

EL SIGNO IGUAL Y SU SIGNIFICADO EN LOS LIBROS DE TEXTO DE PRIMER CICLO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

THE EQUALS SIGN AND ITS MEANING IN THE TEXT BOOKS DE FIRST CICLE OF PRIMARY EDUCATION

Ramírez García, M.¹, Rodríguez Marcos, P.²

¹Universidad Autónoma de Madrid

²Universidad Complutense de Madrid

Resumen. *El aprendizaje del significado de los símbolos matemáticos y en concreto, el signo igual, es muy importante para poder comprender multitud de expresiones aritméticas y algebraicas. Existen numerosos estudios que ponen de relieve que los estudiantes tienen grandes dificultades a la hora de captar su significado. Este artículo recoge una revisión de algunos de estos estudios que muestran las interpretaciones y usos del signo igual de los estudiantes, así como posibles causas de una comprensión incompleta de este signo y cómo se puede desarrollar una interpretación relacional del signo a través del pensamiento relacional. Además, presenta el estudio de la revisión de algunos libros de texto de matemáticas del primer ciclo de Educación Primaria, para establecer el modo y los contextos en los que se presenta el signo igual a los estudiantes en los primeros cursos.*

Palabras clave. Signo igual, pensamiento relacional, interpretación relacional u operacional, libros de texto, Educación Primaria.

Abstract. *Learning of the meaning of the mathematical symbols and in concrete, the equal sign, it is very important to be able to understand multitude of arithmetical and algebraic expressions. There exist numerous studies that emphasize that the students have big difficulties at the moment of catching his meaning. This article gathers a review from some from these studies that show the interpretations and uses of the equal sign of the students, as well as possible reasons of an incomplete understanding of this sign and how it is possible to develop a relational interpretation of the sign across the relational thinking. Besides, it presents the study of the review of some books of text of mathematics of the first cycle of Primary Education, to establish the way and the contexts in which one presents the equal sign to the students in the first courses.*

Key words. Equal sign, relational thinking, relational and operational interpretation, text books, Primary Education.

INTRODUCCIÓN

El aprendizaje del significado de los símbolos matemáticos y en concreto el del signo igual, es muy importante para poder comprender multitud de expresiones aritméticas y algebraicas. Numerosos estudios han puesto de relieve que incluso los estudiantes de secundaria tienen grandes dificultades a la hora de captar su significado. En este trabajo se presenta una revisión de algunas investigaciones anteriores para mostrar qué significados y qué usos le dan los escolares y algunas de las causas de estos hechos. Además, se indagará el modo y los contextos en los que se presenta el signo igual a los estudiantes de primer ciclo de Educación Primaria en los libros de texto.

SIGNIFICADOS DEL SIGNO IGUAL Y INTERPRETACIONES DE LOS ESTUDIANTES

En los últimos 20 años, las investigaciones muestran que el significado del signo igual que adquieren los estudiantes desde los primeros cursos de escolarización es incompleto, interpretándolo como una invitación a hacer algo, es decir, operar sobre los números más que un símbolo relacional. Con niños de edades correspondientes a Educación Primaria tenemos algunas investigaciones realizadas como las de Behr et al. (1980), Morris (2003), Carpenter et al. (2003) que ponían de manifiesto que los niños consideran el signo de igualdad como un operador, en vez de un símbolo relacional. Como operador el signo igual se interpreta como una instrucción para realizar una operación aritmética. Esta interpretación operacional está relacionada con el hecho de que el signo se lea únicamente de izquierda a derecha, lo que significa que se ha de operar siempre sobre los dígitos que están a la izquierda y que la respuesta se ha de situar a la derecha del signo. Estos autores afirman que para adquirir un significado más completo del signo igual, debería interpretarse como un signo bidireccional, que se pueda leer tanto de izquierda a derecha o de derecha a izquierda. En igualdades numéricas el signo igual representa la relación de ‘equivalencia numérica’ entre las expresiones que se encuentran en los dos lados del signo igual (Molina, 2006). Esta autora observó cuatro significados del signo igual en niños de tercero de primaria: ‘operador’, ‘indicador de una acción’, ‘similitud numérica’ y ‘equivalencia numérica’ (p. 436). La autora confirma que a pesar de que el significado de equivalencia numérica es el adecuado para resolver todas las igualdades utilizadas, los niños utilizan en cada situación el significado que da sentido a la igualdad o sentencia numérica que se presenta. De aquí concluye que hay 3 niveles de comprensión del signo igual. El primer y menos completo sería el nivel de comprensión operacional de los niños en los que utilizan el significado de operador y expresión de una acción. Un segundo nivel no estable, en el que en algunas situaciones empieza aparecer el significado de equivalencia numérica. Y por último, el nivel de comprensión avanzado en el que se hace uso del significado de equivalencia numérica, aunque en sentencias con operaciones en el lado izquierdo utilizan el significado operador y en sentencias con operaciones en el lado derecho, utilizan el significado expresión de acción. El significado similitud numérica se mostraba de forma puntual. Con estudiantes con edades correspondientes a Educación Secundaria que trabajan con expresiones algebraicas tenemos trabajos como los de Knuth (2005), Knuth (2006), Essien et al. (2006) y Hunter (2007), en los que un gran porcentaje de los alumnos mostraban una interpretación operacional del signo igual y además, se comprobó que el éxito en la

El signo igual y su significado en los libros de texto de primer ciclo de educación primaria

resolución de ecuaciones algebraicas estaba asociado a la interpretación que tenían dichos alumnos del signo igual.

CAUSAS DE UNA INTERPRETACIÓN OPERACIONAL

Una de las causas a las que se atribuye la interpretación inadecuada del signo igual, es la experiencia que tienen los niños en la escuela con los contextos que encuentran en los libros y las explicaciones del maestro. Parece importante buscar contextos que conlleven a los estudiantes una comprensión relacional del signo igual. En esta línea, McNeil et al. (2005) comprobaron que el contexto en el que se presentaban operaciones en ambos lados del signo igual activaba la interpretación relacional del signo igual. En un trabajo posterior, McNeil et al. (2006) plantearon contextos no estándares, del tipo $8 = 8$, ó $7 = 3 + 4$, y comprobaron que son también más efectivas que las ecuaciones ‘operación igual respuesta’ para activar la comprensión relacional del signo igual.

McNeil et al. (2006) examinaron libros de texto de cuatro editoriales distintas para ver en qué contextos de los anteriormente evaluados aparece el signo igual. En concreto, evaluaron libros de texto de 6-8 grado, comúnmente utilizados en Estados Unidos. El contexto ‘operaciones en ambos lados del signo igual’ aparecía en una proporción muy pequeña en todos los libros. Los contextos no estándares sí aparecían frecuentemente en todas las editoriales, pero el más habitual era ‘operación igual resultado’. En resumen, el análisis de los textos mostró que no están bien orientados para despertar una interpretación relacional del signo igual.

La experiencia de los niños en contextos que contienen el signo igual no es únicamente la que observan en los libros de texto. Hay otros factores como es la presentación de los profesores, los contextos que utilizan para plantear actividades e intentar transmitirles los conocimientos. En el trabajo de Seo et al. (2003) estudiaron los contextos de los libros de textos y los contextos que utilizaba el profesor de un aula con niños de 7 y 8 años para finalmente recoger la interpretación que tenían estos niños del signo igual. Como en el caso anterior, el análisis de texto mostró una mayoría de contextos que implicaban una acción con operaciones aritméticas y por lo tanto implicaban una interpretación operacional del signo igual. El profesor de grupo era consciente del insuficiente significado que le dan los niños al signo igual si sólo se trabaja contextos de resolución de operaciones aritméticas, y planteó distintas situaciones como comparación de números, equivalencia de unidades de medida, y equivalencia de moneda. Se encontró que los niños tenían una interpretación operacional en contextos aritméticos que implicaban realizar una operación, pero en situaciones de medida y equivalencia de monedas, los niños si daban un significado relacional al signo igual. Al intentar relacionar las dos situaciones explicaban que era distinto en cada una de las situaciones. Se concluyó que no basta con plantear distintos contextos para ver los distintos significados del signo igual. Se debería haber trabajado la conexión de esos significados, es decir, las distintas interpretaciones que se tienen en diferentes contextos puede funcionar en un mismo contexto, es decir, la interpretación relacional que indica la misma cantidad funciona también en el contexto $2 + 3 = 5$, que habitualmente implica “el resultado”.

DESARROLLO DEL PENSAMIENTO RELACIONAL

Una de las ideas como solución a este problema es la propuesta Early-Algebra (Molina, 2006), que está basada en la integración de modos de pensamiento algebraico en las matemáticas escolares, permitiendo enriquecer la actividad matemática de estos niveles. Trata de desarrollar los aspectos algebraicos que posee el niño y utilizar representaciones que permitan a los alumnos operar a un nivel de generalidad más alto. En Estados Unidos, la NCTM (2000) ya mostró apoyo a esta propuesta proponiendo una reforma en la enseñanza de la Aritmética para que los conceptos y las destrezas de Aritmética de la escuela elemental estén mejor coordinadas con la enseñanza del Álgebra. Este cambio curricular favorece el desarrollo conceptual y la coherencia de las Matemáticas desde los primeros cursos escolares. Brevemente, la idea central de este cambio es trabajar con actividades que faciliten la transición entre la Aritmética y el Álgebra, poniendo especial énfasis en las estructuras que subyacen a las operaciones aritméticas y sus propiedades y no tanto, en el aspecto del cálculo (Molina, 2006). El objetivo final es promover el pensamiento algebraico junto con el aritmético, para facilitar el aprendizaje con comprensión. En otras palabras, implica que los alumnos interioricen generalidades (principios, propiedades, relaciones) que se encuentran implícitas en la estructura de la Aritmética. Autores como Carpenter et al. (2003) muestran la viabilidad de basar la instrucción de la Aritmética en el pensamiento relacional, que consiste en examinar las expresiones en su totalidad y utilizar las relaciones entre ellas.

Objetivos de la investigación

Con el presente trabajo se pretende indagar sobre los contextos en los que se presenta el signo igual en los libros de texto de Matemáticas de Primer ciclo de Educación Primaria, y basándonos en los estudios previos, poder concluir si favorecen una interpretación relacional u operacional del signo igual. Es evidente que la interpretación de los estudiantes no solo dependen de lo que ven en los libros de texto, influye también otros aspectos como la presentación por parte del profesor en el aula. En este trabajo sólo comprobaremos uno de los factores que afectan al significado adquirido por los niños como es el libro de texto utilizado en la escuela.

MÉTODO

Materiales

Se utilizará los libros de texto de primer ciclo de Educación Primaria de cuatro editoriales utilizadas en los Centros de Educación Primaria de la Comunidad de Madrid (Tabla 1).

El signo igual y su significado en los libros de texto de primer ciclo de educación primaria

Editorial	Proyecto	Curso	Año
Vicens Vives	Mundo de Colores	1º y 2º	2008, 2009
Anaya	Salta a la vista	1º y 2º	2007
SM	Trampolín	1º y 2º	2007
Bruño	Lapiceros	1º y 2º	2008

Tabla 1. Editoriales y proyectos de los libros de texto analizados

Procedimiento

Un estudio descriptivo mostrará los contextos en los que aparece el signo igual. Basándonos en los estudios previos se ha elaborado una escala de los posibles contextos en los que puede aparecer el signo igual. Se agrupan en contextos aritméticos en los que aparece en alguno o ambos lados del signo igual operaciones aritméticas y contextos no aritméticos en los que no aparecen operaciones aritméticas, presentando identidades numéricas, equivalencias de unidades métricas o asignaciones de valores a variables. Los autores llevarán a cabo un recuento de cada una de las veces que aparece el signo igual en cada una de estas situaciones.

CONTEXTOS ARITMÉTICOS

1. **Contexto aritmético canónico:** ‘Operación igual resultado’ ($a + b = c$).
2. **Contextos aritméticos no canónicos.** Incluye varios:
 - a. **Operaciones en ambos lados del signo igual.** $a + b = c + d$
 - b. **‘Resultado igual operación’:** $a = b + c$

CONTEXTOS NO ARITMÉTICOS

1. **Comparación de números;** $a = a$.
2. **Contextos de medida:** p.e.: 1 metro = 10 decímetros.
3. **Contextos de equivalencia de monedas:** 1 euro = 100 céntimos.
4. **Contexto del sistema numérica decimal:** 400 unidades = 4 centenas.
5. **Otros contextos no aritméticos.** $A=5$

Los contextos aritméticos distintos al canónico (McNeil et al. 2006) y los contextos no aritméticos (Seo et al., 2003) favorecen la adquisición de un sentido relacional del signo igual, por lo que se comprobará si en el primer ciclo de Educación Primaria, los contextos que ofrecen los libros de textos de este tipo aparece en una proporción similar al contexto aritmético canónico que favorece una interpretacional operacional.

RESULTADOS Y ANÁLISIS

Los resultados muestran que el signo igual se utiliza en contextos aritméticos con más frecuencia que en contextos no aritméticos (ver Tabla 2). Todas las editoriales utilizan el signo igual en más de un 90% de las ocasiones en expresiones aritméticas, resultado previsible ya que en estos cursos se introduce las operaciones aritméticas.

<i>Curso</i>	<i>Libro de Texto (Editorial)</i>	<i>Contexto Aritmético</i>	<i>Contexto no Aritmético</i>
1	Vicens Vives – Mundo de Colores	97,58	2,42
	Anaya – Salta a la vista	93,03	6,97
	SM – Trampolín	95,85	4,15
	Bruño – Lapiceros	95,63	4,37
2	Vicens Vives – Mundo de Colores	96,84	3,16
	Anaya – Salta a la vista	86,26	13,74
	SM – Trampolín	94,63	5,37
	Bruño - Lapiceros	96,76	3,24

Tabla 2. Porcentaje de contextos aritméticos y no aritméticos

Contextos Aritméticos

En la Tabla 3 se recoge los porcentajes de cada uno de los contextos aritméticos por curso y editorial. El contexto ‘operación igual resultado’ es con diferencia el más frecuente.

	<i>SM</i>		<i>ANAYA</i>		<i>BRUÑO</i>		<i>VICENS VIVES</i>	
	<i>1º</i>	<i>2º</i>	<i>1º</i>	<i>2º</i>	<i>1º</i>	<i>2º</i>	<i>1º</i>	<i>2º</i>
Operación = resultado	93,43	86,58	84,43	69,53	61,88	85,98	96,54	96,67
Operación ambos lados	1,38	6,88	0	12,02	0	2,88	0	0
Resultado = Operación	1,04	1,18	8,61	4,72	33,75	7,91	1,04	0,18

Tabla 3. Porcentajes de los distintos contextos aritméticos.

En la Editorial Bruño, el porcentaje del contexto canónico en primer curso es menor debido a la aparición del signo igual en el contexto no canónico ‘resultado igual operación’ en las últimas páginas que se relaciona con el cálculo mental. El ejercicio de la forma $5 = 4 + ?$ utiliza el signo igual, y sin embargo, los ejercicios del tipo $1 + 2$ no lo utilizan, por lo que, aunque aparecía con más frecuencia la expresión $a \pm b$, al no estar presente el signo igual, se dispara el porcentaje del contexto que tiene la operación a la derecha.

El signo igual y su significado en los libros de texto de primer ciclo de educación primaria

El hecho de que hayamos encontrado un alto porcentaje de páginas en los libros de texto en las que aparece el signo igual en la forma aritmética canónica coincide con lo visto en los trabajos anteriores. Seo et al. (2003) y McNeil et al. (2006) encontraron que el contexto más frecuente era el contexto ‘operación igual resultado’, que coincide con lo aquí obtenido.

Un contexto importante para adquirir una interpretación relacional del signo igual según los estudios previos es el que tiene operaciones en ambos lados del signo igual (McNeil, 2006). De nuevo encontramos que este contexto aparece un número muy bajo de veces, a pesar de ser el contexto que más favorece la adquisición de un significado relacional del signo.

En una de las editoriales aparece en dos ocasiones una expresión clara de utilización unidireccional del signo igual. Este contexto no lo podemos considerar como operación en ambos lados del signo igual ya que en la sentencia $5 + 7 = 12 + 8 = _ + 9 = _ + 5 = _$, el signo igual no significa que el valor de la operación de la izquierda sea igual al valor de la operación de la derecha. Lo que realmente se está utilizando es el contexto ‘operación igual resultado’ concatenado varias veces.

Otro de los contextos que más favorecen interpretación relacional del signo igual es el contexto aritmético ‘resultado igual operación’ según lo anterior. Todas las editoriales no superan un 10% de este tipo de contextos excepto la editorial Bruño.

En resumen, en los contextos aritméticos, el que más aparece en todos los libros de texto es la forma ‘operación igual resultado’, que lleva a una interpretación operacional según hemos visto en el marco teórico.

Contextos no aritméticos

Por lo que se refiere a los contextos no aritméticos, Seo et al. (2003) concluyeron que este tipo de contextos ayudaba a los niños a construir un significado de equivalencia numérica del signo igual. En la Tabla 4 se pueden observar los porcentajes en los que aparece el signo igual en ese contexto, respecto al total en cada libro. Como se puede observar, en ninguno de los libros analizados los porcentajes son altos.

<i>Curso</i>	<i>Libro de texto</i>	<i>Comparación</i>	<i>Medida</i>	<i>Monedas</i>	<i>Sistema decimal</i>	<i>Otros</i>
1	Vicens Vives – Mundo de Colores	1,04	0	0	1,04	0
	Anaya – Salta a la vista	0	0	0	3,69	3,28
	SM – Trampolín	3,46	0	0	0,69	0
	Bruño – Lapiceros	0,63	0	3,75	0	0
2	Vicens Vives – Mundo de Colores	0	0,35	0,18	1,93	0,70
	Anaya – Salta a la vista	0,29	2,58	0,29	10,44	0,14
	SM – Trampolín	0,17	2,01	0,17	3,02	0
	Bruño - Lapiceros	0,36	0,72	1,44	0,36	0,36

Tabla 4. Porcentaje de los distintos contextos no aritméticos respecto al total.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos revelan que los estudiantes del primer ciclo de Educación Primaria encuentran el signo igual en el contexto aritmético ‘operación igual resultado’ mucho más frecuentemente que en otros contextos aritméticos o no aritméticos. En mucho menos porcentaje, aparecen contextos como ‘operaciones a ambos lados del signo igual’ o ‘resultado igual operación’. Según hemos visto en el trabajo de McNeil et al. (2006), estos últimos contextos ayudan a adquirir una interpretación relacional del signo igual, todo lo contrario que el contexto ‘operación igual resultado’ que conlleva adquirir un significado operacional.

También hemos observado que hay muy pocas situaciones en la que aparezcan contextos no aritméticos, como la equivalencia de monedas, medida, comparación de cantidades, que según los trabajos de Seo et al. (2003) ayudan a percibir ese significado de relación de equivalencia que tiene el signo igual.

Hemos encontrado incluso un uso indebido del signo igual en el que se concatenan varios cálculos aritméticos, lo que conlleva un uso unidireccional del signo igual y por lo tanto, a una vez más un significado incorrecto unidireccional del signo igual.

Como conclusión obtenemos que los contextos que encontramos en los libros del primer ciclo de Educación Primaria favorecen una interpretación operacional del signo igual, lo que podría implicar una dificultad a la hora de adquirir un significado de equivalencia numérica de las expresiones situadas a ambos lados del signo igual. Esta comprensión como operador que parece provocar los libros de texto en el primer ciclo de primaria podría obstaculizar el aprendizaje de un significado más completo si no se expone a los alumnos a situaciones más variadas de uso del signo igual. Una instrucción basada en contextos que dan una imagen de operador del signo igual puede suponer problemas a la

El signo igual y su significado en los libros de texto de primer ciclo de educación primaria

hora de extender su significado. No obstante, la información que llega a los niños no depende sólo de los libros de texto. En la instrucción las actividades planteadas por el profesor y sus explicaciones y otros materiales complementarios que se utilizan en el aula, pueden mostrar otra imagen diferente del signo.

En trabajos posteriores, se podría comprobar de forma experimental como afecta el uso de estos libros de texto a los estudiantes del primer ciclo, registrando que significados le dan al signo igual utilizando dichos materiales. Además habría que analizar otros factores como materiales complementarias y la presentación del profesor del signo igual en el aula. Todos estos factores influyen en el aprendizaje de los estudiantes y sería necesario analizarlos en conjunto. Una vez analizadas todas estas características, sería necesario crear una programa de intervención en la instrucción de la Aritmética tal como propone autores como Molina (2009). Si realizamos una instrucción rica en diferentes contextos en los que aparezca el signo igual no sólo como el contexto aritmético canónico, sino con todos los propuestos en el trabajo, podríamos comprobar si es suficiente para conseguir ese significado relacional del signo o igual, o trabajar en la línea que la adquisición de los diferentes significados del signo igual depende del desarrollo de los niños.

Referencias

- Behr, M. J., Erlwanger, S., y Nichols, E. (1980). How Children View the Equals Sign. *Mathematics Teaching*, 92, 13-15.
- Carpenter, T.P., Franke, M. L., y Levi, L. (2003). *Thinking Mathematically: Integrating Arithmetic and Algebra in Elementary School*. Portsmouth, England: Heinemann.
- Essien, A. y Setati, M. (2006). Revisiting the Equal Sign: Some Grade 8 and 9 Learners' Interpretations. University of the Witwatersrand, Johannesburg, South Africa. *African Journal of Research in SMT Education*, 10(1), 47-58.
- Hunter J. (2007). Relational or Computational Thinking: Students Solving Open number Equivalence Problems. En J. Watson & K. Beswick, *Mathematics: Essential Research, Essential Practice 1*, (pp. 421-429). Massey University: MERGA.
- Knuth, E.J., Alibali, M.W., McNeil, N.M., Weinberg, A. y Stephens, A.C. (2005). Middle School Students' Understanding of Core Algebraic Concepts: Equivalence & Variable. *ZDM* 37(1), 68-76.
- Knuth, E.J., Stephens, A.C., McNeil, N.M., Alibali, M.W. (2006). Does Understanding the Equal Sign Matter? Evidence from Solving Equations. *Journal for research in Mathematics Education* 37(4), 297-312.
- McNeil, N.M. y Alibali, M.W. (2005). Why Won't You Change Your Mind? Knowledge of Operational Patterns Hinders Learning and Performance on Equations. *Child Development*, 76(4) 883-899.
- McNeil, N.M., Grandau, L., Knuth, E.J., Alibali, M.W., Stephens, A.C., Hattikudur, S. et al. (2006). Middle-School students' understanding of the Equal sign: The Books They Read can't Help. *Cognition and Instruction*, 24(3), 367-385.

- Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria*. Tesis doctoral. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Disponible en <http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/MolinaM072822.PDF>.
- Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, 3(3), 135-156.
- Morris, A. K. (2003, Spring Edition). The Development of Children's Understanding of Equality and Inequality Relationships in Numerical Symbolic Contexts. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 25(2), 18-51.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor.
- Seo K.H., Ginsburg, H.P (2003). "You've Got to Carefully Read de Math Sentence...": Classroom Context and Children's Interpretations of the Equal Sign. En A. J. Baroody y A. Dowker (Eds), *The development of arithmetic concepts and skill: constructing adaptive expertise* (pp. 161, 178). Mahwah NJ: Lawrence Erlbaum Associates.