Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2014, Vol. 31(1), nº 86, 77-91*

Una aplicación didáctica del método de Fourier-Motzkin a los problemas de programación matemática

Gabriel Ruiz-Garzón
Departamento de Estadística e I.O.
Universidad de Cádiz

Resumen: *En 1826, Fourier propuso un método de eliminación de variables para resolver un sistema lineal de desigualdades. Este método es similar al método de eliminación de Gauss para un sistema de ecuaciones y puede ser usado para resolver problemas de programación matemática. También se propone utilizar, en nuestras clases, el teorema de la Alternativa, para relacionar sistemas de ecuaciones e inecuaciones.*
Palabras clave: *Problema de programación matemática, método de eliminación de Fourier-Motzkin, teoremas de la Alternativa, sistemas de desigualdades*

Fourier-Motzkin elimination method: A didactic application to mathematical programming problems

Abstract: *In 1826, Fourier treated a method of elimination of variables to solve linear inequalities system. This method is similar to Gauss elimination method to equations system and can be used to solve mathematical programming problems. Also, in our classes, we propose to use theorems of the Alternative to relate equations and inequalities system.*
Keywords: *Mathematical programming problem, Fourier-Motzkin elimination, Theorems of the Alternative, systems of inequalities*

ANTECEDENTES

Antes de exponer cómo aplicar el método de Fourier-Motzkin, en nuestras clases, comenzaremos con unas pequeñas pinceladas biográficas de los personajes protagonistas: Jean Baptiste Joseph Fourier y Theodore S**.** Motzkin.

Fourier nace en Auxerre en 1768 y muere en París en 1830. Proveniente de una familia humilde, de padre sastre, se quedaría huérfano a la edad de 10 años. Cuentan que Fourier con 14 años entendía perfectamente libros avanzados de álgebra y geometría, siendo autor, a la edad de 18 años, de una memoria sobre la localización de las raíces de ecuaciones algebraicas.

En aquella época, la condición social de Fourier sólo le dejaba dos opciones para conseguir un ascenso social, bien mediante el ingreso en la milicia o en el clero. Pero no lograría entrar en la Academia Militar de Artillería, y eso a pesar de contar con el apoyo de Legendre, debido no ser miembro de la nobleza. Ante este rechazo opta por ingresar como novicio en la Abadía de Saint-Benoîts sur Loire. En 1789 decide, dar un giro a su vida, no toma los hábitos y se marcha a un París inmerso en la Revolución Francesa. Tras tomar parte activa en el proceso revolucionario ingresa en prisión, para posteriormente ser excarcelado tras la ejecución de Robespierre.

En 1978 formó parte de la expedición francesa que ocupó Egipto. Durante el Imperio, Napoleón le nombraría comandante en jefe de la Armada de Oriente y secretario perpetuo del Instituto del Cairo, donde se ocupó de aspectos científicos e históricos. En los tres años que duró la ocupación francesa de Egipto se midió la altura de las pirámides o se descubriría la *"piedra de Rosetta"*. Napoleón le premió con el título de barón, aunque en la última etapa de su vida tuvieron desavenencias. También participó en la confección de los 4 primeros volúmenes de *Recherches statistiques sur la Ville de París*, donde propondrá la presentación de los datos a través de tablas, análogas a las que ya resumían las estadísticas judiciales en las *Comptes généraux de la justice criminalle en France.*

Fig. 1. J.B.J. Fourier

En 1794 estudiaría en la École Normale de París, teniendo como profesor a Lagrange quién diría de Fourier que: *"Era el primero entre los hombres europeos de la ciencia"*. Fue también profesor de la École Polytechnique bajo la dirección de Carnot y Monge.

El mayor reconocimiento llegaría en 1817 al ser primeramente elegido miembro de la Academia de Ciencia y con posterioridad, en 1822, secretario perpetuo de la misma, lo que le permitió publicar su gran obra *Théorie Analytique de la Chaleur* (Teoría analítica del Calor), donde desarrollará el método sobre series trigonométricas que hoy llamamos Análisis de Fourier. Dicha obra había sido previamente presentada, en 1812, a un premio del Instituto Nacional bajo el epígrafe *"Et ignem regunt numeri"* (El fuego también está regido por los números), con la que lograría el primer premio en un jurado donde estaban presentes matemáticos de la talla de Lagrange, Laplace, Legendre, Malus, Haüy. ¡Ahí, es nada!

Fourier continuó con los estudios de su maestro Lagrange sobre lo que hoy llamaríamos optimización matemática. En 1788, Lagrange publicó en su *Mecánique Analytique,* un método para calcular el extremo de una función sujeta a restricciones en igualdad. Lo describe como una herramienta para encontrar un estado de equilibrio estable de un sistema mecánico. En Física, al igual que en otras ciencias, como en Economía, interesan los puntos donde se alcanza un equilibrio, ya sea entre oferta y demanda o entre sistemas de fuerzas, o masas, etc. Con notación actual podríamos expresar la citada condición de la siguiente manera:

Teorema. *Si $\vartheta(x)$ denota la función potencial y sea el problema de programación matemática*

$$\begin{aligned} &Min\ \vartheta(x) \\ &s.a\ g_i(x) = 0,\ i=1, \cdots, m \end{aligned}$$

la condición necesaria del lagrangiano $L(x,\lambda) = \vartheta(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$ *para alcanzar el equilibrio del sistema establece que en el punto mínimo x, es donde el gradiente de $\vartheta(x)$ puede ser expresado como una combinación lineal de los gradientes de $g_i(x)$.*

$$\nabla \vartheta(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x) = 0$$

Los factores λ_i que forman la combinación lineal de estos gradientes son llamados los multiplicadores de Lagrange.

Al calcular el lagrangiano estamos complicando la función objetivo, pero se observa fácilmente que los óptimos del lagrangiano coinciden con los óptimos de la función a optimizar. Resulta paradójico que siendo los matemáticos tan amigos de simplificaciones, el cálculo del lagrangiano sea una de las pocas veces que en Matemáticas complicar una situación, ayuda a resolverla.

Con la *Mecánique Analytique,* Lagrange convierte a esta parte de la Física en una rama del Análisis Matemático. En el prólogo escribe:

Que nadie busque figuras en esta obra. Los métodos que se expondrán no requieren ni construcciones mecánicas ni geométricas, sólo operaciones algebraicas, tratadas en un curso regular (Lagrange, 1853).

Resuelto por Lagrange el problema de optimizar una función con restricciones en igualdad, llegará Fourier para estudiar el problema de optimización *con restricciones en desigualdad*

$$\begin{aligned} &Min\ \vartheta(x) \\ &s.a\ g_i(x) \geq 0, \quad i = 1, \cdots, m \end{aligned}$$

Fourier fue el primero en formalizar un problema, como un problema de programación matemática lineal y formular el principio de desigualdad para el equilibrio mecánico de la siguiente manera:

La suma de los momentos de las fuerzas aplicadas es positiva para todos sus desplazamientos, pero es imposible desplazar un cuerpo sólido que está en equilibrio de tal manera que el momento total de las fuerzas aplicadas sea negativo (Fourier, 1798).

Si denotamos las fuerzas que actúan en un sistema mecánico como $P,Q,R,\ldots$ su momento total está definido como la suma de los productos escalares

$$P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \ldots$$

donde δp, δq y δr, ... son las variaciones de los desplazamientos.

Si el potencial ϑ existe, entonces

$$P = -\frac{\partial \vartheta}{\partial p}, \quad Q = -\frac{\partial \vartheta}{\partial q}, \quad R = -\frac{\partial \vartheta}{\partial r}, \ldots$$

Y el momento total de las fuerzas del sistema queda como

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial p}\delta p + \frac{\partial \vartheta}{\partial q}\delta q + \frac{\partial \vartheta}{\partial r}\delta r + \ldots \geq 0$$

O sea,

Teorema. *Si un sistema mecánico está en equilibrio estable entonces el potencial tiene un mínimo local y se observa, que el total diferencial es no negativo en el punto mínimo de la función.*

Matemáticamente podemos decir que la condición necesaria para que se dé tal equilibrio, establecida por Fourier y comparable a la estudiada por Lagrange, es que el gradiente de la función objetivo pueda ser expresado como una combinación lineal no negativa de los gradientes de las restricciones.

El otro protagonista de este artículo es el matemático alemán Theodore S**.** Motzkin (1908-1970). Educado en el seno de una familia judía, publica su tesis doctoral sobre programación matemática en 1934. En 1935 enseña en la Universidad Hebrea de Jerusalén, donde trasladó numerosa terminología matemática al hebreo. Durante la Segunda Guerra Mundial trabaja como criptógrafo para el gobierno británico. En 1948, tras la Segunda Guerra Mundial, emigra a los Estados Unidos, llegando a dar clases en Harvard y Boston. En 1950 ingresa como profesor en la Universidad de California-Los Ángeles, donde investiga sobre diversos temas, como teoría de grafos, geometría algebraica, análisis numérico, etc.

Fig. 2. Theodore S. Motzkin

PROPUESTA DIDÁCTICA

Existen básicamente dos métodos didácticos que solemos utilizar para enseñar, tanto a alumnos de Bachillerato como de grado, la resolución de problemas lineales de programación matemática (ver Hillier y Lieberman, 1991, Rufián-Lizana et al., 2011, Ruiz-Garzón, 2013).

El primero es el método gráfico. A grandes rasgos, el método parte de representar las regiones del plano que cumplen cada una de las restricciones. La intersección de esas regiones nos daría la región factible y ver después el punto o puntos extremos de la región factible donde la función objetivo alcanza el óptimo, tras desplazarnos dentro de la región factible, mediante rectas paralelas a la función objetivo o bien evaluando cada vértice de la región factible en la función objetivo.

El segundo pasa por la resolución mediante el Algoritmo del Simplex. El algoritmo parte de una solución básica factible y busca un número finito de otras soluciones básicas factibles, hasta encontrar una que satisface las condiciones de optimalidad. El alumno es capaz de ir construyendo tablas en las que, mediante cambios de base adecuados, se va pasando de un punto extremo a otro punto extremo contiguo del polígono, que conforma la región factible, consiguiendo en cada tabla una mejora del valor de la función objetivo, hasta que no sea posible mejorar más, en cuyo caso, ese extremo será la solución del problema. Hasta aquí la forma tradicional.

La propuesta que aquí se hace, pasa por la utilización de un método consistente en la eliminación de variables de un sistema de desigualdades lineales, análogamente a como se hace con un sistema de ecuaciones (Lauritzen, 2013). El método de eliminación de Gauss para ecuaciones fue publicado en 1810, para resolver el sistema de ecuaciones normales que se obtenían al aplicar el método de mínimos cuadrados, al calcular la órbita del asteroide Pallas.

Así, cuando un alumno decide resolver el siguiente sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$x + y + z = 3 \ [1]$$
$$x + y - z = 1 \ [2]$$
$$2x + y - z = 2 \ [3]$$

Elige una incógnita a eliminar, pongamos la z, y realiza una serie de operaciones al objeto de conseguir que un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas pase a otro de dos ecuaciones y dos incógnitas. En nuestro caso, si cogemos las ecuaciones [1] y [2] y las sumamos, y hacemos lo mismo con la [1] y [3], obtenemos el sistema:

$$2x + 2y = 4$$
$$3x + 2y = 5$$

Podemos volver a escoger otra variable a eliminar de ambas ecuaciones, pongamos la y. Tras restar las dos anteriores ecuaciones nos da la solución $x=y=z=1$.

Fourier propone el siguiente método, en un artículo sobre desigualdades, titulado *Solution d'une question particulière du calcul des inégalités* (Fourier, 1826). Más tarde, este método propuesto por Fourier sería redescubierto (Motzkin, 1936), de ahí el nombre de teorema de Fourier-Motzkin. En el artículo, Fourier resuelve el siguiente problema sobre la intersección de seis líneas, en un polígono convexo irregular y que geométricamente adopta la siguiente forma:

$$x < y(1+k), \quad y < x(1+k)$$
$$y < z(1+k), \quad z < y(1+k)$$
$$z < x(1+k), \quad x < z(1+k)$$
$$x + y + z = 1$$

donde k es una constante positiva.

Una desigualdad $a=b$ puede ser vista como dos desigualdades $a \leq b$ y $a \geq b$. El algoritmo de Fourier consiste en resolver sistemas de desigualdades lineales, igual que se hace para el caso de un sistema de ecuaciones lineales.

El objetivo es encontrar otro sistema de desigualdades lineales, con menos variables que el original, y que ambos sistemas compartan soluciones.

Si conseguimos eliminar todas las variables del sistema de desigualdades y quedarnos con un sistema de desigualdades de constantes, en el que podemos decidir si son verdad o mentira, entonces, si ese último sistema de desigualdades tiene solución, el original también la tendrá y viceversa.

Teorema "sándwich" de Fourier-Motzkin:

Sea $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_s \in R$. *Entonces max* $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\} \leq \min\{\beta_1, \ldots, \beta_s\}$ *si y sólo si* $\alpha_i \leq \beta_j$ *para todo i, j con* $1 \leq i \leq r$ *y* $1 \leq j \leq s$.

Veamos su aplicación con un ejemplo.

Ejemplo 1: Imaginemos que quiero

$$\begin{aligned}
&\text{Max } z = x_1 + x_2 \\
&\text{s.a.} \\
&2x_1 + x_2 \leq 4 \\
&x_1 + 3x_2 \leq 15 \\
&-x_1 \leq 0 \\
&-x_2 \leq 0
\end{aligned}$$

Primeramente lo que se hace es introducir la función objetivo en el sistema de desigualdades que definen la región factible

$$\begin{aligned}
z &= x_1 + x_2 \\
2x_1 + x_2 &\leq 4 \\
x_1 + 3x_2 &\leq 15 \\
-x_1 &\leq 0 \\
-x_2 &\leq 0
\end{aligned}$$

Decido eliminar la variable x_1 sustituyendo $x_1 = z - x_2$ en las desigualdades restantes

$$
\begin{aligned}
2(z-x_2)+x_2 &\le 4\\
z-x_2+3x_2 &\le 15\\
-(z-x_2) &\le 0\\
-x_2 &\le 0
\end{aligned}
$$

Así pasamos de tener 3 variables a tener sólo 2. Ahora reescribimos el sistema para prepararnos para eliminar x_2, dividiendo las desigualdades en 3 grupos (I_+), (I_-) y (I_0), dependiendo de si el coeficiente de x_2 es positivo, negativo o cero, respectivamente.

(I_+) $2x_2+z\le 15$, $x_2-z\le 0$, (I_-) $-x_2+2z\le 4$, $-x_2\le 0$ (I_0) No tengo

Con lo que el sistema quedaría como:

$$
\begin{aligned}
x_2 &\le \frac{15-z}{2}\\
x_2 &\le z\\
-4+2z &\le x_2\\
0 &\le x_2
\end{aligned}
$$

Luego tenemos que el sistema anterior tiene solución en z y x_2, si la expresión siguiente la tiene en z,

$$\max\{-4+2z,0\}\le x_2\le \min\left\{\frac{15-z}{2},z\right\}$$

Aplicamos el teorema “sándwich” de Fourier-Motzkin. Vemos que efectivamente el valor de la variable x_2 queda atrapado entre los dos “trozos de pan”, es decir, entre el máximo y el mínimo de dos expresiones. El sistema inicial es equivalente a

$$
\begin{aligned}
-4+2z &\le \frac{15-z}{2}\\
-4+2z &\le z\\
0 &\le \frac{15-z}{2}\\
0 &\le z
\end{aligned}
$$

Tenemos ya desigualdades con una sola incógnita z, cuya solución es $0\le z\le 4$. El valor máximo de z es 4 que insertado en la siguiente expresión

$$\max\{-4+2z,0\} \le x_2 \le \min\left\{\frac{15-z}{2}, z\right\}$$

nos da un valor de $x_2 = 4$ y por tanto $x_1 = z - x_2 = 0$. La solución del problema es el punto $(x_1, x_2) = (0,4)$ y el valor del óptimo es $z=4$, como podemos comprobar gráficamente a mano o utilizando algún software en la figura 3 (Bejarano, 2009).

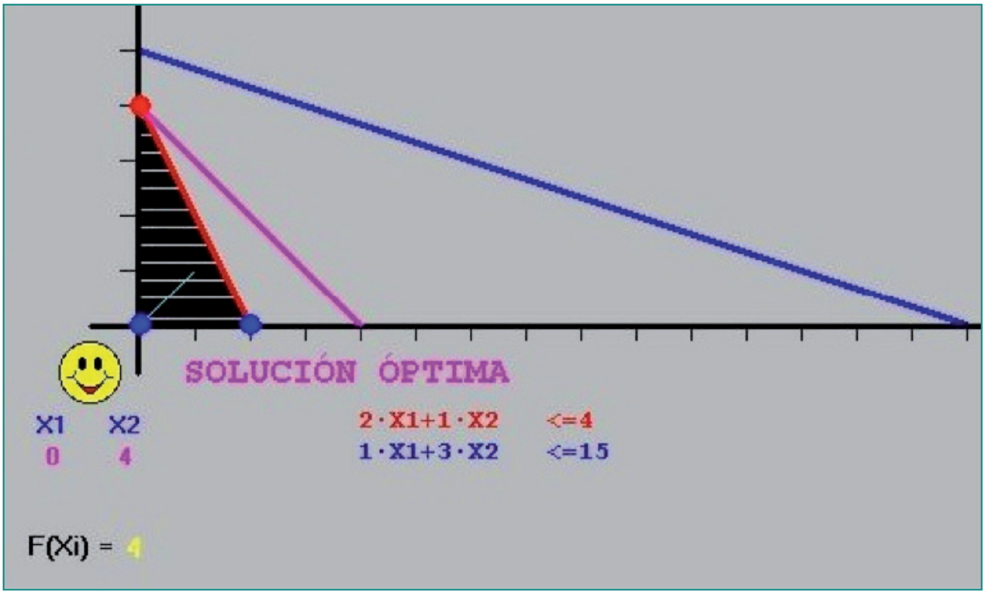

Fig. 3. Resolución gráfica del ejemplo 1

Ejemplo 2: *En una fábrica se construyen sillas grandes y pequeñas. Las sillas grandes necesitan 4 metros cuadrados de madera y las pequeñas 3. El fabricante necesita construir al menos 3 sillas grandes y al menos el doble de pequeñas que de grandes. Se dispone de 60 metros cuadrados de madera y los beneficios son de 1 unidad monetaria por silla pequeña y grande. ¿Cuántas sillas de cada tipo se deben fabricar para obtener el beneficio máximo?*

Es decir, lo que se quiere es:

$$\begin{aligned}&\text{Max } z = x_1 + x_2\\&\text{s.a.}\\&\quad -x_1 \le -3\\&\quad 2x_1 - x_2 \le 0\\&\quad 4x_1 + 3x_2 \le 60\end{aligned}$$

Primero introduciremos la función objetivo en el sistema de desigualdades, que definen la región factible:

$$z = x_1 + x_2$$
$$-x_1 \leq -3$$
$$2x_1 - x_2 \leq 0$$
$$4x_1 + 3x_2 \leq 60$$

Decido eliminar la variable x_1 sustituyendo $x_1 = z - x_2$ en las desigualdades restantes

$$-(z - x_2) \leq -3$$
$$2(z - x_2) - x_2 \leq 0$$
$$4(z - x_2) + 3x_2 \leq 60$$

Reescribimos el sistema para prepararnos para eliminar x_2

$$x_2 \leq -3 + z$$
$$\frac{2z}{3} \leq x_2$$
$$-60 + 4z \leq x_2$$

Luego tenemos que

$$\max\left\{\frac{2z}{3}, -60 + 4z\right\} \leq x_2 \leq \min\{-3 + z\}$$

Aplicando el teorema de Fourier-Motzkin tenemos que

$$\frac{2z}{3} \leq -3 + z \Rightarrow 9 \leq z$$
$$-60 + 4z \leq -3 + z \Rightarrow z \leq 19$$

Obtenemos ya desigualdades con una sola incógnita cuya solución es $9 \leq z \leq 19$.
El valor máximo de z es 19 que insertado en la siguiente impresión

$$\max\left\{\frac{2z}{3}, -60 + 4z\right\} \leq x_2 \leq \min\{-3 + z\}$$

nos da un valor de $x_2 = 16$ y por tanto $x_1 = z - x_2 = 19 - 16 = 3$. Gráficamente lo podemos comprobar con la figura 4.

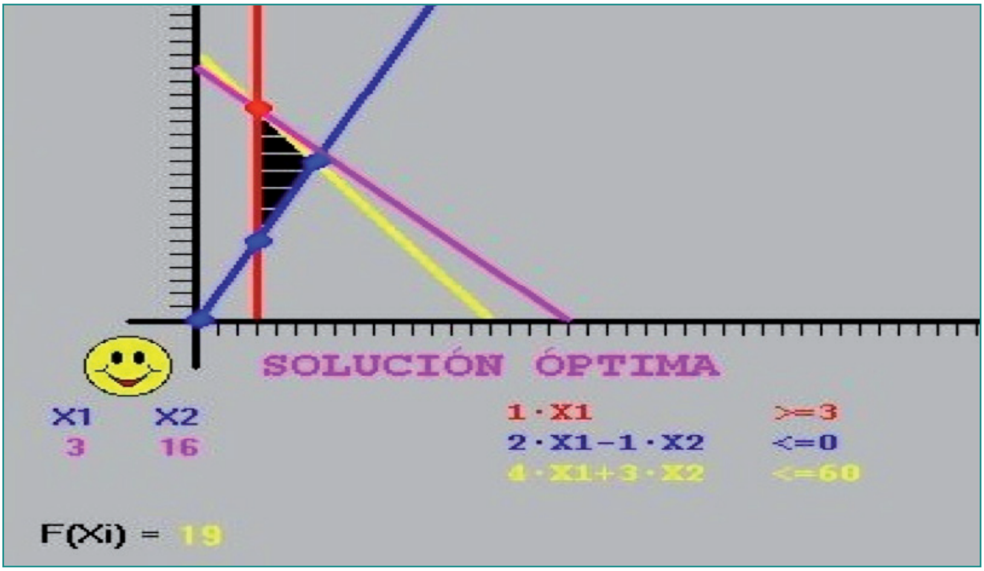

Fig. 4. Resolución gráfica del ejemplo 2

Hasta aquí hemos visto el teorema de Fourier-Motzkin para resolver problemas de programación lineal y su aplicación en nuestras clases, un método innovador y menos monótono que el usado en los libros de texto, además que puede hacer que el alumno razone.

Veamos ahora otro detalle no menos trascendente, relacionado con Motzkin y la resolución de problemas de programación matemática.

Se trata de la importancia de las soluciones no negativas de un conjunto de desigualdades y ecuaciones. Esta relevancia no fue tan evidente hasta que en 1947, George B. Dantzig (1914-2005) diera el Algoritmo del Simplex para resolver el problema de programación lineal. La aplicación del citado algoritmo a la Economía, les valió a Kantorovich y a Koopmans, quienes habían trabajado con Dantzig, el premio Nobel de Economía. Una de las hipótesis del método del Simplex es suponer que todas las variables son negativas, partiendo del origen de coordenadas como primera solución factible, de ahí que en los ejemplos anteriores observemos que la región factible se encuentra en el primer cuadrante. Los llamados teoremas de la Alternativa juegan un decisivo papel a la hora de obtener dichas soluciones no negativas y condiciones necesarias de optimalidad (Mangasarian, 1969).

Estos teoremas de la Alternativa envuelven dos sistemas de ecuaciones lineales, que podemos denotar por (I) y (II). Un típico Teorema de la Alternativa asegura que o el sistema (I) tiene solución o es el sistema (II) el que tiene solución, pero nunca ambos a la vez.

En 1898 el matemático húngaro Gyula Farkas (1847-1930) también demostró dicha condición necesaria de Lagrange. El 17 de Diciembre de 1894 lee ante la Academia húngara su escrito titulado *Sobre las aplicaciones del principio mecánico de Fourier.*

También demostró el siguiente Teorema de la Alternativa:

Teorema de la Alternativa (Farkas). *Para cada matriz dada A, y b un vector ó*

(I) $bx>0$, $Ax \leq 0$ *tiene una solución x*

ó,

(II) $A^t y=b$, $y \geq 0$ *tiene una solución y*

pero nunca ambos.

El Teorema de Farkas se utiliza para proteger celdas con valores confidenciales en tablas estadísticas, es decir, decidir qué ocultar, pero minimizando la pérdida de información que se produce.

Otra aplicación nace en el campo del transporte, cuando se necesita diseñar la ruta de un vehículo con capacidad limitada, para que recoja y entregue pedidos de un producto a través de unos clientes. El objetivo es minimizar los costes de la ruta, mientras se mantienen los límites de carga del vehículo y las demandas de los clientes.

En 1936, Theodore S. Motzkin demuestra su Teorema de la Alternativa que es más general que el de Farkas.

Teorema de la Alternativa (Motzkin). *Para cada matriz dada A, C y D, siendo A no vacía o*

(I) $Ax>0$, $Dx=0$ *tiene una solución x*

ó

(II) $A^t y_1 + C^t y_3 + D^t y_4 = 0$, $y_1 \geq 0$, $y_3 \geq 0$ *tiene una solución y,*

pero nunca ambos.

Este teorema también puede ser utilizado para probar el teorema de dualidad del problema de programación matemática lineal. Pero veamos seguidamente, mediante un ejemplo, la utilidad de los Teoremas de la Alternativa.

Ejemplo 3: Sea

$$x_1 + x_2 \leq 4$$
$$-x_1 + x_2 \leq -5$$
$$-x_1 \leq 0$$
$$-x_2 \leq 0$$

Decido eliminar la variable x_1, dividiendo las desigualdades en 3 grupos (I_+), (I_-) y (I_0), dependiendo de si el coeficiente de x_1 es positivo, negativo o cero, respectivamente.

$$(I_+)\ x_1 + x_2 \leq 4\,,\ (I_-)\ -x_1 + x_2 \leq -5\,,\ -x_1 \leq 0\,,\ (I_0)\ \ -x_2 \leq 0$$

Reescribo el sistema de la siguiente manera:

$$x_1 \leq 4 - x_2$$
$$5 + x_2 \leq x_1$$
$$0 \leq x_1$$
$$0 \leq x_2$$

Aplicamos el teorema Fourier-Motzkin, y el sistema inicial en x_1 y x_2 es equivalente al siguiente en x_2,

$$\max\{5+x_2,0\}\le x_1 \le \min\{4-x_2\}$$
$$0\le x_2$$

Utilizamos el teorema de Fourier-Motzkin para eliminar x_1, lo que nos lleva a que

$$5+x_2\le 4-x_2 \Rightarrow x_2\le \frac{-1}{2}$$
$$0\le 4-x_2 \Rightarrow x_2\le 4$$
$$0\le x_2$$

Resultando una incompatibilidad.
Si utilizamos en nuestro ejemplo el siguiente teorema de la Alternativa:

Teorema de la Alternativa: *Para cada matriz dada A, C y D cada vector b*
(I) $Ax \le b$ *tiene una solución x,*
ó
(II) $y^t A = O^t$, $y^t b<0$, $y \ge O$ *tiene una solución y*
pero nunca ambos.
Tenemos en nuestro caso, como el sistema (I)

$$Ax=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\\ -1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\le\begin{pmatrix}4\\ -5\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

no tiene solución y por tanto tenemos que, por ejemplo, $y = (1 \quad 1 \quad 0 \quad 2)$ es solución del sistema (II).
Ya que

$$(1 \quad 1 \quad 0 \quad 2).\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\\ -1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=(0 \quad 0)$$

$$(1 \quad 1 \quad 0 \quad 2).\begin{pmatrix}4\\ -5\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=-1<0$$

$$(1 \quad 1 \quad 0 \quad 2)\ge(0 \quad 0 \quad 0 \quad 0).$$

Luego, vemos como, a través de los teoremas de la Alternativa, podemos relacionar soluciones de sistemas de ecuaciones e inecuaciones. En las Matemáticas no existen compartimentos estancos donde el alumno deposite las soluciones y métodos para resolver ecuaciones por un lado y otros diferentes donde aloje las soluciones y métodos de resolución de inecuaciones. Todo está más relacionado. Dicha sensación se verá corroborada por los alumnos, que en su progreso matemático y en sus estudios de grado, tengan la necesidad de resolver problemas de programación matemática no lineales con restricciones en desigualdad. Dicha resolución conlleva la utilización de las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (con condiciones denominadas de gradiente y de ortogonalidad, en igualdad, y de factibilidad y no negatividad, en desigualdad), ver en este sentido los ejemplos presentados en (Rufián-Lizana, Ruiz-Garzón y Osuna-Gómez, 2011).

Por otro lado, así como las propiedades de diferenciabilidad de las funciones son usadas para linearizar un problema de programación matemática no lineal, los teoremas de la Alternativa son usados para obtener condiciones necesarias de optimalidad, como las de Karush-Kuhn-Tucker, lo podemos apreciar en (Mangasarian, 1969).

CONCLUSIONES

En este artículo hemos visto una nueva forma didáctica de acercarnos a la resolución de problemas lineales de programación matemática, diferente de la forma clásica, a través del método de eliminación de Fourier-Motzkin, consistente en la eliminación de variables de un sistema de desigualdades lineales, análogamente a como se hace con un sistema de ecuaciones. Igualmente podemos relacionar la resolución de sistemas de inecuaciones con sistemas de ecuaciones a través de los teoremas de la Alternativa. La obra de Fourier y Mozkin nos ha permitido hacer un repaso por muchos de los hitos de la historia de la Optimización Matemática.

REFERENCIAS

Bejarano, J. (2009). *Programación lineal bajo Windows*, Sevilla: Software realizado bajo la supervisión del Departamento de Estadística e I.O. de la Universidad de Sevilla.

Fourier, J. (1798). Mémoire sur la statique, contenat la démonstration du príncipe de vitesses virtuaelles, et de la théorie des momens. En Darboux, G. (Ed.): *Oeuvres*, Vol. 2, 475-521. París: Gauthier-Villars.

Fourier, J. (1826). *Solution d'une question particulière du calcul des inégalités.* Nouveau Bulletin des Sciences par la Societé philomatique de Paris, 317-319.

Hillier, F. S. y Lieberman, G. F. (1991). *Introducción a la Investigación de Operaciones*. Londres: McGraw-Hill.

Lagrange, J.L. (1853). *Mécanique Analytique*, París: Editorial Mallet-Bachelier,

Lauritzen, N. (2013). *Undergraduate convexity*. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

Mangasarian, O. (1969). *Linear and Nonlinear Programming*. New York: McGraw-Hill.

Motzkin, T. S. (1936). *Beitrage zur Theorie der Linearm Ungleichungen, Dissertatio*, Jerusalem: University of Basel.

Rufián-Lizana, A., Ruiz-Garzón, G. y Osuna-Gómez, R. (2011). *Métodos de Optimización Matemática (Manual para la resolución de problemas de optimización aplicados a la toma de decisiones empresariales).* Sevilla: Editorial Alvalena.

Ruiz-Garzón, G. (2013). *Métodos cuantitativos para la toma de decisiones empresariales. Ejercicios.* Cádiz. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz.