemáticas 2º Educación Secundaria Andalucía. Ed. Anaya.

Colera, J., Gaztelu, I. y Oliveira, M.J. (2010). Matemáticas 3º Educación Secundaria Andalucía. Ed. Anaya.

Colera, J., Gaztelu, I., Oliveira, M.J. y Martínez, M. (2008). Matemáticas 4º Educación Secundaria Andalucía, Opción B. Ed. Anaya.

Colera, J., Oliveira, M.J., García, R. y Santaella, E. (2008). Anaya Matemáticas I, 1º Bachillerato. Ed. Anaya.

Libros de texto citados de la editorial Santillana

Redal, E.J. y otros. (2012). Matemáticas 2º ESO*,* Proyecto la casa del saber., Edición Andalucía Ed. Grazalema Santillana.

Redal, E.J. y otros (2008). Matemáticas 4º ESO Opción B, Proyecto la casa del saber. Edición Andalucía Ed. Grazalema Santillana.

Libros de texto citados de la editorial S.M.

Vizmanos, J.R., Anzola, M., Bellón, M. y Hervás, J.C. (2010). Matemáticas 3º ESO, Colección Pitágoras. Ed. S.M.