Una comparación entre las demostraciones de Pedro Nunes y al-Khwārizmī de los algoritmos de las formas canónicas de la ecuación de segundo grado

Francisco Infante
Universidad de Valencia, España
Universidad Santo Tomás, Bogotá, Colombia
Luis Puig
Universidad de Valencia, España

Resumen: *En este trabajo sobre la historia de las formas de demostración en álgebra mostramos y explicamos algunas demostraciones de los algoritmos de solución de las formas canónicas de las ecuaciones de segundo grado, basadas en procedimientos de cortar y pegar, que provienen de la tradición del álgebra babilónica, realizadas por al-Khwārizmī en su Kitâb al-jabr w'al-muqâbala, y que son las primeras de las que se tiene constancia en la historia del álgebra, comparándolas con las de Pedro Nunes, en su Libro de algebra en arithmetica y geometria que es el primer libro de álgebra escrito en español en el que hay demostraciones.*
Términos clave: *Demostración en álgebra, historia del álgebra, al-Khwārizmī, Pedro Nunes.*

A comparison between Pedro Nunes' and al-Khwārizmī's demonstrations of the algorithms that solve the canonical forms of quadratic equations

Abstract: *In this paper on the history of the ways of demonstration in algebra, we show and explain some demonstrations of the algorithms that solve the canonical forms of quadratic equations carried out by al-Khwārizmī in his Kitâb al-jabr w'al-muqâbala.*

These demonstrations are the first ones extant in the history of algebra, and are based on cut and paste procedures, which come from the tradition of Babylonian algebra. We also compare them with Pedro Nunes' demonstrations in his Libro de algebra en arithmetica y geometria, which is the first book on algebra written in Spanish in which these algorithms are demonstrated.
Key words: *demonstration in algebra, history of algebra, al-Khwārizmī, Pedro Nunes.*

INTRODUCCIÓN

Este trabajo se enmarca dentro de un estudio sobre la historia de las formas de demostración en álgebra[1]. Desde el comienzo del álgebra árabe medieval ya se hace un esfuerzo explícito por dar una justificación para las soluciones de las formas canónicas, más allá de sólo mostrar el algoritmo de solución. En este sentido la manera en que al-Khwārizmī justifica esos algoritmos en su *Kitâb al-jabr w'al-muqâbala* abre el camino a todo un proceso que continuarán otras figuras de la ciencia árabe y que luego tendrá su repercusión en el álgebra de la Europa Medieval, y en particular en Pedro Nunes.

En el libro de álgebra de al-Khwārizmī, lo que hoy llamaríamos ecuación canónica de segundo grado, $y = ax^2 + bx + c$, aparece desglosada en seis formas, tres simples y tres compuestas. Para cada una de las compuestas, al-Khwārizmī presenta un algoritmo de solución y una demostración del algoritmo (o, en un caso, dos demostraciones), basada en procedimientos de cortar y pegar que provienen de la tradición del álgebra babilónica.

Siglos después, Pedro Nunes en su *Libro de algebra en arithmetica y geometria* también presenta una serie de formas canónicas, sus algoritmos y demostraciones.

El presente trabajo pretende mostrar y comparar las demostraciones que realizó al-Khwārizmī, que son las primeras de las que se tiene constancia en la historia del álgebra, con las de Pedro Nunes, que es el primer libro de álgebra escrito en español en el que hay demostraciones.

El artículo está organizado en cuatro secciones: la primera es una breve introducción; en la segunda, se puntualizan algunos aspectos sobre las formas canónicas de las ecuaciones de segundo grado y sus algoritmos a la luz de la obra de al-Khwārizmī; en la tercera, se contextualizan las demostraciones de ambos autores; finalmente, en la cuarta, se estudian en detalle cuatro ejemplos de las pruebas elaboradas. Para ello hemos elegido una sola forma canónica, la primera forma compuesta, que tomamos como ejemplo paradigmático, de la que presentamos tres pruebas de Pedro Nunes y una de al-Khwārizmī (de las dos que presenta, excepcionalmente, en este caso).

Las fuentes que hemos utilizado para examinar las demostraciones son las que indicamos a continuación.

En el caso de al-Khwārizmī, hemos consultado la edición clásica de Rosen (1831), hecha a partir del único manuscrito conocido en su época (Oxford Bodleyan Library, Hunt. 212, fol. 1v-54r, 1342), con traducción al inglés; la reciente edición de Rashed

1. Uno de los productos de ese estudio es el Trabajo de Fin de Máster *Un estudio de las demostraciones de los algoritmos de solución de las formas canónicas de las ecuaciones de segundo grado en al-Khwārizmī, Abū Kāmil, Marc Aurel, Juan Pérez de Moya y Pedro Nunes*, defendido por uno de nosotros en la Universitat de València en 2010 (Infante, 2010).

(2007), hecha a partir de varios manuscritos, con traducción al francés, y la edición de Hughes (1986) de la traducción latina medieval de Gerardo de Cremona. Hemos tenido en cuenta la lección de Høyrup (1998), según la cual la traducción latina de Cremona es mejor testimonio del texto de al-Khwārizmī que el manuscrito árabe conservado en la Bodleyan. Rashed también le da ese valor a la traducción de Cremona en su reciente edición que utiliza más manuscritos. También hemos consultado la edición árabe de Masharrafa y Ahmad (1939), hecha a partir del manuscrito de Oxford y las ediciones de la traducción latina medieval de Robert de Chester (Karpinski, 1915; Hughes, 1989).

La versión castellana la hemos compuesto a partir de la traducción latina de Cremona y la versión francesa de Rashed, contrastándolas con el texto árabe. Hemos usado "tesoro" como traducción de *māl*, término que Rosen traduce por "square", Rashed por "*carré*" (en cursiva) y Cremona por "census", siguiendo también en esto la opinión de Høyrup.

En el caso de Pedro Nunes, hemos utilizado el texto original, del que hay dos ediciones que sólo se diferencian en la portada y el pie de imprenta (Nuñez, 1567a, 1567b). También hemos consultado la edición de la Academia de Ciencias de Lisboa de las Obras Completas de Pedro Nunes, en la que el texto aparece en el volumen VI (Nunes, 1946).

Para estudiar esas demostraciones, seguiremos el tipo de análisis usado en Puig (1998, 2011c) en Infante y Puig (2009) y en Infante (2010). En concreto, examinaremos en detalle la construcción de la figuras que sustentan las demostraciones y el papel que desempeñan en éstas, comparándolas con lo que en esos textos se llaman procedimientos de cortar y pegar, siguiendo la interpretación de Høyrup (1994, 1996, 2002a) del álgebra babilónica. En Puig (2011a) se compara explícitamente los procedimientos de cortar y pegar babilónicos con la construcción de las figuras en las demostraciones de al-Khwārizmī, extremo que no podemos tratar aquí.

LAS FORMAS CANÓNICAS

Al-Khwārizmī comienza su libro exponiendo cuáles son las especies de números (*tesoros, raíces* y simples números) que se usan en los cálculos, dice que, en los cálculos necesarios para resolver los problemas, "unas [especies de números] pueden ser iguales a otras", y establece todas las posibilidades, tres simples y tres compuestas, que son las siguientes (escribimos la forma canónica en una traducción conforme del árabe, que conserva la terminología de al-Khwārizmī, y una equivalencia en el lenguaje del álgebra actual):

1) Tesoro igual a raíces $x^2 = bx$.
2) Tesoro igual a números $x^2 = c$.
3) Raíces iguales a números $bx = c$.
4) Tesoro y raíces igual a números $x^2 + bx = c$.
5) Tesoro y números igual a raíces $x^2 + c = bx$
6) Raíces y números igual a tesoro $bx + c = x^2$.

Para lo que hemos llamado especies de números, Pedro Nunes (siguiendo a Luca Pacioli, según Cajori, 1993), usa el término de *dignidades,* y los nombres de las dignidades que se corresponden con *tesoro*, *raíz* y simple número son *censo, cosa y* número. Las formas canónicas Pedro Nunes las llama *conjugaciones de la igualdad,* y mantienen la misma estructura y número que las de al-Khwārizmī, es decir, seis conjugaciones organizadas en dos grupos: tres simples, de dos dignidades y tres conjugaciones compuestas por tres dignidades. El orden en que se enuncian es diferente: Pedro Nunes parece haberlas organizado por grado de dificultad, cambiando el orden de las dos últimas conjugaciones compuestas. Sin embargo, es relevante el parecido en la estructura de cada conjugación.

EL ALGORITMO DE SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN CANÓNICA

Para cada una de las seis formas canónicas, al-Khwārizmī propone un algoritmo de solución. Analicemos el de la cuarta forma canónica, "tesoro y raíces igual a números" ($x^2 + bx = 0$), usando el mismo esquema con que en Puig (1998, 2011a) se analiza la quinta forma canónica.

Veremos el algoritmo propuesto y, en paralelo, la simbolización en términos modernos. Al-Khwārizmī utiliza ejemplos genéricos para explicar sus algoritmos y sobre ellos estructura su demostración. En este caso, el ejemplo es el que figura en el recuaro de la página 41.

En la obra de Nunes se pueden encontrar tres grupos principales de algoritmos, el primero son los que él llama *Reglas "antiguas"* –muy semejantes a las de al-Khwārizmī– aunque en términos generales. Hacia el final de la obra se presentan los que Nunes llama *Nuestras Reglas*, que son un nuevo grupo de algoritmos para las conjugaciones compuestas, y, a continuación de éstas, muestra otro nuevo grupo de reglas, enfocadas en la generalización de los algoritmos de solución de las conjugaciones. En este trabajo nos referiremos a los dos primeros grupos.

SOBRE LAS DEMOSTRACIONES

Abdeljaouad (2002) señala que "Lo que distingue a al-Khwārizmī de sus predecesores […] es su deseo de justificar los algoritmos de resolución de las ecuaciones cuadráticas […] Esta parte del tratado de al-Khwārizmī no sirve de nada al calculador, pero permite al autor mostrar que su trabajo es científico, en el sentido de que sus objetos matemáticos han sido definidos y las propiedades que se derivan de aquéllos han sido demostradas".

De manera semejante Pedro Nunes, ha sido muy cuidadoso de estructurar matemáticamente su trabajo, justificando y demostrando todas las "*Reglas de q[ue] vso*", como él mismo lo menciona (Nunes, 1567a).

Pero volvamos a al-Khwārizmī para examinar qué tipo de pruebas son las que desarrolla. Lo primero que podemos observar es que éstas emplean figuras y construcciones geométricas, pero que no son demostraciones que sigan el esquema de las presentadas en los *Elementos*, con el recurso a definiciones y proposiciones ya demostradas.

Los tesoros más las raíces iguales a un número es por ejemplo cuando dices: un tesoro y diez raíces son iguales a treinta y nueve dirhams, cuyo significado es: de qué tesoro al que se le añaden diez de sus raíces el total es treinta y nueve.	$x^2 + 10x = 39$	$x^2 + bx = c$
Procedimiento: divide en dos las raíces, lo que en este problema resulta cinco.	$\frac{10}{2} = 5$	$\frac{b}{2}$
Multiplícalo por sí mismo, y resulta veinticinco.	$(5)^2 = 25$	$\left(\frac{b}{2}\right)^2$
A lo que le añades treinta y nueve, y será sesenta y cuatro.	$25 + 39 = 64$	$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$
Cuya raíz extraes, que es ocho;	$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$
de la que substraes la mitad de las raíces, que es cinco. Queda tres,	$8 - 5 = 3$	$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$
que es la raíz del tesoro, y el tesoro es nueve.		
(Rashed, 2007, pp. 100-101; Hughes, 1986, p. 234)		

En las pruebas de al-Khwārizmī hay figuras geométricas, como también las hay en el texto euclideo, pero la demostración es un discurso que describe operaciones de cortar y pegar las figuras y de relacionar partes de ellas, y que no busca el fundamento en definiciones, postulados y proposiciones ya demostradas, sino en lo que se atestigua por la vista, sin poner en duda en ningún momento lo que se ve.

En Puig (2009b, 2011b, 2011c) se propone una clasificación preliminar de las demostraciones en textos algebraicos pre-simbólicos en tres grandes tipos, denominados "demostraciones ingenuas", "demostraciones geométricas" y "demostraciones algebraicas". Se llama "ingenua" a una demostración cuya argumentación se apoya en una figura geométrica que está acompañada de letras, y en un discurso que se refiere a lo que se ve en la figura, y a acciones sobre ella, y en el que la garantía de la verdad de lo que se dice es lo que se ve en la figura. "Geométrica" se reserva para las demostraciones que siguen el modelo euclídeo, en las que sigue habiendo figuras geométricas, pero en las que la garantía de la verdad ya no reside en lo que se ve en la figura, sino en el conjunto de la arquitectura del texto euclídeo: definiciones, postulados y proposiciones ya demostradas. Finalmente, se llaman "algebraicas" las demostraciones en las que las figuras geométricas han desaparecido, y el discurso demostrativo se apoya en las operaciones que se realizan con las expresiones algebraicas.

Siguiendo esta caracterización, diremos que las demostraciones de al-Khwārizmī son "ingenuas", y que, en algunos momentos hay un embrión de demostración "algebraica" (este extremo no lo mostramos en este artículo, pero sí en Puig, 2011b), pero no hay demostraciones "geométricas"[2]. Veremos también cómo las pruebas realizadas por Pedro Nunes son "geométricas", y en algunos casos "algebraicas".

LAS DEMOSTRACIONES DE LA CUARTA FORMA CANÓNICA

Al-Khwārizmī propone para esta forma canónica dos pruebas diferentes, lo que ya es una singularidad. De la primera de ellas, Høyrup (1996) ha logrado rastrear sus orígenes en Babilonia, y es una prueba que utiliza una figura diferente de la que veremos aquí, que en su construcción no sigue estrictamente el algoritmo, que presenta una explicación más detallada y que emplea una identidad algebraica en su argumento.

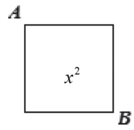
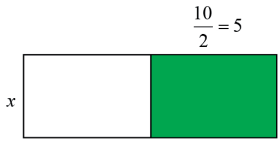
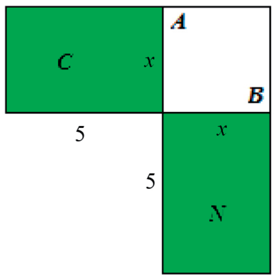
Hemos escogido para este trabajo la segunda prueba de al-Khwārizmī, porque en ella se sigue fielmente el algoritmo de solución en la construcción de la figura. Además esta demostración presenta un cercano parecido con las que luego desarrollará Pedro Nunes. Esta prueba utiliza lo que Høyrup (1994) considera que era un procedimiento ya conocido por los babilonios, con el nombre del "Método Akadio".

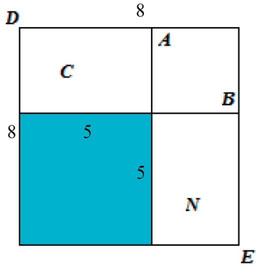
Para analizarla, seguiremos el texto, realizando la comparación con el algoritmo en notación moderna y como ejemplo genérico, y, en paralelo, describiremos la construcción de la figura. Es importante anotar cómo los dos autores sólo presentan para cada demostración una figura ubicada al final de la demostración.[3]

2. El hecho de que las demostraciones de al-Khwārizmī no siguen el patrón euclídeo, y por tanto no son "geométricas" en el sentido que estamos dándole a ese calificativo, ya está presente en el mismo siglo IX. El ejemplo más claro de ello es el opúsculo que escribe Thābit ibn Qurra (836-901), con el expresivo título de *La rectificación de los problemas del álgebra mediante demostraciones geométricas"* (Luckey, 1941). Thābit ibn Qurra llama "geométricas" a las demostraciones que nosotros estamos llamando "geométricas", por lo que no hay en ellas procedimientos de cortar y pegar a la manera akadia, y sí hay referencia explícita al entramado demostrativo de los *Elementos* de Euclides. En Puig (2011c) se compara una demostración "ingenua" de al-Khwārizmī con una demostración "geométrica" de Thābit ibn Qurra.

3. En las ediciones del texto de al-Khwārizmī revisadas sólo aparece una figura, al final de cada una de las pruebas. La única excepción que conocemos es la edición de Karpinski (1915) de la traducción latina medieval de Robert de Chester, en la que en particular para esta prueba del cuarto caso se muestran dos figuras como del Manuscrito de Dresden, pero todo apunta a que sea de la mano de algún comentarista.

DEMOSTRACIÓN DEL ALGORITMO PARA TESORO Y RAÍCES IGUAL A NÚMEROS (VERSIÓN 2) DE AL-KHWĀRIZMĪ

al-Khwārizmī	**Algoritmo Ej. Genérico**	**Algoritmo Not. Moderna**	**Representación Geométrica**
En cuanto a la causa es la que sigue […] (Rashed, 2007, pp. 108-109; Hughes, 1986, p. 236) Hay otra figura que conduce a lo mismo: que es la superficie *AB*, que es el tesoro. Queremos añadirle diez de sus raíces.	$x^2 + 10x = 39$	$x^2 + bx = c$	
Dividimos entonces diez en dos mitades y resulta cinco. Y hacemos de ella dos superficies	$\frac{10}{2} = 5$	$\frac{b}{2}$	
en las dos partes de *AB,* que son las superficies *C* y *N,* cuya longitud es igual a los lados de la superficie *AB,* y cuya anchura es cinco, que es la mitad de diez. Nos queda por tanto sobre la superficie *AB* un cuadrado que es de cinco por cinco, que es la mitad de diez raíces que habíamos añadido en las partes de la primera superficie. Sabemos que la primera superficie es el tesoro y que las dos superficies que están sobre sus dos partes son diez de sus raíces, y que todo es treinta y nueve,	$(5)^2 = 25$	$\left(\frac{b}{2}\right)^2$	

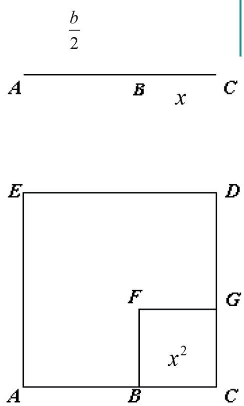
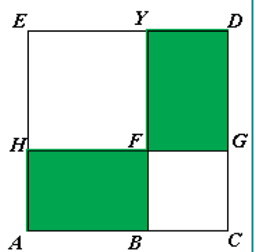
al-Khwārizmī	**Algoritmo Ej. Genérico**	**Algoritmo Not. Moderna**	**Representación Geométrica**
y que falta para completar la figura más grande el cuadrado de cinco por cinco. Éste es veinticinco, que añadimos a treinta y nueve para completar la superficie más grande, que es la superficie *DE.* Se obtiene de todo esto sesenta y cuatro. Tomamos su raíz, que es un lado de la superficie más grande, que es ocho. Si le quitamos lo mismo que le habíamos añadido, que es cinco, queda tres, que es el lado de la superficie *AB,* que es el tesoro, y por tanto es su raíz, y el tesoro es nueve. [Y ésta es la figura] (Rashed, 2007, pp. 110-113; Hughes, 1986, p. 238)	$25+39=64$ $\sqrt{64}=8$ $8-5=3$	$\left(\frac{b}{2}\right)^2+c$ $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+c}$ $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+c}-\frac{b}{2}$	 Figura 1

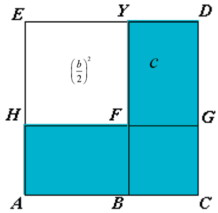
DEMOSTRACIONES DE PEDRO NUNES

Las pruebas de las conjugaciones de Nunes se pueden organizar en varios grupos. En el primero las demostraciones tienen un referente geométrico, y se apoyan en proposiciones del segundo libro de los *Elementos* de Euclides. Estas pruebas presentan rasgos comunes con las de al-Khwārizmī. Un segundo grupo está formado por las pruebas que se basan en la proposición I.47 de los *Elementos* (teorema de Pitágoras) sobre la que se estructura el esquema demostrativo de la prueba. Un tercer grupo está formado por las pruebas de las *"Reglas Nuevas",* los algoritmos nuevos propuestos por Nunes. Este grupo es relevante, porque estas pruebas no tienen un referente geométrico, son "algebraicas". Finalmente, en un último grupo se demuestran estas mismas *"Reglas Nuevas"* nuevamente con el apoyo del libro segundo de los *Elementos.*

En este trabajo sólo profundizaremos en los primeros tres grupos citados, comenzando por las pruebas de referente geométrico. Así a continuación se presentan las pruebas de Pedro Nunes correspondientes a la misma cuarta forma canónica de al-Khwārizmī.

DEMOSTRACIÓN DEL ALGORITMO ANTIGUO DE LA PRIMERA CONJUGACIÓN COMPUESTA (VERSIÓN 1) PEDRO NUNES

Pedro Nunes	**Notac. Moderna**	**Representación Geométrica**
La mitad del numero de coſas ſe repreſente por la linea a. b. La qual lleuaremos a delante eſtendiendola haſta el punto c. y ſea b. c. vn lado del cenſo ignoto, el qual cenſo juntamente con las coſas q̃ nos fueron propueſtas en numero noto aun q̃ el valor de cada vna ſea ignoto, ſe ygualan con el numero que por ſi puſimos noto por tercera quantidad de la conjugacion primera, y queremos por eſtas coſas concedidas conoſcer quãto ſea el valor dela coſa, q̃ es la raiz del quãdrado fundado ſobre la linea b. c. Haremos por tanto ſobre toda la linea a. c. el quadrado a. c. d. e. y ſobre la linea b. c. el quadrado b. c. g. f. q̃ es el cenſo propueſto. y eſtenderemos las dos	CONS. GEOMETRICA Se construye el segmento AC con $AB = \frac{b}{2}$ $BC = x$ $x^2 + bx = c$ Si sabemos que b y c son constantes conocidas Se realizan las construcciones de los cuadrados $ACDE$ y $BCGF = x^2$	
lineas b f. f g. haſta los puntos y. h. en los lados e. d. a. e. y la figura e. y. f. h. reſultara quadrada, y los dos rectangulos a. b. f. h. y f. g. d. y. ſeran yguales, por la ygualdad de las lineas opoſitas equidiſtantes, y delos dos lados del quadrado b. c. f. g. E por que a. b. es la mitad del numero delas coſas que fueron propueſtas, y la linea b. f. es lado del cenſo ignoto, ſera por eſta cauſa el rectangulo a. b. f. h. la mitad del valor delas dichas coſas conforme a la doctrina del capitulo paſſado, y otro tanto valdra el rectangulo f. g. d. y. y los dos rectangulos juntos ſeran el entero valor delas coſas.	Se extienden los dos segmentos BF y FG hasta los puntos Y y H en los lados ED y AE $EYFH$ cuadrado, $ABFH = FGDY$ $AB = \frac{b}{2}$ $BF = x$ $ABFH = \frac{bx}{2}$ $FGDY = \frac{bx}{2}$ $ABFH + FGDY = bx$	 $ABFH = FGDY$ $ABFH + FGDY = bx$
E porq̃ las [cosas] fas con el cenſo todo juntamente fue propueſto ygual a vn cierto numero o quantidad nota, ſeran por eſta cauſa los dos rectangulos con el cenſo o quadrado b. c. g. f. en vna Sũma conoſcidos. A eſta Sũma añadiremos el quadrado e. y. f. h. el qual es noto, por que tiene por lado la linea f. h. q̃ por ſer ygual a la linea a. b. es conoſcida, y reſultara el quadrado vniuerſal	Por la premisa de la demostración $x^2 + bx = c$ $ABFH+FGDY+BCGF=c$ $\left.\begin{matrix} ABFH + \\ FGDY + \\ BCGF + \\ EYFH \end{matrix}\right\} = ACDE$	

Pedro Nunes	**Notac. Moderna**	**Representación Geométrica**
[total *ACDE*] **q̃ todo en ſi cõprehende,el qual ſera conoſcido, y por eſta cauſa ſu lado q̃ es la linea a. c. ſera conoſcido. Deſta linea a. c. q̃ nos es nota,facaremos la linea a.b. q̃ nos es nota,por ſer la mitad del numero delas coſas, y reſtara conoſcido el lado b. c. del quadrado b. c. g. f. y la raiz del meſmo quadrado otro ſi ſera nota. Y eſto es lo q̃ ſe propuſo para demonſtrar.** Luego qua[n]do vn censo y cosas en numero conoscido se proponen yguales a vn numero conoscido, [$x^2 + bx = c$] bien hazemos en tomar la mitad del numero delas cosas que es *AB* $\left[\frac{b}{2}\right]$ y multiplicarlo en si haziendo el quadrado *EYFH* $\left[\left(\frac{b}{2}\right)^2\right]$ y juntarle el numero propuesto que se da conoscido $\left[\left(\frac{b}{2}\right)^2+c\right]$ el qual numero es la summa de los dos rectangulos, y del quadrado *BCGF* y de toda la summa q[ue] es el quadrado vniuersal [total *ACDE*] tomar la raiz, $\left[\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+c}\right]$ la qual raiz es respondente [correponde] a las vnidades o qua[n]tidad del lado *AC*. Del qual quitando la mitad del numero de las cosas $\left[\frac{b}{2}\right]$, q[ue] es *AB* restara conocida la raiz del censo *BCGF* $\left[\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+c}-\frac{b}{2}\right]$ la qual raiz se representa por el lado *BC* [...] y esto queriamos **demonſtrar,como en la primera regla delas cõpueſtas ſe contiene.Deſta figura y demonſtraciõ vſo Euclides en la quarta propoſicion del.2.lib.** [Euclides II.4][4] **para prouar que ſi la linea a. c. fuere partida en dos partes,como enel punto b. el quadrado de toda la linea a. c. ſera ygual a los quadrados de entrambas las partes,juntamente con el rectan gulo q̃ las partes contienen tomado dos vezes.** (Nuñez, 1567a, f. 6v.)	Como *FH*=*AB*= $\frac{b}{2}$ es conocido *EYFH*= $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ es conocido y *ACDE*= $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ + c es conocido, por lo tanto podremos hallar su lado *AC* y restándole *AB* que es conocido tendremos *BC*=*x* TRADUCCIÓN AL ALGORITMO $x^2+bx=c$ $\frac{b}{2}$ $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ $\left(\frac{b}{2}\right)^2+c$ $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+c}$ $x=\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+c}-\frac{b}{2}$ FASE EUCLIDEA Se usa la proposición II.4 de los *Elementos* (cfr. nota 4)	 *ABFH+FGDY+BCGF=c* Figura 2

Varias características son relevantes en este primer grupo de pruebas de Nunes: la primera es que utiliza como referencia figuras muy semejantes a las usadas por al-Khwārizmī. En segundo lugar, que estas demostraciones son “geométricas”, ya que las pruebas cuentan con el respaldo de referencias directas a Euclides.

4. Euclides "II.4 Si se corta al azar una línea recta, el cuadrado de la (recta) entera es igual a los cuadrados de los segmentos y dos veces el rectángulo comprendido por los segmentos". Puertas (1991, v.1, p. 270).

La estructura de esta prueba posee tres partes y una introducción. En la primera, se construye la figura justificando cada paso con propiedades geométricas, y, una vez que se tiene esta figura con las características adecuadas, comienza la segunda parte en la que se hace una traducción del algoritmo de solución de la conjugación a cada una de los elementos correspondientes de la figura; la tercera y última parte es un comentario en el que se cuenta cómo Euclides utilizó esta misma demostración y figura para probar una determinada proposición, en este caso la II.4, y se explica cómo esta proposición está íntimamente relacionada con la prueba en cuestión.

De esta manera Nunes organiza toda su prueba, sin nombrar a Euclides, pero teniéndolo en mente, pues, después de que parece que ha terminado la prueba con todo el rigor necesario, incluye la proposición de los Elementos que encaja perfectamente en el razonamiento, como volviendo a demostrarlo, pero esta vez con el respaldo de Euclides.

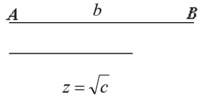
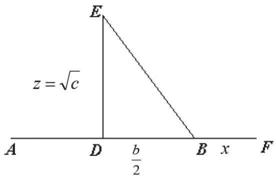
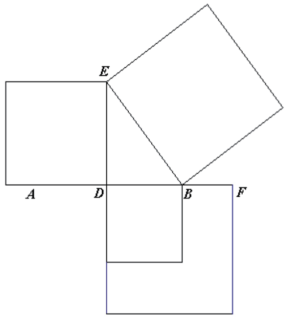
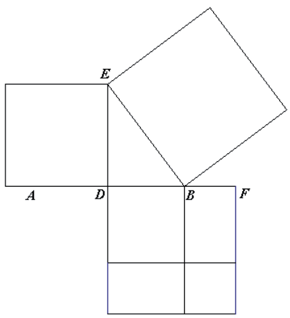
La división en estas tres fases, construcción geométrica, traducción del algoritmo y fase euclidea, es uno de los dos modelos, que con frecuencia va a utilizar Pedro Nunes como estructura de sus demostraciones.

La idea básica de la prueba es la misma: la relación entre el cuadrado mayor con los dos cuadrados pequeños y los dos rectángulos congruentes contenidos todos ellos en el mayor. Pero en la demostración de Nunes se pueden contar las tres fases anotadas. Es diferente el formato de al-Khwārizmī, en el que las propiedades geométricas están inmersas en la misma discusión sobre el algoritmo y en la construcción de la prueba.

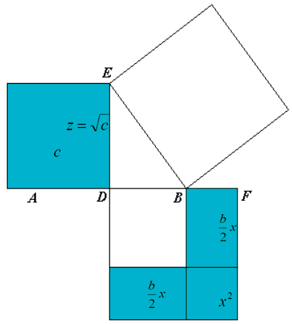
Por otro lado, la función que desempeña la figura es diferente en las dos demostraciones aunque en ambas se busque el respaldo de la geometría para darle validez al argumento de la prueba. En la de al-Khwārizmī la figura es fundamental en tanto que sobre ella se realizan transformaciones y se visualizan relaciones, y es sobre ella que se entiende la demostración a partir de lo que se ve. Sin embargo, en la de Pedro Nunes, aunque la figura también cumple un papel ilustrativo del razonamiento y marca claramente las relaciones entre sus partes, estas relaciones ya no son por la figura en sí, sino por las propiedades generales allí representadas, que ya han sido justificadas y son necesarias para poder desarrollar la demostración. Ahora bien, sí que es importante la figura en la de Pedro Nunes en cuanto al detalle con que se ha construido para que sea una réplica de la presentada por Euclides, de manera que sea evidente la inclusión en el razonamiento de la proposición adecuada de los Elementos –en este caso la II. 4–, con lo cual el criterio de validez de la prueba ha tomado otro nivel.

Veamos en el apartado siguiente la prueba de esta misma conjugación, pero ahora con el uso de la proposición I.47 (teorema de Pitágoras).

DEMOSTRACIÓN DEL ALGORITMO ANTIGUO DE LA PRIMERA CONJUGACIÓN COMPUESTA (VERSIÓN 3) PEDRO NUNES

Pedro Nunes	**Notac. Moderna**	**Representación Geométrica**
Sea la linea a. b. el numero delas coſas, y el numero que puſimos ſer ygual alas coſas con el cenſo tenga por lado quadrado [raíz cuadrada] la linea[5] *z* y partiremos la linea a. b. por la mitad enel punto d. y deſſe miſmo punto ſalga la linea d. e. que haga angulos rectos con la linea a. b. y haremos d. e. ygual ala linea *z* y del punto e. para b. lleuaremos linea recta e. b. y quedara por eſte modo conſtituido el triangulo rectangulo e. d. b. Eſtenderemos pues la linea d. b. quanto cumpliere, y della cortaremos d. f. ygual ala linea e. b. y dezimos. Que la linea b. f. es lado de vn cenſo, que juntamente con las coſas cuyo numero es a. b. ſe yguala con el numero propueſto, que tiene por lado cuadrado [raíz cuadrada] la linea *z* y la demonstracion sera esta	Sean: $AB=b$ $z=\sqrt{c}$ Se construye $ED \perp AB$ en el punto D, con $DB=\frac{b}{2}$ $DE=z=\sqrt{c}$ Triángulo *EDB* es rectángulo $DF=EB$ $BF=x$ Sea la premisa a demostrar: $x^2+bx=c$ y la demostración será esta:	 
El quadrado de b. e. es ygual al quadrado de e.d. y al quadrado de d.b. ambos juntos, por la propoſició .47. del primero lib. de Euclides. Y porq̃ b.e. y d.f. ſon yguales, tanto valdra luego el ſolo quadrado de d.f. quanto los dichos dos quadrados de b.d. y d. e.	$BE^2=DE^2+DB^2$ por la proposición I.47 de los *Elementos*, y como: $BE=DF$ $DF^2=DE^2+DB^2$	
Y por que eſſe miſmo quadrado de d.f. vale tanto como los dos quadrados de b.d. y de b.f. con el duplo del rectangulo cõprehenſo por d.b. y b.f. por la .4. propo proposicio[n] del segu[n]do lib. [Euclides II.4]	Y como también: $DF^2=DB^2+2DB \times BF+BF^2$ por la proposición II.4 de los *Elementos*	

5. Se ha cambiado la notación original de Pedro Nunes, para la línea *c* por *z*, en favor de la claridad.

Pedro Nunes	**Notac. Moderna**	**Representación Geométrica**
ſacaremos por tanto deſtas dos sũmas q̃ por cõmun ſentencia ſon yguales, el cõmun quadrado, q̃ es dela linea b.d. y q̃dara el quadrado dela linea d.e. ygual a la sũma del quadrado de b.f. con el duplo del rectangulo comprehenſo por d.b. y b.f.	$\begin{cases} DF^2 = DE^2 + DB^2 \\ DF^2 = DB^2 + 2DB \times BF + BF^2 \end{cases}$ $DE^2 = 2DB \times BF + BF^2$	
Y porque d.b. es la mitad del numero delas coſas, pornemos b.f. lado del cenſo, y ſera por tanto el rectangulo comprehenſo por d. b. y b.f. la mitad del valor delas coſas, y el duplo deſte rectangulo ſera el entero valor dellas. y el cenſo con las coſas ſerã yguales al quadrado dela linea d. e. q̃ puſimos ygual a la linea *z* cuyo quadrado puſimos que fueſſe el numero, q̃ en principio auemos pueſto ſer ygual a las coſas juntamente con el cenſo, y eſto es lo que queriamos demonſtrar.	Y como: $DB = \frac{b}{2}$ $BF = x$ $DB \times BF = \frac{bx}{2}$ $DE = z = \sqrt{c}$ Entonces: $2DB \times BF = bx$ $DE^2 = c$ Luego: $DE^2 = 2DB \times BF + BF^2$ $c = bx + x^2$	Figura 3
(Nuñez, 1567a, f. 14r.)	y esto es lo que queríamos demonstrar.	

Aparte de incluir la proposición I.47 de los *Elementos*, que permite establecer nuevas relaciones entre los términos de la expresión y que obliga al necesario cambio en su representación gráfica, además, esta prueba presenta ciertas variantes interesantes.

El rigor es el rasgo fundamental aquí, ya que es por esta razón por la que se ha estructurado la prueba. Pedro Nunes considera las demostraciones "antiguas" faltas de rigor –ya que presuponen la existencia de la solución de la ecuación– y decide presentar este grupo de pruebas, en donde el presupuesto de la igualdad de la conjugación se demuestre. En otras palabras, Pedro Nunes busca probar que la ecuación es posible, que siempre tendrá respuesta.

En sus palabras "[…] en la demonstracion de la primera [conjugación] *presuponemos,* que vn censo con las cosas en qualquier numero que ellas sean, puede[n] ser yguales aqualquier numero, [...] [y] *este presupuesto no es cierto. Por lo qual sera necessario demonstrarlo.* […]"[6] (Nuñez, 1567a, f. 14r.).

Por esto Nunes comienza su prueba con dos segmentos –los dos datos de la ecuación b y c o, más exactamente, b y $\sqrt{c}$ – y, a partir de ellos, con el uso de la proposición I.47 y de la II.4 y el andamiaje construido, consigue establecer la conjugación que quiere demostrar, con lo cual ha logrado su principal objetivo: mostrar que la conjugación siempre tiene solución.

La estructura de esta prueba no es lineal, pues simultáneamente está llevando adelante dos razonamientos: por una parte, las relaciones pitagóricas entre los segmentos y sus áreas, y, por otra parte, la estructura para el uso de II.4. En la medida en que se ha construido desde los primeros pasos el cuadrado del lado *DF* y sus polígonos relacionados, se percibe la estructura de la prueba y el uso de II.4. El punto culminante es el uso

6. La cursiva es nuestra.

de la identidad que permite interrelacionar estos dos argumentos en uno solo: "[...] sacaremos por tanto destas dos sumas q[ue] por comun sentencia son yguales, el comun quadrado, q[ue] es dela linea *BD* y q[ue]dara el quadrado dela linea *DE* ygual a la summa del quadrado *BF* con el duplo del rectangulo co[m]prehenso [comprendido] por *BD* y *BF*.[...]"[7]. Y a partir de este momento se retoma la demostración puntual de la conjugación utilizando la proposición II.4, pero se ha ganado todo el razonamiento preliminar.

Finalmente, revisemos las pruebas que realiza Nunes para sus nuevos algoritmos, pero sin utilizar el referente geométrico, tal vez la más clara evolución en la obra del proceso de prueba hacia nuestra idea moderna de demostración matemática.

DEMOSTRACIÓN DEL ALGORITMO NUEVO PARA LA PRIMERA CONJUGACIÓN COMPUESTA PEDRO NUNES

Pedro Nunes	**Comentario**	**Algoritmo Nuevo (AN)**	**Algoritmo Antiguo (AA)**
ESTas nueſtras Reglas tienen ſu fundamento en las antiguas, que en ſu lugar auemos demonſtrado.	La prueba busca establecer la equivalencia entre los dos algoritmos	$x^2+bx=c$ b	$x^2+bx=c$ $\frac{b}{2}$
Porque multiplicamos todo el numero delas coſas en ſi, y el numero por 4, y por la Regla antigua, multiplicauamos en ſi la mitad del numero delas coſas, y el numero no ſe multiplicaua. Y quedara por tanto proporcion quadrupla entre el quadrado del numero de las coſas, y el quadrado dela mitad, como tambien el numero creſcio en quadruplo. Y la razõ deſto es, que el duplo y el ſubduplo multiplicados en ſi, hazen quadruplo y ſubquadruplo, [proporción en cuartas partes]	En el Algoritmo Nuevo (AN) se eleva al cuadrado el término de las cosas [b^2] y el número [c, el término indep.] se multiplica para ser *4c*. En el Algoritmo Antiguo (AA) se eleva al cuadrado la mitad del número de las cosas $\left[\left(\frac{b}{2}\right)^2\right]$ y el número [c] no se multiplica. Los dos términos del AN quedan en proporción cuádrupla (son cuatro veces) con respecto a los términos del AA.	b^2 $4c$	$\left(\frac{b}{2}\right)^2$ c

7. Veamos esta parte del razonamiento en notación moderna

Sean $z=\sqrt{c}=ED, AB=b, DB=\frac{b}{2}, BF=x$

Si $\begin{array}{l} BE^2=ED^2+DB^2 \\ BE=DF \end{array}$

$$\begin{cases} DF^2=ED^2+DB^2 \\ DF^2=DB^2+2DB\times BF+BF^2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} ED^2=2DB\times BF+BF^2 \\ c \;=\; bx \;+\; x^2 \end{array}$$

Pedro Nunes	**Comentario**	**Algoritmo Nuevo (AN)**	**Algoritmo Antiguo (AA)**
y los qua-druplos en vna sũma tambiẽ quedan en la miſma proporcion quadrupla con los ſubquadruplos pueſtos en vna sũma. Y eſto ſe demueſtra por el quinto libro de Euclides: porque ſi de vn antecedente para ſu conſequente ay la proporcion q̃ tiene otro antecedente con ſu conſequente, tal proporcion aura delos antecedentes juntos alos conſequentes juntos, qual ay de vno de los antecedentes a ſu cõſequente. y eſto ſirue para la primera Regla. [...] y deſta manera lo que por vna via reſulta, ora ſea ſumando, como en la primera sera quadrupla a lo que reſulta por la otra via,	Las sumas de los términos que son consecuentes en una proporción cuádrupla, también quedan en proporción cuádrupla con respecto a la suma de sus antecedentes. Esto se demuestra por la proposición V.12 de los *Elementos.*[8] De esta forma la expresión del AN será cuádrupla (cuatro veces) la del AA.	$b^2 + 4c$	$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$
	Luego la raíz de esta expresión en el AN es el doble de la expresión en el AA. Así el valor de la cosa [x] será el mismo por ambos procedimientos.	$\sqrt{b^2+4c}$ $2x = \sqrt{b^2+4c} - b$ $x = \frac{1}{2}\left[\sqrt{b^2+4c} - b\right]$	$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$ $x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$ $x = \frac{1}{2}\left[\sqrt{b^2+4c} - b\right]$

El esquema de esta demostración consiste en lograr la equivalencia que establece Pedro Nunes entre el algoritmo "antiguo" ya demostrado y el algoritmo nuevo que hay que demostrar. Esa equivalencia la consigue apoyándose en la *Teoría de las proporciones.*

Esta prueba marca una profunda diferencia dentro de las presentadas por Nunes, en la medida en que cambia radicalmente el contexto de justificación. Aunque sigue inmerso dentro del marco de los *Elementos* y por ende mantiene parte de las características que ha empleado en otras pruebas, como el rigor, o la justificación de cada paso en términos de reglas o proposiciones ya demostradas, sin embargo, se desprende del referente geométrico, las justificaciones vienen ahora de la *Teoría de las proporciones,* del Libro V de los *Elementos*.

Este cambio en el marco de justificación también implica cambios en el lenguaje empleado y la forma de justificación, lo que implica separarse del referente concreto, de la figura, para pensar en nuevas reglas y propiedades, más abstractas. Pero más allá de ello, este cambio implica el que se utilicen identidades algebraicas como justificaciones, y por ende transformaciones algebraicas, no exactamente iguales a las actuales, pero

8. Euclides V.12: "Si un número cualquiera de magnitudes fueren proporcionales, como sea una de las antecedentes a una de las consecuentes, así serán todas las antecedentes a las consecuentes" (Puertas, 1991, v.2, p. 37).

identidades sobre variables, en términos de proporciones, y en proposiciones del Libro V de Euclides.

A manera de conclusión

Hemos visto cómo las ecuaciones canónicas en al-Khwārizmī y Pedro Nunes están estrechamente relacionadas, manteniendo la misma estructura y cantidad, a pesar de las diferencias plasmadas en el lenguaje y la generalidad.

En los autores estudiados se notan cambios en los tipos de demostración, desde unas primeras demostraciones realizadas con la ayuda de figuras en que la justificación de los argumentos y transformaciones se da por procesos de “cortar y pegar”, y donde la veracidad está dada en términos de aquello que se ve. Para pasar luego a un estado de pruebas en que también con la ayuda de figuras se estructuran argumentos pero donde la veracidad está expresada en términos de las propiedades de las figuras y sus particulares características, incluyendo ahora como herramienta de demostración todo el saber geométrico y en particular las proposiciones de los *Elementos* de Euclides. Para pasar finalmente a demostraciones en donde la referencia a la figura ya no es necesaria, pero más que eso, es que toda la función justificadora de la Geometría se ha remplazado por otras herramientas, las del álgebra, en particular las de la Teoría de las proporciones, plasmada en los *Elementos* de Euclides.

También hay diferencias en los dos autores estudiados en cuanto a la función de la figura en la prueba. Ya hemos dicho que en al-Khwārizmī la figura es fundamental ya que sobre ella se visualizan relaciones y se realizan transformaciones, y la garantía de la verdad de la demostración está en lo que se ve; mientras que en Pedro Nunes lo que se busca en la figura son las propiedades generales que ya han sido demostradas en los Elementos de Euclides, y la garantía de verdad es la arquitectura euclídea, por lo que la importancia del examen de la figura en detalle reside en que sea una réplica de la presentada por Euclides, de manera que sea evidente la inclusión en el razonamiento de la proposición adecuada de los *Elementos.*

Finalmente otro aspecto que vale la pena destacar es el cambio en el rigor, desde argumentos justificados por la figura, y las características que “se ven” en ella en al-Khwārizmī, se va cambiando en Pedro Nunes hacia pruebas justificadas por propiedades geométricas y proposiciones de los *Elementos,* hasta proponer una prueba en que más que justificar el algoritmo, lo que se busca demostrar es la seguridad de su existencia en todos los casos. Aspecto éste que lleva el rigor matemático a una nueva cota.

REFERENCIAS

Abdeljaouad, M. (2002). La demostración en el álgebra de los árabes. *La lettre de la Preuve. International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof* [en línea], Hiver 2002. Recuperado el 2 de julio de 2012 de http://www-didactique.imag.fr/preuve/Newsletter/02Hiver/02hiverThemeES.html

Cajori, F. (1993). *A History of Mathematical Notations.* New York: Dover.

Høyrup, J. (1994). The Antecedents of Algebra. *Filosofi og videnskabsteori på Roskilde Universitetcenter. 3. Række: Preprint og Reprints*, 1994 nr. 1.

Høyrup, J. (1996). The Four Sides And The Area. Oblique Light on the Prehistory of Algebra. In R. Calinger (Ed.), *Vita mathematica. Historical Research and Integration with Teaching*, 45-65. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Høyrup, J. (1998). "Oxford" and "Cremona": on the relation between two versions of al-Khwarizmi's algebra. In Association Algérienne d'Histoire des Mathématiques. *Actes du 3me Colloque Maghrébin sur l'Histoire des Mathématiques Arabes,* vol. 2. 159–178. Tipaza (Alger, Algérie), 1-3 Décembre 1990.

Høyrup, J. (2002a). *Lengths, Widths, Surfaces. A Portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin*. New York: Springer.

Hughes, B. (1986). Gerard of Cremona's Translation of al-Khwârizmî's al-jabr: A Critical Edition. *Mediaeval Studies* 48*,* 211-263.

Hughes, B. (1989). *Robert of Chester's Translation of al-Khwârizmî's al-jabr: A New Critical Edition*, Boethius, Band XIV. Stuttgart: Franz Steiner Verlag.

Karpinski, L. (1915). *Robert of Chester's Latin Translation of The Algebra of Al-Khowarizmi.* New York: The MacMillan Company, University of Michigan Studies.

Infante, J. F. (2010). *Un estudio de las demostraciones de los algoritmos de solución de las formas canónicas de las ecuaciones de segundo grado en al-Khwārizmī, Abū Kāmil, Marc Aurel, Juan Pérez de Moya y Pedro Nunes*. Trabajo Fin de Máster del Máster de Investigación en Didácticas Específicas. Universitat de València.

Infante, J. F., Puig, L. (2009). Demostraciones de los algoritmos de las ecuaciones de segundo grado en el *Kitâb Al-Jabr W'al-Muqâbala* de Al-Khwârizmî. En M. J. González; M. T. González; J. Murillo (Eds.): *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* SEIEM. Santander.

Luckey, P. (1941). Tābit b. Qurra über den geometrischen Richtigkeitsnachweis der Auflösung der quadratischen Gleichungen, *Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physische Klasse. Berichte 93*, 93-114.

Masharrafa, A. M. y Ahmad, M. M. (Eds.) (1939). *Al-Khwārizmī, Muhammad ibn Mūsa. Kitāb al-mukhtasar fī hisāb al-jabr wa'l-muqābala*. Cairo: al-Qahirah. Reprinted 1968.

Nunes P. (1946). *Obras Vol. VI. Libro de Algebra en arithmetica y geometría*. Lisboa: Impresa Nacional de Lisboa, Academia das Ciências de Lisboa.

Nuñez P. (1567a). *Libro de Algebra en arithmetica y geometria*. Compuesto por el Doctor Pedro Nuñez, Cosmografo Mayor del Rey de Portugal, y Cathedratico Iubilado en la Cathedra de Mathematicas en la Vniversidad de Coymbra. Anvers: En la casa de los herederos d'Arnoldo Birckman a la Gallina gorda.

Nuñez P. (1567b). *Libro de Algebra en arithmetica y geometria*. Compuesto por el Doctor Pedro Nuñez, Cosmografo Mayor del Rey de Portugal, y Cathedratico Iubilado en la Cathedra de Mathematicas en la Vniversidad de Coymbra. Anvers: En la casa de la biuda y herederos de Iuan Stelsio.

Puertas, M. (Ed.) (1991). *Elementos de Euclides,* v. 1, 2 Madrid: Gredos.

Puig, L. (1998). Componentes de una historia del álgebra. El texto de al-Khwārizmī restaurado. En F. Hitt (Ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 109-131). México, DF: Grupo Editorial Iberoamérica.

Puig, L. (2009b). Naïve, geometric and algebraic proof in ancient and modern times. Talk to the meeting Semiotic Approaches to Mathematics, the History of Mathematics, and Mathematics Education (SemMHistEd) – 3rd Meeting. Aristotle University of Thessaloniki, July 16-17, 2009.

Puig, L. (2011a). Researching the History of Algebraic Ideas from an Educational Point of View. In. V. Katz & C. Tzanakis (Eds.) *Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education* (pp. 29-42). Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Puig, L. (2011b). Historias de al-Khwārizmī (6ª entrega). El cálculo con la cosa. *Suma*, 67, pp. 101-110.

Puig, L. (2011c). Historias de al-Khwārizmī (7ª entrega). Figuras y demostraciones. *Suma*, 68, pp. 93-102.

Rashed, R. (Ed.) (2007). *Al-Khwārizmī. Le commencement de l'algèbre*. Paris: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard.

Rosen, F. (1831). *The algebra of Mohammed Ben Musa*. London: Oriental Translation Fund.