Épsilon - Revista de Educación Matemática *2013, Vol. 30(3), nº 85, 9-20*

Utilización de la noción "ser múltiplo" por maestros de educación primaria en formación

Ángel López[1,2]
anlopez169@ugr.es
anlopez@uc.edu.ve
Encarnación Castro[1]
encastro@ugr.es
María C. Cañadas[1]
mconsu@ugr.es

Resumen: *El presente trabajo forma parte de una investigación en desarrollo sobre divisibilidad como conocimiento matemático de maestros de educación primaria en formación. En este documento presentamos algunos resultados sobre una de las relaciones consideradas: "ser múltiplo". Analizamos las producciones de 55 futuros maestros mediante una prueba escrita, con el fin de delimitar si identificamos diferentes formas de expresar tal relación. Los futuros maestros no utilizaron el término relación en sus respuestas sobre ser múltiplo. Mayoritariamente, se basaron en operaciones aritméticas, con predominio del producto.*
Términos clave: *Conocimiento matemático, divisibilidad, futuros maestros, múltiplo*

Meaning of relationships "be multiple" shown by a group of training primary teachers

Abstract: *This work is part of an on going study on divisibility and teaching of mathematical knowledge of training primary teachers. In this paper we present some results about one of the relationships considered "be multiple". We analyze the production of the 55 prospective teachers in a written questionnaire to identify if they have different*

1. *Universidad de Granada.*
2. *Universidad de Carabobo.*

ways of expressing this relationship. Prospective teachers do not use the term relationship in their answers on being multiple. Mostly, they based on arithmetic computations, with predominance of the product.
Keywords: *Mathematical knowledge, divisibility, training primary teachers, multiple*

INTRODUCCIÓN

Situaciones que involucran la estructura multiplicativa son frecuentes en la vida diaria, por lo que dicha estructura está presente en los currículos escolares de diferentes niveles educativos. Los maestros de educación primaria han de trabajar en sus aulas conceptos relacionados con la estructura multiplicativa, algunos de ellos corresponden a la divisibilidad. En estos conceptos se debe profundizar en el conocimiento de los números así como de sus relaciones (Castro y Molina 2011). La divisibilidad es una relación multiplicativa entre números, y como el producto y la división exacta, son operaciones inversas, la relación de divisibilidad responde también a una división exacta.

En las aulas de educación primaria, la divisibilidad se trabaja después de que los escolares conozcan la división, exacta y entera, sus términos, y el algoritmo de la división. Este conocimiento previo puede obstaculizar el aprendizaje de la divisibilidad como relación, perdurando solamente la idea de la división exacta. Por ejemplo, algunos estudiantes, para conocer si 7 es divisor de 3x7x2 , realizan los productos y dividen el resultado obtenido por 7, para dar la respuesta después de comprobar si la división es o no exacta. Así mismo, aparece esta actuación ante la simplificación de expresiones como $\frac{3x5x7^2}{7}$, para la que algunos estudiantes realizan inicialmente todos los productos indicados en el numerador y dividen posteriormente el número obtenido por 7.

Algunos errores están vinculados a las dificultades asociadas al vocabulario propio de la relación de divisibilidad. En dicho vocabulario se usan diferentes expresiones que, en algunos casos, son equivalentes; y, en otras, indican la relación opuesta, en virtud de que se tome el producto o la división como operación que sustenta la relación. Por ejemplo: *divisor de*, *factor de, divisible por*, *múltiplo de*. A su vez, la expresión *divisor* en la operación de dividir es el nombre de uno de los términos de tal operación y en la divisibilidad hace referencia a un número que divide a otro (es divisor de otro). Utilizar el primer significado, para divisor, durante tiempo impide la percepción del segundo significado. Los futuros maestros también incurren en este tipo de errores.

Algunas dificultades con la divisibilidad están relacionadas con el teorema fundamental de la aritmética. Investigadores como Zazkis y Campbell (1996) constatan que muchos estudiantes para maestros de educación primaria están familiarizados con dicho teorema, pueden enunciar y explicar su significado, pero no lo aplican en diferentes situaciones de resolución de tareas o problemas.

Los conceptos relacionados con la divisibilidad caen dentro del campo de la matemática denominado Teoría Elemental de Números (Sinclair, Zazkis y Lidljedahl, 2003). Hay diversas recomendaciones sobre la necesidad de que los futuros maestros estudien esta teoría, bajo diferentes premisas. Por ejemplo el NCTM (1989) presupone que el estudio de la teoría elemental de números por los maestros de educación primaria les proporciona comprensión conceptual profunda de las propiedades y las estructuras numéricas. Con posterioridad, destaca el papel importante de dicha teoría para realizar razonamientos numéricos y resolver problemas no rutinarios (NCTM, 2000). El informe de la Conferencia de Ciencias Matemáticas (Conference Board of the Mathematical Sciences, 2001) también incide en la misma recomendación sobre la formación de los maestros en teoría elemental de números, con el objetivo de que entiendan y sean capaces de trabajar en las aulas, con los escolares, ideas fundamentales de dicha teoría.

En investigaciones recientes se pueden observar distintos enfoques sobre teoría de números como: (a) la comprensión de conceptos particulares relacionados con la estructura y la teoría de números (Brown, Thomas y Tolias, 2002; Ginat, 2006; Lavy, 2006; Leinkin, 2006; Smith 2006), (b) el papel que estos conceptos podrían desempeñar en el desarrollo del razonamiento matemático (Campbell, 2006; Mason, 2006) y (c) la interrelación entre teoría y práctica (Kieran y Guzmán, 2006). Todos estos autores insisten en la necesidad de continuar realizando investigaciones en teoría de números. En este trabajo, nos centramos en indagar sobre la comprensión de la relación "ser múltiplo" que muestran un grupo de maestros de primaria en formación.

OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

Tenemos planteados dos objetivos de investigación y, en este artículo, abordamos el primero de ellos parcialmente:

1) Determinar el conocimiento que muestra un grupo de futuros maestros de primaria sobre la relación de divisibilidad.
2) Estudiar la evolución de dicho conocimiento en el desarrollo de un periodo de enseñanza/aprendizaje de dicho grupo de futuros maestros.

MÉTODO

Para el logro del primer objetivo, elaboramos una prueba escrita con la que realizamos un pilotaje, con el fin de indagar en el conocimiento matemático de los conceptos básicos de la divisibilidad de los futuros maestros.

Tomamos, intencionalmente, un grupo de 55 maestros en formación de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada en el curso académico 2011-2012. Posteriormente, tenemos previsto diseñar un experimento de enseñanza para estudiar la evolución de ese conocimiento mostrado por los futuros maestros.

En este trabajo, nos centramos en los resultados obtenidos en el estudio piloto y, en particular, en los ítems de la prueba referidos a la relación "ser múltiplo", que fueron:

a) Indica si la expresión 24 es múltiplo de 6 es verdadera. Explica tu respuesta.
b) Explica, con tus palabras, qué quiere decir que un número sea múltiplo de otro.
c) Dado el número 3^3x5^2x7, escribe tres números de los cuales sea múltiplo el número dado.

Estos ítems están orientados a observar qué consideran los futuros maestros sobre la relación "ser múltiplo" en tres situaciones particulares: (a) una toma de decisión (cerrada) sobre una afirmación hecha, (b) una consideración personal de múltiplo y (c) una situación que pretende generar una respuesta en función de la interpretación que haga el futuro maestro sobre la tarea.

RESULTADOS

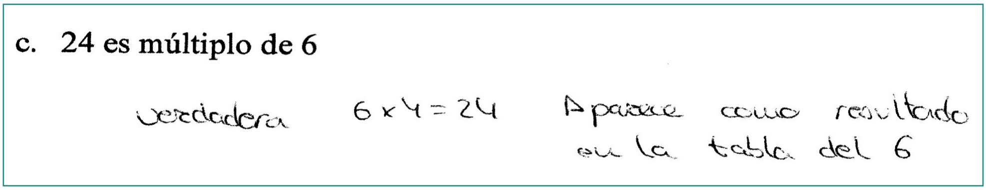
Ítem 1

El 74,5% de los futuros maestros respondieron que la expresión es verdadera, el 21,8% respondió que la afirmación es falsa y el 3,7% no respondieron. De los que consideraron que la afirmación es verdadera, sólo 2 no la justificaron. Igualmente, 2 de los futuros maestros que consideraron la afirmación como falsa, no la justificaron.

Independiente de su consideración de la expresión como verdadera o falsa, los futuros maestros hicieron una justificación de la respuesta basada en la operación de producto. 36 futuros maestros lo hicieron así y 7 se basaron en la operación de dividir para responder. El resto, no respondieron, no justificaron o utilizaron otros procedimientos.

En esta tarea, de los 36 futuros maestros que hicieron uso de la multiplicación para responder, 32 lo hicieron considerando el múltiplo como el resultado de la operación de multiplicar y 4 consideraron el múltiplo como el factor en la operación de multiplicar. A continuación presentamos algunos ejemplos de lo indicado.

Jerónimo[3] (Figura 1) decidió sobre el múltiplo, basándose en la condición de ser resultado de la tabla de multiplicar, es decir, el múltiplo como producto.


c. 24 es múltiplo de 6

verdadera $6 \times 4 = 24$ Aparece como resultado en la tabla del 6

Figura 1. Respuesta de Jerónimo

Ramón (Figura 2) también lo consideró como resultado de la operación y, para justificarlo, utiliza el producto como principio aditivo.

Entre los que consideraron el múltiplo como un factor en la operación de multiplicación, está el caso de Javier (Figura 3) quien dijo que la afirmación era falsa.

3. Los nombres utilizados son ficticios

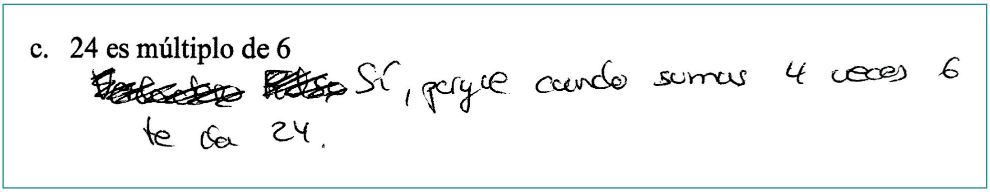

c. 24 es múltiplo de 6
~~Verdadero~~ ~~Falso~~ Sí, porque cuando sumas 4 veces 6 te da 24.

Figura 2. Respuesta de Ramón

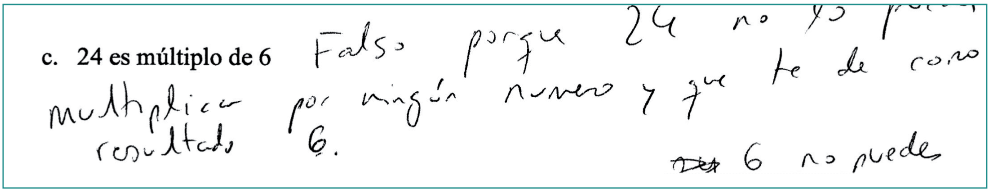

c. 24 es múltiplo de 6 Falso porque 24 no se puede multiplicar por ningún número y que te de como resultado 6.
6 no puede

Figura 3. Respuesta de Javier

Mariela (Figura 4) justificó la afirmación utilizando la operación de división, haciendo explícito el valor del resto en la división, lo cual indica que hace referencia a la división exacta, y no menciona el cociente.

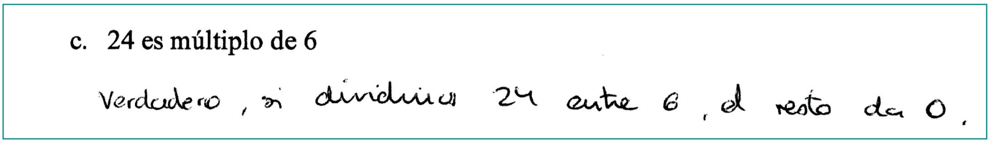
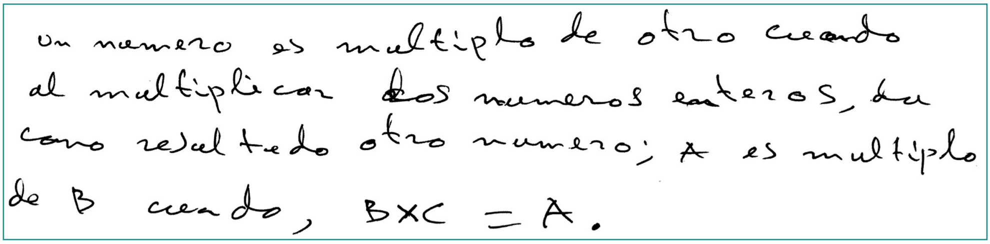

c. 24 es múltiplo de 6
Verdadero, si dividimos 24 entre 6, el resto da 0.

Figura 4. Respuesta de Mariela

Ítem 2

Señalamos la marcada tendencia operacional mostrada por los estudiantes para maestros cuando describen "ser múltiplo". La mayoría de los futuros maestros (43) lo describió como un proceso orientado por operaciones matemáticas. De los 55 a los que se les planteó esta tarea, 2 dieron una respuesta que consideramos una buena aproximación al concepto de múltiplo, según la teoría de números; 6 no respondieron a la tarea y 4 utilizaron otros procedimientos.

En la respuesta de José (Figura 5), consideramos que hizo una buena aproximación a la definición de múltiplo: cuando escribió con sus propias palabras lo que consideró que era que un número fuera múltiplo de otro, lo hizo tratando de no perder la generalización y manteniendo la estructura multiplicativa. A pesar de que hizo referencia al resultado de multiplicar dos números, cuando escribió simbólicamente la estructura multiplicativa dejó claro que A era múltiplo de B cuando ocurría que Bx$C = A$. Para que ocurriera Bx$C = A$, debía existir el número C tal que $A = B$xC.



Un numero es multiplo de otro cuando al multiplicar dos numeros enteros, da como resultado otro numero; A es multiplo de B cuando, BxC = A.

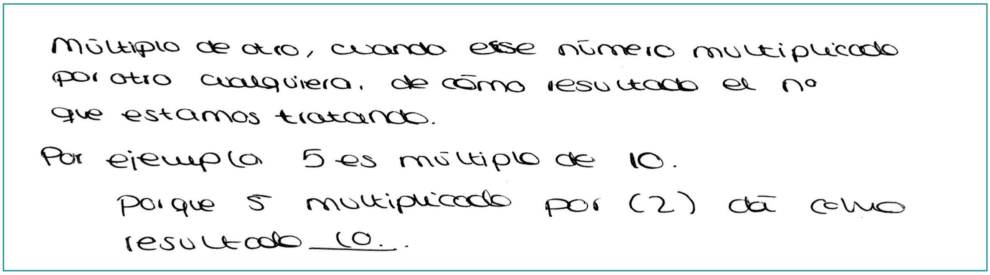
Figura 5. Respuesta de José

Observamos que 43 de 55 futuros maestros utilizaron explícitamente las operaciones matemáticas de adición, multiplicación y división para explicar "ser múltiplo": 2 estudiantes utilizaron la adición, 38 la multiplicación y 3 la división.

La operación de multiplicar fue considerada por los futuros maestros de forma mayoritaria en este ítem, 38 de 55 la utilizaron. En el uso de esta operación se diferencian dos aspectos, determinados por el papel que juega cada número en la multiplicación (*factor - producto*).

Múltiplo como sinónimo de factor: en una expresión como $a\,\mathrm{x}\,c=b$, hay presentes tres elementos los cuales juegan sólo dos roles, el de factor y el de producto. En este sentido, 15 de los 55 estudiantes utilizaron el concepto de factor en la multiplicación para definir múltiplo, asignándole la categoría de sinónimo de múltiplo.

En el caso de la respuesta que dió Cristina (Figura 6) hizo referencia a la operación de multiplicación y, en el ejemplo, puso de manifiesto que se refiere al múltiplo como el número que ocupa el lugar de factor en una multiplicación. Adicionalmente, indicó que puede ser multiplicado por un número cualquiera.



Múltiplo de otro, cuando esse número multiplicado por otro cualquiera, de cómo resultado el nº que estamos tratando.
Por ejemplo 5 es múltiplo de 10.
Porque 5 multiplicado por (2) dá como resultado 10.

Figura 6. Respuesta de Cristina

Marta (Figura 7) utilizó en su explicación general una sutil condición: "cuando se puede hacer una multiplicación". Esta condición parece encaminarse hacia el planteamiento de la teoría de números (si existe un número c tal que $a\,\mathrm{x}\,c=b$). No obstante, esta idea inicial no la aplicó al ejemplo donde se hace clara referencia al resultado que se obtiene y señala al factor 3 como el múltiplo de 15.

Un número es múltiplo de otro cuando se puede hacer
una multiplicación con otro número y me da ese número como resultado.

Por ejemplo: 3 es múltiplo de 15 porque si lo multiplica por 5,
(3x5 = 15) me da 15 como resultado.

Figura 7. Respuesta de Marta

María (Figura 8) hizo referencia a la multiplicación de números naturales como un producto no cerrado y además estableció la supuesta conmutatividad de la relación ser múltiplo. Esta propiedad fue claramente identificada para los factores, y la referencia que hizo sobre la conmutatividad entre "los dos primeros números" estaba establecida sobre los factores que estaban presentes en la operación de multiplicación.

Significa que si un número natural lo multiplicas por otro
natural el resultado es también un número entero por lo tanto
los dos primeros números son múltiplos el
uno del otro.

Figura 8. Respuesta de María

Múltiplo como sinónimo de producto: en la operación de la multiplicación al resultado se le suele llamar producto. En este caso, 23 de 55 futuros maestros definieron múltiplo como el resultado de la operación de multiplicación, estableciendo así que múltiplo es sinónimo de producto. En lo que sigue, mostramos 3 ejemplos donde se puede verificar esta situación.

Carlota (Figura 9) utilizó una referencia clara al resultado que se obtiene de la multiplicación y lo asoció a la palabra múltiplo. Además, estableció la diferencia entre los roles de los números en una multiplicación.

Quiere decir que el resultado obtenido es múltiplo
que se ha obtenido ha sido a través de
unos factores concretos y hemos llegado a
ese resultado.

Figura 9. Respuesta de Carlota

En el caso de Raquel (Figura 10), asoció múltiplo con resultado de multiplicación (o producto) "se obtiene multiplicando". Esta afirmación trató de hacerla en términos generales para cualquier número entero. Sin embargo, la referencia "se obtiene multiplicando" y "se obtiene otro" son claros indicios de la operación multiplicación y su asociación con sus elementos intervinientes: factores y producto.

En el caso de Rocío (Figura 11), la referencia es explícita a los resultados de la operación de multiplicación y mencionó como condición para que sea múltiplo el hecho que debe estar donde están todos los resultados de las multiplicaciones, es decir, la tabla de multiplicar.

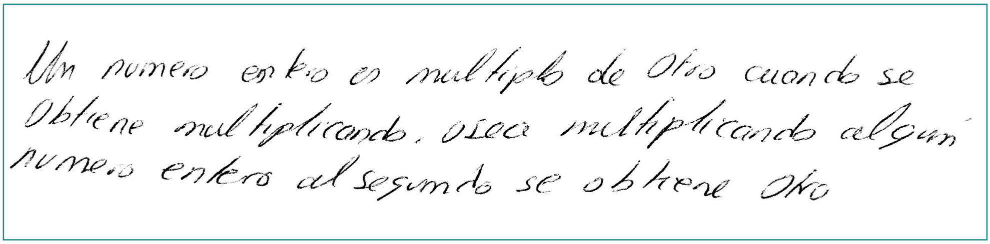

Un numero entero es multiplo de otro cuando se Obtiene multiplicando, osea multiplicando algún numero entero al segundo se obtiene Otro

Figura 10. Respuesta de Raquel

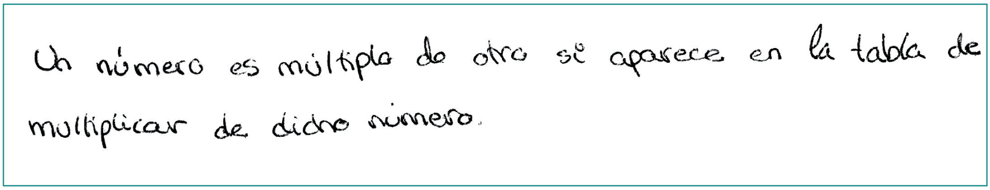

Un número es múltiplo de otro si aparece en la tabla de multiplicar de dicho número.

Figura 11. Respuesta de Rocío

Ítem 3

Con respecto este ítem, 15 de los 55 futuros maestros no respondieron. La mayoría de los que respondieron (34), realizaron la tarea transformando el número dado (escrito como producto de factores primos) en un número escrito en su representación decimal. No aprovecharon la situación dada por la representación del número a través de teorema fundamental de la aritmética para decidir sobre la cuestión.

En la Figura 12 mostramos la respuesta de Carmen a esta cuestión. Ella hizo la transformación del número dado y escribió que la suma de sus dígitos es múltiplo de tres. Los dígitos son 4, 7, 2 y 5, que forman el número 4275, y que es el resultado de multiplicar los factores del número dado $3^3 x 5^2 x 7$.

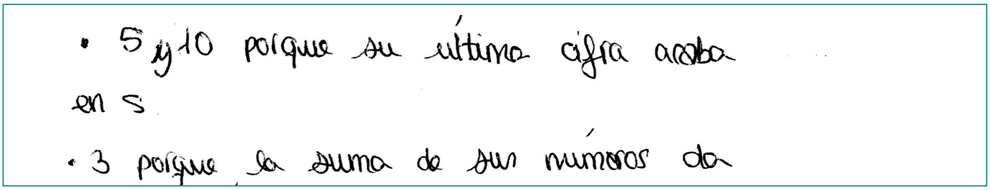


Figura 12. Respuesta de Carmen

Igualmente, Jorge (Figura 13) determinó el resultado de y, a partir de ahí, construye múltiplos del número dado, a pesar que la pregunta no plantea que determinen los múltiplos del número, sino, que escriba tres números de los cuales el número dado es múltiplo.

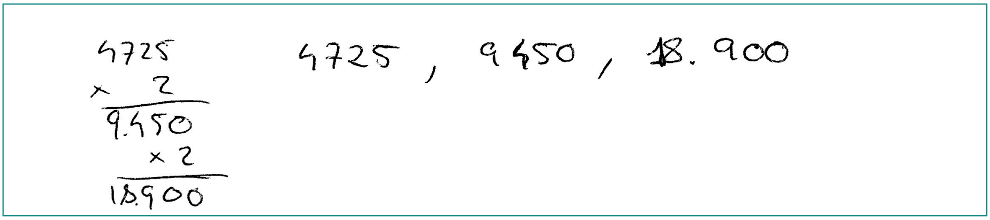


Figura 13. Respuesta de Jorge

CONCLUSIONES

Comenzamos destacando algunos resultados. Ningún estudiante señaló explícitamente que ser múltiplo se refiera a una relación entre números, que exige una cierta condición. La mayor parte de los 55 maestros de primaria en formación que participaron en el estudio, asociaron "ser múltiplo" con una operación aritmética, mayoritaria la multiplicación. En la mayoría de los casos, lo asociaron con el resultado de la operación de multiplicación y, en otros casos, con el de factor como un elemento que interviene en la multiplicación. Este resultado coincide con el de Zazkis (2001). Esta situación se pone de manifiesto tanto para justificar que entre los números dados, uno es múltiplo del otro como cuando escribieron con sus propias palabras qué quiere decir que un número sea múltiplo de otro. Cuando realizaron la operación de los factores en que está descompuesto un número para comprobar (haciendo la división entre uno de los factores) si la división es o no exacta, lo consideraron desde la operación de dividir.

Entendemos que la transformación del número como producto de factores primos a la forma de escritura como expresión decimal que hacen los futuros maestros está basada en la necesidad que sienten de hacer alguna operación aritmética conocida. Esto les llevó a no considerar la representación del número como producto de factores primos, a pesar que esta representación favorecía la respuesta de manera más rápida. No identificaron la relación de "ser múltiplo" en estas expresiones.

En general, sus actuaciones y respuestas se enmarcan en una percepción operacional de la noción "ser múltiplo". Dentro de esta percepción operacional, el significado que asignan estos futuros maestros a "ser múltiplo", presenta tres acepciones, dos asociadas a la multiplicación y una a la división.

- Múltiplo como resultado de un producto.
- Múltiplo como factor de un producto.
- Múltiplo como dividendo de una división exacta.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación ha sido realizada en el seno del Grupo de Investigación FQM-193 del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía "Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico" de la Universidad de Granada, y en el marco del proyecto de investigación EDU2009-11337 "Modelización y representaciones en educación matemática" del Plan Nacional de Investigación, Desarrollo e Innovación 2010-2012 del Ministerio de Ciencia e Innovación de España.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Brown, A., Thomas, K. y Tolias, G. (2002). Conceptions of divisibility: Success and understanding. En S. R. Campbell y R. Zazkis (eds.), *Learning and Teaching Number Theory: Research in Cognition and Instruction,* 41-82. Journal of Mathematical Behavior Monograph. Westport, CT: Ablex Publishing.

Campbell, S. R. (2006). Understanding elementary number theory in relation to arithmetic and algebra. En R. Zazkis y S. R. Campbell (eds.), *Number Theory in Mathematics Education Perspectives and Prospects*, 19-40. New Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Castro, E. y Molina, M. (2011). Introducción a la divisibilidad. En I. Segovia y L. Rico (coords), *Matemáticas para maestros de educación primaria,* 123-146. Madrid: Pirámide.

Conference Board of the Mathematical Sciences. (2001). *The mathematical education of teachers*. Providence, RI: American Mathematical Society.

Ginat, D. (2006). Overlooking number patterns in algorithmic problem. En R. Zazkis y S. R. Campbell (eds.), *Number Theory in Mathematics Education Perspectives and Prospects*, 223-247. New Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. y Guzmán, J. (2006). The number-theoretic experence of 12 - to 15- year-olds in a calculator environment: the intertwining coemergence of technique and theory. En R. Zazkis y S. R. Campbell (eds.), *Number Theory in Mathematics Education Perspectives and Prospects,* 173-200. New Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lavy, I. (2006). Learning number theory concepts via geometrical interactive computerized setting. En R. Zazkis y S. R. Campbell (eds.), *Number Theory in Mathematics Education Perspectives and Prospects*, 201-221. New Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Leinkin, R. (2006). Learning by teaching: the case of sieve of Eratosthenes and one elementary school teacher. En R. Zazkis y S. R. Campbell (eds.), *Number Theory in Mathematics Education Perspectives and Prospects*, 115-140. New Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Mason, J. (2006). What makes an example exemplary: pedagogical and didactical issues in appreciating multiplicative structures. En R. Zazkis y S. R. Campbell (eds.), *Number Theory in Mathematics Education Perspectives and Prospects*, 41-68. New Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

National Council of Teaching Mathematics (NCTM). (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

National Council of Teaching Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Sinclair, N., Zazkis, R. y Liljedahl, P. (2003). Number worlds: Visual and experimental access to elementary number theory concepts. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 8*(3), 235-263.

Smith, J. C. (2006). Revisiting algebra in a number theoretical setting. En R. Zazkis y S. R. Campbell (eds.), *Number Theory in Mathematics Education Perspectives and Prospects,* 249-283. New Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Zazkis, R. (2001). Múltiplos, divisores y factores: explorando la red de conexiones de los estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4*(1), 63-92.

Zazkis, R. y Campbell, S. R. (1996). Prime decomposition: understanding uniqueness. *Journal of Mathematical Behavior*, *15*, 207-218.