

Errores de conceptos geométricos persistentes en alumnos de 1º de ESO: detección y metodología de corrección.

Ana Belén Cabello Pardos

Facultad de Educación. Universidad Complutense de Madrid

Ana B. Sánchez García

Facultad de Educación. Universidad de Salamanca

Ricardo López Fernández

Facultad de Educación. Universidad de Salamanca

Resumen: *En este trabajo se expone la existencia de errores geométricos persistentes en alumnos de 1º de ESO y se realiza una propuesta metodológica para su corrección. Para ello se han utilizado dos instrumentos metodológicos. El primero, es un cuestionario de detección del rendimiento en Geometría aplicado a una muestra de 137 alumnos, que permite conocer las imágenes conceptuales de los alumnos y sus errores. El segundo instrumento lo constituyen las unidades didácticas diseñadas según las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele partiendo del conocimiento de las imágenes conceptuales de los alumnos. Se llevó a cabo una experimentación con dos grupos obtenidos de la muestra anterior; uno experimental ($N=21$) y otro de contraste ($N=18$), que ha permitido contrastar la eficacia de la propuesta metodológica.*

Palabras clave: *errores geométricos persistentes, cuestionario, unidades didácticas, modelo de Van Hiele, Geometría.*

Persistent geometric errors in students of 7th grade: detection and correction methodology

Abstract: *In this paper we show the existence of persistent geometric errors in students of 7th grade and we make a methodological proposal in order to correct them. For this purpose, two methodological tools have been used. The first one, a questionnaire*

to detect the performance in Geometry applied to a sample of 137 students, identifies conceptual images of students and their errors. The second instrument is formed by the teaching units designed according to Van Hiele's model learning phases from the knowledge of the students' conceptual images. An experiment with two groups obtained from the previous sample was conducted, the experimental group (N = 21) and the contrast one (N = 18), which has allowed to test the effectiveness of the methodological proposal.

Keywords: *persistent geometric errors, questionnaire, teaching units, Van Hiele model, Geometry.*

INTRODUCCIÓN

El origen de esta investigación es la constatación de la deficiente comprensión en Geometría que tienen los alumnos de Secundaria, que se contextualizó en un Instituto de Enseñanza Secundaria, analizando los resultados de las pruebas externas de 2º de ESO de la Comunidad de Madrid.

La hipótesis de la investigación es que los alumnos tienen errores persistentes en el reconocimiento de los objetos geométricos y que su corrección depende de la metodología empleada en la enseñanza de la asignatura.

Para fundamentar teóricamente la investigación se estudiaron los modelos y las teorías sobre la comprensión en Geometría y la formación del concepto geométrico que se presentan en el Marco Teórico.

Se centró la atención en los dos protagonistas del proceso de aprendizaje: el alumno que aprende y el profesor que enseña. En cada uno de ellos se analizó su actuación. Se concluyó que en el alumno existen errores persistentes a pesar del estudio de la asignatura y que la corrección de dichos errores depende de manera significativa, de la metodología empleada por el profesor.

En el alumno se determinó el punto de partida cognitivo mediante un cuestionario de detección del rendimiento en Geometría diseñado para la investigación (Cabello, 2013). Dicho instrumento permitió conocer las imágenes conceptuales (correctas o erróneas) que tienen los alumnos al empezar el curso, y medir la formación del concepto geométrico analizando nuevamente dichas imágenes después del estudio de la asignatura.

En el profesor se analizó la metodología, mediante la implementación curricular del modelo de Van Hiele elaborada para la investigación (Cabello, 2013), es decir, utilizando unas unidades didácticas diseñadas según las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele a partir de la detección de los errores en las imágenes conceptuales realizada con el cuestionario.

MARCO TEÓRICO

En este apartado se exponen las teorías sobre la comprensión y la formación del concepto geométrico, que sustentan la metodología didáctica propuesta en esta investigación.

El modelo de Van Hiele

Como teoría principal se consideró el modelo de Van Hiele (1957, 1986), según el cual, el alumno recorre cinco niveles en su comprensión en Geometría y en cada nivel se establecen unas fases que guían su aprendizaje. Por tanto el modelo consta de dos aspectos, uno descriptivo, constituido por los niveles de comprensión y otro prescriptivo o metodológico, formado por las fases de aprendizaje. Este último aspecto es en el que se basa el profesor para el diseño de las unidades de enseñanza.

Los niveles de comprensión

En este epígrafe se presentan, de manera resumida, los niveles de comprensión, remitiendo al lector a profundizar en la bibliografía (Gutiérrez y Jaime, 1998; Gutiérrez, Jaime, y Fortuny, 1991; Jaime, 1993; Jaime y Gutiérrez, 1990, 1994).

NIVELES	OBJETOS QUE SE ESTUDIAN
Básico, de reconocimiento o visualización	Elementos básicos del estudio
Análisis	Propiedades que analizan los elementos básicos
Deducción informal, orden o clasificación	Enunciados que relacionan las propiedades
Deducción	Ordenaciones parciales o sucesiones de los enunciados
Rigor	Propiedades que analizan las ordenaciones parciales

Tabla 1. Niveles del modelo de Van Hiele, basada en Jaime y Gutiérrez (1990).

Los estudios realizados señalan que los alumnos en la Educación Secundaria Obligatoria alcanzan, como mucho, los tres primeros niveles (Corberán y otros, 1994; Jaime y Gutiérrez, 1995). También hay que tener en cuenta que un alumno puede estar en un nivel para unos contenidos y en un nivel distinto para otros.

Las fases de aprendizaje

En los niveles de comprensión, el protagonista es el alumno, pues es el sujeto de la adquisición de dichos niveles. En cambio, en las fases de aprendizaje, el protagonismo lo adquiere el profesor, que diseña el camino para que el alumno progrese en la comprensión de la Geometría.

A continuación se presenta un esquema con el contenido de cada una de las fases de aprendizaje.

FASES	CONTENIDO
Indagación	Los alumnos toman contacto con el tema que se va a tratar y el profesor identifica los conocimientos iniciales de los alumnos.
Orientación dirigida	El profesor guía a sus alumnos a través de actividades sencillas de modo que los conceptos y estructuras que tienen que alcanzar aparezcan progresivamente y los alumnos descubran y aprendan las relaciones y componentes de la red de conocimientos que tienen que formar.
Explicitación¹	Los alumnos deben intentar verbalizar y justificar los resultados que han obtenido, dialogando entre ellos y con el profesor, para que lleguen a ser conscientes de las características y relaciones descubiertas y afiancen el lenguaje técnico que corresponde al tema objeto de estudio.
Orientación libre	Los alumnos utilizan los conocimientos adquiridos para resolver actividades y problemas diferentes de los anteriores y, probablemente, más complejos.
Integración	Los alumnos establecen una visión global de todo lo aprendido. No se presentan actividades nuevas sino una organización de lo ya adquirido. Las actividades que se proponen son resúmenes o recopilaciones de la información que ayuden a los alumnos a lograr esta integración.

Tabla 2. Fases de aprendizaje, basada en Van Hiele (1986) y Jaime (1993).

1. La tercera fase puede no ser temporal sino establecerse como una actitud permanente de razonamiento, diálogo y discusión en las actividades que lo permitan de las otras fases de aprendizaje.

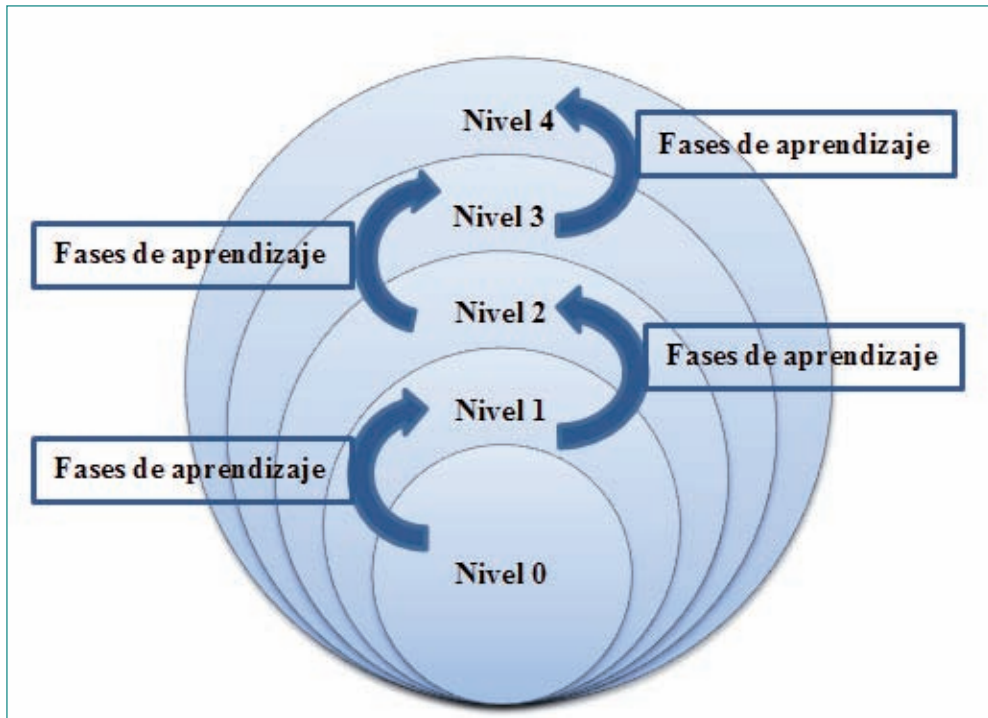


Ilustración 1. Aspecto descriptivo y prescriptivo del modelo de Van Hiele, tomado de Cabello (2013).

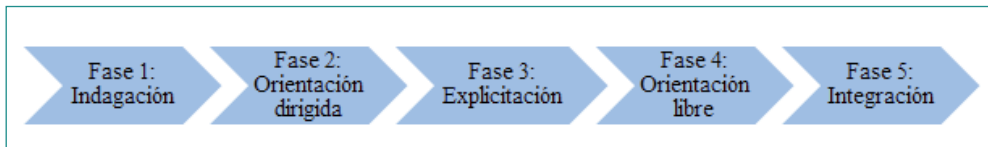


Ilustración 2. Fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele, tomado de Cabello (2013).

El modelo cognitivo “imagen del concepto-definición del concepto”

Este modelo (Hershkowitz, 1987, 1989, 1990; Vinner, 1975, 1983; Vinner y Hershkowitz, 1980, 1983) analiza los procesos cognitivos de la mente del alumno cuando aprende un concepto geométrico nuevo.

Denominan “dibujo mental del concepto” al conjunto de todos los dibujos que el alumno ha asociado con el concepto. La imagen del concepto es el dibujo mental junto con las propiedades que el alumno asigna al concepto. La definición del concepto es una definición verbal que posibilita su expresión con precisión.

Estos autores exponen una realidad con la que se han encontrado en sus investigaciones cuasi-experimentales en el aula. Al preguntar a los alumnos sobre algunos conceptos geométricos simples, a menudo se descubre que tienen imágenes erróneas de dichos conceptos. Estas imágenes pueden ser el resultado de un conjunto específico de ejemplos que se ha dado a los alumnos. Probablemente hay una suposición implícita de que los alumnos deben utilizar las definiciones cuando se les pide una tarea cognitiva y, por tanto, no es necesario dar muchos ejemplos diferentes; pero esta suposición no se sustenta pues el alumno suele trabajar con la imagen olvidando la definición.

En conclusión, dar una definición y algunos ejemplos no es suficiente para formar la imagen correcta del concepto y en algunas ocasiones lo anterior conduce a la generación del error por mecanismos de aprendizaje basados en la transferencia analógica (Sánchez, 2013).

Afirman que conocer las imágenes conceptuales de los alumnos tiene gran importancia porque sugiere mejoras para la enseñanza y evita la formación de imágenes erróneas. Si la enseñanza se realiza fundamentalmente con prototipos y no se consideran distractores de orientación y contraejemplos, es más difícil la correcta formación del concepto geométrico.

La teoría de los conceptos figurales de Fischbein

Un planteamiento similar al anterior lo constituye la teoría de los conceptos figurales de Fischbein (1993), que denomina a las figuras geométricas “conceptos figurales” porque poseen características conceptuales y figurales simultáneamente.

En el proceso de razonamiento, las imágenes y los conceptos interactúan constantemente pudiendo producirse situaciones conflictivas. Un aspecto importante de la docencia consiste en enseñar a resolver dichos conflictos (López y Sánchez, 2007; Sánchez y López, 2011; Sánchez, 2012).

El modelo cognitivo de Duval

Un complemento de las teorías anteriormente descritas, lo constituye el modelo de Duval (Duval, 1995, 1998; Jones, 1998; Torregosa y Quesada, 2007), que estudia la Geometría desde un punto de vista cognitivo.

Propone que el razonamiento geométrico involucra tres tipos de procesos cognitivos (visualización, construcción y razonamiento), que se pueden realizar de forma separada si bien “*están estrechamente conectados y su sinergia es necesaria para la competencia en Geometría*” (Duval, 1998, pág.38).

En cuanto a la visualización, se plantea la pregunta metodológica de si es suficiente observar una imagen para ver lo que representa. Como respuesta, analiza cuatro tipos de apprehensiones cognitivas que se realizan de una figura (perceptiva, secuencial, discursiva y operativa).

METODOLOGÍA

La metodología utilizada en esta investigación refleja la concepción que se tiene de la práctica docente. El quehacer del profesor de Matemáticas es un compromiso con la mejora de la educación matemática realizado en el aula. Esto supone en primer lugar, reflexionar, después, investigar y analizar, y finalmente, proponer y actuar de manera permanente, estando estas actividades fuertemente interrelacionadas.

La hipótesis de la investigación es que los alumnos que inician la Educación Secundaria Obligatoria, tienen errores en sus imágenes conceptuales relativas a conceptos geométricos básicos y que, algunos de dichos errores, persisten a pesar del estudio de la asignatura. También se conjetura que su corrección depende, de manera significativa, de la metodología empleada por el profesor.

Objetivos

Para corroborar dichas hipótesis, se plantearon dos objetivos específicos.

El primer objetivo es detectar dichos errores, mediante el conocimiento de las imágenes conceptuales de los alumnos.

El segundo objetivo consiste en proponer una metodología eficaz para su corrección, basada en las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele, que integra las otras teorías sobre la formación del concepto geométrico expuestas en el epígrafe anterior.

Instrumentos metodológicos

El instrumento metodológico diseñado para lograr el primer objetivo es un cuestionario formado por 15 tareas articuladas en 48 ítems y dos preguntas de respuesta abierta, diseñado para ser administrado en una sesión de clase (menos de cincuenta minutos) que se encuentra disponible para su aplicación (Cabello, 2013; Cabello, Sánchez, y López, 2013).

A continuación se muestran las tareas propuestas en dicho cuestionario.

	CONTENIDO	ÍTEM
1	Reconocimiento de la posición relativa de dos rectas en el plano	1a, 1b, 1c, 1d, ítem de respuesta abierta
2	Reconocimiento de los tipos de ángulos	2a, 2b, 2c, 2d
3	Reconocimiento de la posición relativa de dos ángulos	3a, 3b, 3c
4	Determinación de los ángulos de un triángulo (semejanza y suma de ángulos)	4a, 4b, 4c, ítem de respuesta abierta
5	Clasificación de los triángulos según los lados	5a, 5b, 5c
6	Clasificación de los triángulos según los ángulos	6a, 6b, 6c, 6d
7	Identificación de la mediatriz de un segmento	7
8	Identificación de la bisectriz de un ángulo	8
9	Identificación de polígonos irregulares y cuadriláteros no paralelogramos	9a, 9b, 9c, 9d
10	Identificación de paralelogramos y sus áreas	10a1, 10b1, 10c1, 10a2, 10b2, 10c2
11	Identificación de los elementos de un polígono regular	11a, 11b, 11c, 11d
12	Identificación de los elementos de la circunferencia	12a, 12b, 12c, 12d
13	Reconocimiento de figuras circulares	13a, 13b, 13c, 13d
14	Cálculo del área de un triángulo conociendo la base y la altura	14
15	Identificación de ternas pitagóricas	15

Tabla 3. Contenido del cuestionario de medición del rendimiento en Geometría.

Para conseguir el segundo objetivo, se diseñaron unas unidades didácticas siguiendo las directrices de las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele, partiendo del conocimiento que proporcionó el pre-test sobre las imágenes conceptuales y sus errores, y utilizando un software de Geometría dinámica como herramienta de construcción para ayudar a la visualización, siguiendo la recomendación de Duval.

En concreto, en primer lugar se identificaron los errores correspondientes a cada una de las unidades didácticas del currículum, después se determinó la metodología específica de corrección de cada error y, finalmente, se diseñó el contenido de las fases de aprendizaje. A continuación se muestra un fragmento de la tabla utilizada. Para más detalle, se remite al lector a consultar la bibliografía (Cabello, 2013).

	ERRORES DETECTADOS	METODOLOGÍA DE CORRECCIÓN
Unidad 1	No identifican los objetos afectados por distractores de orientación.	Se dibujan los objetos con una orientación distinta a la habitual y se pide mover y manipular los objetos en la ventana de trabajo de Cabri.
	No verbalizan cuando se les pide justificar sus respuestas.	Se pide a los alumnos justificar sus respuestas.
	No reconocen rectas secantes, perpendiculares y perpendiculares giradas.	Se dibuja una recta en posición no habitual y se enseña a los alumnos a dibujar con Cabri, rectas paralelas, secantes y perpendiculares. Además se pide que en las rectas perpendiculares midan el ángulo para que comprueben que “aunque estén giradas, el ángulo mide 90°”.

Tabla 4. Extracto de la tabla de errores detectados y metodología de corrección, para el diseño de unidades didácticas.

La característica compartida por dichos instrumentos metodológicos es su aplicabilidad en el aula, lo cual permite que sean integrados en la dinámica de impartición del contenido curricular.

Diseño metodológico

En primer lugar procede decir que la muestra utilizada, como suele ser frecuente en estudios de Pedagogía y Psicología, fue incidental pues es la que se tuvo a disposición de la investigación en el momento en que se desarrolló (Pereda, 1987).

Se utilizó una muestra de 137 alumnos de 1º de ESO de dos Institutos de la Comunidad de Madrid, de la cual se seleccionaron dos grupos específicos.

Se aplicó el cuestionario (N=137) antes y después de estudiar Geometría.

Se calculó el porcentaje de aciertos de cada ítem. Se consideró que había error conceptual en la muestra de la investigación si el ítem era considerado como muy difícil, difícil o de dificultad media, según la interpretación de Yela (1987), es decir si menos del 54% de la muestra responde correctamente.

Denominación	ACIERTOS (%)
Muy difícil	Entre 5 y 24
Difícil	Entre 25 y 44
Dificultad media	Entre 45 y 54
Fácil	Entre 55 y 74
Muy fácil	Entre 75 y 95

Tabla 5. Interpretación de la dificultad de los ítems, basada en Yela (1987).

Se aplicaron las unidades didácticas diseñadas, como se ha dicho, según las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele, teniendo en cuenta los errores detectados en el pre-test y utilizando un software geométrico como ayuda para su corrección.

La investigación tuvo un diseño metodológico cuasi-experimental con pre-test y post-test. Como los grupos estaban constituidos, se eligieron dos de ellos (pertenecientes a la muestra anterior), en los que impartía clase la misma profesora y se comprobó que eran semejantes, es decir, sin diferencias significativas en el pre-test. El grupo de contraste (N=18) siguió una metodología tradicional (utilizando el lápiz y el papel, siguiendo las explicaciones del libro, los ejercicios propuestos y las actividades de ampliación) y el experimental (N=21) utilizó las unidades didácticas diseñadas para la investigación.

Concluida la experiencia, ambos grupos respondieron al cuestionario. Se calculó para cada alumno el valor del aprendizaje obteniendo diferencias significativas favorables al grupo experimental.

RESULTADOS

Una vez concluida la experiencia, se cuantificó el porcentaje de aciertos tanto en el pre-test como en el post-test para medir la evolución del error.

Ítem	Aciertos en el pre-test (%)	Si < 54% → error	Aciertos en el post-test (%)	Si < 54% → error
------	-----------------------------	------------------	------------------------------	------------------

Tabla 6. Análisis del error en el pre-test y en el post-test.

Con este criterio se catalogaron los ítems en tres grupos:

- Conocimientos en el pre-test que se mantienen en el post-test.
- Errores en el pre-test que se corrigen en el post-test.
- Errores en el pre-test que persisten en el post-test.

Existen errores geométricos persistentes

Esto ha permitido identificar que hay 14 errores persistentes en la muestra de la investigación (N=137), que corresponden a ocho de las tareas propuestas en el cuestionario y se presentan a continuación.

- 1) Reconocimiento de rectas perpendiculares giradas (1c).
- 2) Determinación de un ángulo de un triángulo conociendo los otros dos (4c).
- 3) Identificación de un pentágono irregular, trapecios y trapezoide (9a, 9b, 9c, 9d).
- 4) Identificación del área del romboide (10c2).
- 5) Identificación de la apotema y el radio de un polígono regular (11a, 11c).
- 6) Identificación de la cuerda de la circunferencia (12c).

- 7) Reconocimiento del sector, segmento y trapecio circular (13b, 13c, 13e).
- 8) Identificación de las ternas pitagóricas (15).

Las fases de aprendizaje determinan una metodología eficaz

Para cada alumno se calculó una puntuación de cambio llamada “aprendizaje” (nota del post-test – nota del pre-test) y se halló la media en cada uno de los grupos. La media del aprendizaje para el grupo de contraste fue 1,4006 y para el grupo experimental 2,4702. La prueba t de Student para muestras independientes, reflejó diferencias significativas en el aprendizaje favorables al grupo experimental ($0,006 < 0,01$).

	grupo	N	Media	Desviación típica	Error típico de la media
aprendizaje	De contraste	18	1,4006	1,33661	0,31504
	Experimental	21	2,4702	0,94622	0,20648

Tabla 7. Estadísticos de grupo para contrastar el aprendizaje según el grupo de pertenencia, tomado de Cabello (2013).

		Prueba de Levene para la igualdad de varianzas		Prueba T para la igualdad de medias						
		F	Sig.	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Error típ. de la diferencia	99% Intervalo de confianza para la diferencia	
		Inferior	Superior	Inferior	Superior	Inferior	Superior	Inferior	Superior	Inferior
aprendizaje	Se han asumido varianzas iguales	0,317	0,577	-2,915	37	0,006	-1,06959	0,36691	-2,06590	-0,7328
	No se han asumido varianzas iguales			-2,840	30,032	0,008	-1,06959	0,37668	-2,10538	-0,3380

Tabla 8. Prueba t de Student para muestras independientes, para determinar la eficacia de la metodología experimental, tomada de Cabello (2013).

Además, se calculó el tamaño del efecto con la fórmula de Cohen (1988), para cuantificar, de manera más interpretable, la diferencia en el aprendizaje entre los dos grupos, obteniendo el valor $d=0,9357 > 0,80$, lo que significa que la diferencia es grande (Morales, 2012).

De todos modos, como era deseable constatar la eficacia de esta metodología de una manera más didáctica, se analizaron los errores persistentes en dichos grupos.

En el grupo experimental, de los 14 errores solo persisten 5 de los cuales 3 están casi corregidos, y solo 2 quedan pendientes de corregir.

En el grupo de contraste, que solo tenía 12 errores de los 14 mencionados, persisten 8, 3 están casi corregidos mientras que 5 están todavía pendientes de corregir.

Es decir, el experimental corrige 9 errores de los llamados “persistentes” mientras que el de contraste solo 4.

Los errores que mantiene el grupo experimental son:

- 1) Identificación del trapecio rectángulo girado (9c).
- 2) Identificación de las ternas pitagóricas (15).

Los errores que mantiene el grupo de contraste son:

- 1) Determinación de un ángulo de un triángulo conociendo los otros dos (4c).
- 2) Identificación del trapecio rectángulo girado (9c).
- 3) Identificación del radio de un polígono regular (11c).
- 4) Reconocimiento del segmento circular (13c).
- 5) Identificación de las ternas pitagóricas (15).

En la siguiente tabla se muestra en detalle dicho estudio.

ERRORES	Error en el grupo experimental		Error en el grupo de contraste	
	% aciertos pre-test	% aciertos post-test	% aciertos pre-test	% aciertos post-test
E 1 1c	47,6	E 71,4	66,7	55,6
E 2 4c	14,3	E 52,4	E 27,8	E 27,8
E 3	9a	E 9,5	66,7	16,7
	9b	E 33,3	71,4	50,0
	9c	E 23,8	E 42,9	E 11,1
	9d	E 33,3	E 52,4	E 38,9
E 4 10c2	14,3	E 66,7	27,8	E 50,0
E 5	11a	0,0	E 61,9	0,0
	11c	4,8	E 52,4	E 38,9
E 6 12c	52,4	E 81,0	22,2	E 50,0
E 7	13b	47,6	E 57,1	66,7
	13c	42,9	E 66,7	38,9
	13e	42,9	E 81,0	33,3
E 8 15	4,8	E 38,1	E 0,0	E 33,3

Tabla 9. Estudio de los errores persistentes, en el grupo experimental y en el de contraste.

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Estos errores no eran los esperados a priori, lo cual revela la importancia de tener datos reales de la situación inicial de los alumnos para realizar una enseñanza eficaz.

La relevancia de la detección de los errores persistentes está en que permite determinar la eficacia de la metodología de enseñanza y también en que indica los errores con los que los alumnos comienzan 2º de ESO.

Error 1

Un error persistente a pesar del estudio de la Geometría es no reconocer las rectas perpendiculares giradas.

Se ha constatado que es necesario diseñar una estrategia para conseguir la visualización de las rectas perpendiculares giradas que, en concreto, ha sido la construcción de rectas perpendiculares a otras en posición no habitual y la comprobación de que “aunque estén giradas, los ángulos miden 90° ”.

Error 2

Otro error persistente es no saber determinar el valor de un ángulo de un triángulo cuando se conocen los otros dos. Se ha visto que hace falta realizar un planteamiento para que los alumnos adquieran este concepto.

Error 3 (comprende 4 errores)

Tampoco identifican el pentágono irregular, los trapecios y trapezoide, porque en la enseñanza, no se ha trabajado suficientemente con polígonos irregulares y cóncavos.

Para subsanar este error, convendría, en primer lugar, trabajar más con polígonos irregulares y cóncavos y además, incidir en la distinción entre pentágonos irregulares y trapezoides.

En segundo lugar, analizando de manera conjunta las respuestas a los ítems relativos a los trapecios y trapezoides se observa que los alumnos no los distinguen y tienden, o bien a denominarlos de manera genérica como cuadriláteros o a confundirlos entre sí. Esto sería admisible en Primaria pero no en 1º de ESO, por lo que hay que incidir en la enseñanza en aprender a nombrar cada figura.

Error 4

Desconocen también el área del romboide y aplican el área del triángulo. Para corregirlo se deben realizar más ejercicios en los que se deje claro que en el área del romboide “no hay que dividir entre 2” y practicar en la obtención del área del romboide a partir del rectángulo formado.

Error 5 (contiene dos errores)

Confunden la apotema de un polígono regular con el radio. Para corregir este error sería necesario realizar más ejercicios de identificación y construcción de los elementos de las distintas figuras geométricas.

Desconocen el radio o lo denominan diagonal. Como en el caso del a apotema, para corregir este error sería preciso realizar más ejercicios de identificación y construcción de los elementos de las distintas figuras geométricas y, en concreto, diferenciarlo de la diagonal.

Error 6

No identifican la cuerda en una circunferencia o la confunden con el arco. Este error podría corregirse realizando más práctica de diferenciación de la cuerda y el arco, además de los ejercicios de identificación de los elementos de la circunferencia y demás figuras geométricas.

Error 7 (incluye tres errores)

De las figuras circulares solo reconocen el círculo y la corona circular, es decir, lo mismo que en Primaria. Siguen sin reconocer el sector circular, el trapecio circular y el segmento circular, confundiendo dichos elementos entre sí, porque se ha trabajado poco con estos tres objetos.

Error 8

La tarea de identificación de ternas pitagóricas supone un grado de comprensión en Geometría que realmente la mayoría de los alumnos no tienen por lo que es necesario idear una estrategia que guíe al alumno en su comprensión.

CONCLUSIONES

Se puede concluir que la propuesta didáctica basada en las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele, partiendo del conocimiento de las imágenes conceptuales de los alumnos y utilizando un software geométrico para la corrección de errores ha demostrado ser eficaz pues cumple la dimensión más profunda de la docencia, que no solo es enseñar sino corregir.

Valorando la propia experiencia, se considera muy recomendable para los profesores el diseño de unidades didácticas basadas en el modelo de Van Hiele.

Los resultados obtenidos en esta investigación son generalizables pues constituyen una propuesta metodológica basada en la detección de imágenes conceptuales y errores y en la implementación curricular del modelo de Van Hiele a partir de dichos datos.

REFERENCIAS

- Cabello, A. B. (2013). *La modelización de Van Hiele en el aprendizaje constructivo de la Geometría en Primero de la Educación Secundaria Obligatoria a partir de Cabri*. Tesis Doctoral. Universidad de Salamanca.
- Cabello, A. B., Sánchez, A., y López, R. (2013). Significatividad de la implementación curricular del modelo de Van Hiele. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa, y N. Ciment, *Investigación en Educación Matemática XVII* (págs. 193-207). Bilbao: SEIEM.
- Cohen, J. (1988). *Statistical Power Analysis for the Behavioral Sciences*. New York: Academic Press.
- Corberán, R., Gutiérrez, A., Huerta, M., Jaime, A., Margarit, J., Peñas, A., y Ruiz, E. (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la Geometría en Enseñanza Secundaria basada en el Modelo de Razonamiento de van Hiele*. Madrid: M.E.C.
- Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: kinds of representation and specific processings. En R. Sutherland, y J. Mason, *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education* (págs. 142-157). Berlin: Springer.
- Duval, R. (1998). Geometry from a Cognitive Point of View. En C. Mammana, y V. Villani, *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: an ICMI study* (págs. 37-51). Dordrecht: Kluwer.
- Fischbein, E. (1993). La teoría de los conceptos figurales. *Educational Studies in Mathematics*, 24 (2), 139-162.
- Gutiérrez, A., y Jaime, A. (1998). On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning. *Focus on Learning Problems in Mathematics* 20 (2 y 3), 27-46.
- Gutiérrez, A., Jaime, A., y Fortuny, J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels. *Journall for Research in Mathematics Education* 22 (3), 237-251.
- Hershkowitz, R. (1987). The acquisition of concepts and misconceptions in basic Geometry or when “a little learning is a dangerous thing”. *Proceedings of the Second International Seminar on Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics III* (págs. 238-251). Ithaca, New York: Cornell University.
- Hershkowitz, R. (1989). Visualization in Geometry—Two sides of the coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics (Volume II. Number 1)*, 61-76.
- Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects on learning Geometry. En P. Nesher, y J. Kilpatrick, *Mathematics and cognition* (págs. 70-95). Cambridge: Cambridge UP.
- Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de van Hiele: la enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento*. Valencia: Universidad de Valencia.
- Jaime, A., y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la Geometría: El modelo de van Hiele. En S. Llinares, y M. Sánchez, *Teoría y práctica en educación matemática* (págs. 295-384). Sevilla: Alfar.

- Jaime, A., y Gutiérrez, A. (1994). A model of test design to assess the Van Hiele levels. *Proceedings of the 18th PME Conference 3*, 41-48.
- Jaime, A., y Gutiérrez, A. (1995). Guidelines for Teaching Plane Isometries in Secondary School. *The Mathematics Teacher*, 88 (7), 591-597.
- Jones, K. (1998). Theoretical Frameworks for the Learning of Geometrical Reasoning. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics 18 (1 y 2)*, 29-34.
- López, R., y Sánchez, A. (2007). Componentes cognitivos generadores de errores algorítmicos: caso particular de la sustracción. *Revista de Educación*, 344, 377-402.
- Morales, P. (2012). *El tamaño del efecto (effect size): análisis complementarios al contraste de medias*. Obtenido de <http://www.upcomillas.es/personal/peter/investigacion/Tama%F1oDelEfecto.pdf>
- Pereda, S. (1987). *Psicología Experimental. I Metodología*. Madrid: Pirámide.
- Sánchez, A. (2012). The Interaction between Intuitive, Interpretations, Linguistic Knowledge and Algorithmic Components in Children's (Aged 7-9) Subtraction Errors. *British Journal of Educational Research*, 2(1), 20-41.
- Sánchez, A. (2013). Algorithmic Errors. Cognitive Processes and Educational Actions. *Teoría de la Educación*. Revista Interuniversitaria, 25(1), 215-235.
- Sánchez, A., y López, R. (2011). La transferencia de aprendizaje algorítmico y el origen de los errores en la sustracción. *Revista de Educación*, 354, 429-445.
- Torregosa, G., y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en Geometría. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 10 (2)*, 275-300.
- Van Hiele, P. M. (1957). *El problema de la comprensión en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la Geometría*. Utrecht: Universidad Real de Utrecht.
- Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight. A theory of Mathematics Education*. New York: Academic Press.
- Vinner, S. (1975). The Naive Platonic Approach as a Teaching Strategy in Arithmetics. *Educational Studies in Mathematics*, 6, 339-350.
- Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology Vol 14*, 293-305.
- Vinner, S., y Hershkowitz, R. (1980). Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. En R. Karplus, *Proceedings of the 4th PME International Conference* (págs. 177-184).
- Vinner, S., y Hershkowitz, R. (1983). On concept formation in Geometry. *Zentralblatt für Didaktik in Geometry*, Vol. 83, nº 1, 20-25.
- Yela, M. (1987). *Introducción a la teoría de los tests*. Madrid: Facultad de Psicología. Universidad Complutense.