Épsilon - *Revista de Educación Matemática* 2013, Vol. 30(3), nº 85, 105-116

De José Mariano Vallejo a Pascal: recordando un antiguo criterio de divisibilidad

Antonio M. Oller Marcén
(oller@unizar.es)
Centro Universitario de la Defensa, Academia General Militar
Vicente Meavilla Seguí
(meavilla@unizar.es)
Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza

Resumen: *Los criterios de divisibilidad configuran un tópico matemático que ha interesado a los matemáticos desde la antigüedad. En este artículo presentamos un interesante y poco conocido resultado sobre divisibilidad estudiado por Blaise Pascal en su De numeris multiplicibus (1655). También veremos cómo el matemático granadino José Mariano Vallejo recogió este resultado en el Tratado elemental de Matemáticas (1812) para justificar los criterios de divisibilidad clásicos más sencillos. Terminaremos presentando el resultado de Pascal en su forma más general, utilizando lenguaje moderno.*
Palabras clave: *Criterios de divisibilidad, Blaise Pascal, José Mariano Vallejo, Historia de las Matemáticas, siglo XVII, siglo XIX.*

Since José Mariano Vallejo to Pascal: remembering an old divisibility criterion

Abstract: *The study of divisibility criteria is a mathematical topic with has interested mathematicians since long time ago. In this paper we present an interesting but Little-known result about divisibility studied by Blaise Pascal on his De numeris multiplicibus (1655). We will also see how the mathematician from Granada José Mariano Vallejo gathered this result on his Tratado elemental de Matemáticas (1812) in order to justify the more simple classical divisibility criteria. We will finish by presenting Pascal's result in its more general form using modern language.*

Keywords: *Divisibility criteria, Blaise Pascal, José Mariano Vallejo, History of Mathematics, XVII century, XIX century.*

1. INTRODUCCIÓN. UN CURIOSO CRITERIO DE DIVISIBILIDAD

El estudio de criterios de divisibilidad ha atraído la atención de los matemáticos desde antiguo (Dickson, 1919). En la enseñanza actual los conceptos de múltiplo y divisor se introducen en el tercer ciclo de la Educación Primaria (10-12 años), mientras que los criterios de divisibilidad más elementales se presentan en el segundo curso de la Educación Secundaria Obligatoria (13-14 años).

Para comenzar vamos a presentar e ilustrar mediante un ejemplo un criterio de divisibilidad por 7 válido para números de 6 cifras.

Supongamos que tenemos un determinado número de 6 cifras escrito en el sistema decimal (que es al que todos estamos acostumbrados). Así pues, nuestro número será de la forma:

$$N = a_6 a_5 \ldots a_1,$$

donde a_1 es la cifra de las unidades, a_2 la de las decenas, y así sucesivamente.

En esta situación se tiene que el número N es múltiplo de 7 si y sólo si el número $a_1+3a_2+2a_3+6a_4+4a_5+5a_6$ es múltiplo de 7.

Por ejemplo, si consideramos $N = 676368$, resulta que:

$8+(3\times6)+(2\times3)+(6\times6)+(4\times7)+(5\times6) = 8+18+6+36+28+30 = 126.$

Por lo tanto, como $126 = 7\times18$, el número original es múltiplo de 7. De hecho, se comprueba dividiendo que $676368 = 7\times96624$.

Este criterio de divisibilidad por 7 para números de 6 cifras es un caso particular de una situación mucho más general y bastante poco conocida.

En este pequeño trabajo vamos a presentar dicho resultado general, cuyo origen se remonta, al menos, hasta el siglo XVII en la obra de Blaise Pascal y que puede encontrarse en la obra del matemático granadino del siglo XIX José Mariano Vallejo.

2. EL MÉTODO DE PASCAL

Blaise Pascal nació el 19 de junio de 1623 en Clermont - Ferrand y murió el 19 de agosto de 1662 en París.

Su padre, el matemático Etienne Pascal, se hizo cargo de su educación, y decidió que Blaise no iniciara los estudios de matemáticas hasta haber cumplido los quince años. Así, los textos consagrados a esta disciplina fueron puestos fuera del alcance del joven Pascal. Sin embargo, la prohibición paterna despertó su curiosidad por la geometría y a los doce años de edad ya había descubierto que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos. Ante tal descubrimiento, Etienne cambió de parecer y regaló a su hijo un ejemplar de los *Elementos* de Euclides.

A los catorce años, Blaise acompañaba a su progenitor a las reuniones del padre Mersenne en las que participaban científicos de la talla de Roberval y Desargues, a los dieciséis publicó su *Essay pour les coniques*, y a los dieciocho diseñó y construyó una máquina calculadora.

Figura 1. Blaise Pascal

Pascal tuvo, sin duda, una de las mentes más privilegiadas de la historia, pero se interesó más por la teología que por las matemáticas, disciplina a la que se dedicó de forma intermitente. A pesar de ello, sus contribuciones al estudio de las cónicas, al "triángulo aritmético" (que también se conoce como "triángulo de Pascal"), y al cálculo de probabilidades le convierten, en palabras del historiador Carl B. Boyer (1986), en el mayor "podría haber sido" de la historia de las matemáticas[1].

En uno de esos intermitentes momentos en los que se decidió a hacer Matemáticas, allá por el año 1655, Pascal publicó el artículo *De numeris multiplicibus ex sola characterum numericorum additione agnoscendis*. En él, presenta un método general y algorítmico para determinar cuándo un número es divisible por otro. En las líneas siguientes vamos a describirlo (Meavilla, 2010).

El método de Pascal se apoya en la construcción de dos sucesiones numéricas una de las cuales se escribe sobre la otra:

1. Aunque a juzgar por su frase "vale más saber alguna cosa de todo, que todo de una sola cosa" no creemos que esta apreciación supusiera un problema para Pascal.

1) La primera sucesión (la superior) es la de los números naturales, escritos de derecha a izquierda.
2) La segunda sucesión (la inferior) se construye atendiendo a las indicaciones siguientes:
  i. Se escribe un uno debajo del 1 de la sucesión superior.
  ii. Del producto 10 1 [= 10] se resta A tantas veces como sea posible. Lo que sobra, llamémosle B, se escribe debajo del 2 de la primera sucesión.
  iii. Del producto 10 B se resta A tantas veces como sea posible. Lo que sobra, llamémosle C, se escribe debajo del 3 de la sucesión superior.
  iv. Del producto 10 C se resta A tantas veces como sea posible. Lo que sobra, llamémosle D, se escribe debajo del 4 de la primera sucesión.
  v. Etc.

Procediendo indefinidamente de este modo se llega al siguiente par de sucesiones:

. . . . 9	8	7	6	5	4	3	2	1	[S_1]
. . . . I	H	G	F	E	D	C	B	1	[S_2]

A partir de aquí, Pascal propone: *Si un número es tal que el producto de la cifra de sus unidades por 1, más el producto de la cifra de sus decenas por B, más el producto la cifra de sus centenas por C, más el producto de la cifra de sus millares por D, etc., es múltiplo de A, entonces el número también es múltiplo de A*.

En las figuras siguientes se presentan las demostraciones dadas por Pascal para los casos de dos y tres cifras, respectivamente. (Véanse figuras 2 y 3).

3. EL MÉTODO DE PASCAL “RESCATADO” POR JOSÉ MARIANO VALLEJO

José Mariano Vallejo nació en el pueblo de Albuñuelas, muy cerca de Granada, el 30 de mayo de 1779. Para obtener información sobre su vida podemos recurrir, por ejemplo, a Juan Bautista Peyronnet, quien nos ofrece los siguientes datos biográficos (*Seminario pintoresco español.* Núm. 52, 28 de diciembre de 1856, pp. 409-410):

> “*Desde su niñez dio pruebas nada equívocas del gran talento que más tarde, y con el estudio de la filosofía llegó a su completo desarrollo, siendo el discípulo más aventajado de la Universidad de Granada. Los progresos que hizo al aprender las matemáticas, llamaron la atención de los profesores de la Universidad, que le aconsejaron pasase a Madrid para perfeccionarse en este ramo tan importante del saber humano; lo que Vallejo ejecutó presentándose a la Real Academia de San Fernando para que lo admitiese en clase de alumno de las clases de matemáticas. Desde aquel momento empezó sus estudios bajo la dirección del eminente y respetable profesor D. Antonio Varas y Portilla a quien Vallejo respetó siempre como padre. No fueron estériles las lecciones de tan digno profesor, pues muy luego se vieron los adelantos del discípulo con las adiciones que escribió (y publicó la Academia) a la Geometría de D. Benito Bails. Terminados sus estudios, obtuvo la cátedra de matemáticas del Real Seminario de nobles de Madrid, en una lucida oposición en que reveló sus dotes como profesor y como hombre de ciencia. Desempeñó este cargo hasta que con motivo de las*

Verùm ex constructione, est. . . . . 10 — B multiplex A.
Quare ducendo 10 — B in N est. . . . . . 10 N — B in N multiplex A.
Si ergo contingit et esse . . . . M + B in N multiplicem A.
Ergo ambo ultimi multiplices juncti . . . . 10 N + M erunt mult. A.
Id est N in columnâ denarii et M in columnâ
unitatis, seu numerus . . . . NM est multiplex A.
Q. E. D.

Figura 2. Demostración para números de dos cifras.

At ex constructione est. . . . . 10 — B, multiplex A.
Quare multiplicando 10 — B per 10. . . . . 100 — 10 B, mult. A.
Et ducendo ipsos in V. . . . . 100 V — 10 B in V, mult. A.
Sed est etiam ex constructione. . . . . 10 B — C, mult. A.
Quare ducendo in V. . . . . 10 B in V — C in V, mult. A.
Sed ex ostensis. . . . . 100 V — 10 B in V, mult. A.
Ergo juncti duo ultimi. . . . . 100 V — C in V, mult. A.
Jam verò ostendemus ut in secundo casu. . 10 N — B in N, mult. A.
Ergo juncti duo ultimi, 100 V + 10 N — C in V — B in N, mult. A.
Ergo si contingat hos numeros. C in V + B in N + M, esse mult. A.
Ambo ultimi juncti, nempe. . . . . . . 100 V + 10 N + M, est mult. A.

Seu V, in columnâ centenarii, N denarii et M unitatis, hoc est numerus VNM, est multiplex A. Q. E. D.

Figura 3. Demostración para números de tres cifras.

ocurrencias del año 1808 se trastornó completamente la marcha de todos los asuntos (…). *Terminada la guerra, y restablecido el Gobierno legítimo en Madrid, se dedicó a continuar la publicación de su tratado de matemáticas, y en 1818 al estudio de conducir aguas a Madrid, en vista de la escasez que ya entonces se notaba; presentando en 1819 al Rey D. Fernando VII una memoria sobre tan importante asunto, y otra al Excmo. Ayuntamiento. Estos trabajos fueron bien acogidos por el Monarca y por la Corporación Municipal; y a no ser por las ocurrencias del año 1820, se hubiera llevado a cabo tal proyecto que posteriormente se intentó realizar, pero cuyas circunstancias especiales retardaron la ejecución* (…). *A la vez que desempeñaba multitud de comisiones del Gobierno y su destino de oficial del ministerio de la Gobernación, escribía obras importantes que han contribuido de una manera muy eficaz a la ilustración del país, siendo muy notable la Memoria sobre la curvatura de las líneas, que se recibió con mucho aplauso en la Academia de París. Retirado en Francia desde el año 23 al 29, se dedicó a viajar por Francia, Bélgica, Holanda e Inglaterra, estudiando y adquiriendo datos para la obra que sobre el movimiento y aplicaciones de las aguas publicó en tres volúmenes en el año 1833, obra que contiene todos los conocimientos adquiridos y desenvueltos hasta aquella época. Vallejo pertenecía al partido liberal progresista, en cuyas filas ha permanecido constantemente hasta su muerte; y, por lo mismo, no figuró hasta el año de 1834 en que volvió a desempeñar el cargo de Director de Instrucción pública. Con este motivo redobló su celo; y con la constancia que le era tan característica, se dedicó a escribir varias obras de instrucción primaria (de cuyo desarrollo y engrandecimiento era el más entusiasta* *partidario) estableciendo aparatos sencillos para facilitar la escritura y el estudio de la Aritmética. Vallejo ha sido presidente de la sección de ciencias físicas y matemáticas de la Academia de ciencias, y Vice-Director de la Sociedad Económica de Madrid. Cooperó para el establecimiento del Ateneo en 1820, y para su restablecimiento en 1835; y presidió sus secciones de ciencias físicas y matemáticas* (…). *El 4 de marzo de 1846, murió tan insigne varón, llorado por sus amigos, y dejando un vacío difícil de llenar* (…).”

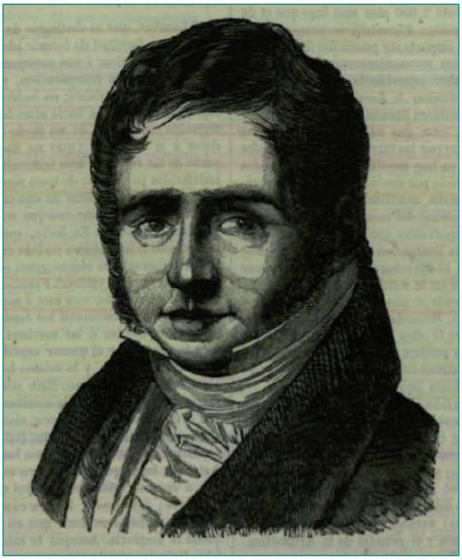


Figura 4. José Mariano Vallejo

Vallejo escribió diversos textos dedicados a la enseñanza de las matemáticas del más alto nivel. Uno de ellos en su *Tratado elemental de matemáticas*[2], en el que se aborda desde la Aritmética elemental hasta la Mecánica, pasando por el Cálculo Diferencial o la Trigonometría esférica.

En el Tomo primero de la Primera parte de este *Tratado elemental de matemáticas* se trabaja la Aritmética básica. En la página 73 de este tomo se presentan los criterios de divisibilidad básicos más sencillos: los correspondientes a la divisibilidad por 2, por 3, por 5 y por 11. (Véase figura 5).

Tras presentarlos, Vallejo se lamenta del tratamiento que suele recibir el tema de los criterios de divisibilidad y se propone presentar el material con total rigor:

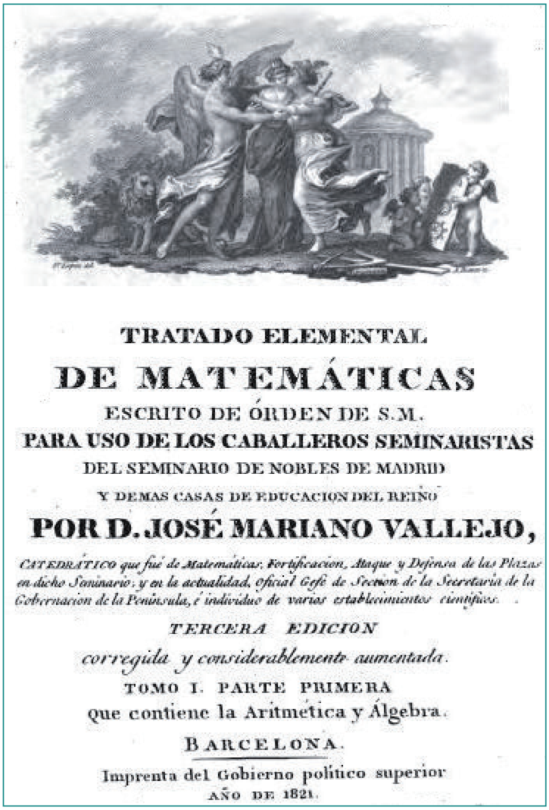
“*Todas estas reglas las dan generalmente los autores sin demostración ninguna, y sólo se contentan con verificarlas; algunos más delicados se paran a demostrar algunas de ellas, atendiendo en cada caso a observaciones particulares; pero nosotros vamos a resolver esta*

2. El título completo de la obra es Tratado elemental de Matemáticas escrito de orden de S. M. para uso de los caballeros seminaristas del Seminario de Nobles de Madrid y demás casas de educación del Reino (1812).

cuestión en general, cosa que no tenemos noticia se halle en ningún libro elemental, por medio del siguiente:

PROBLEMA. *Dado un número cualquiera, conocer si es divisible por otro número cualquiera, por otros medios diferentes de los que suministra la división.*"

El autor plantea el problema de la construcción de criterios de divisibilidad en toda su generalidad. A continuación, pasa a describir el siguiente procedimiento que permite caracterizar la relación de divisibilidad entre dos números. Una lectura detenida muestra claramente que se trata del método de Pascal:



TRATADO ELEMENTAL
DE MATEMÁTICAS
ESCRITO DE ÓRDEN DE S.M.
PARA USO DE LOS CABALLEROS SEMINARISTAS
DEL SEMINARIO DE NOBLES DE MADRID
Y DEMAS CASAS DE EDUCACION DEL REINO
POR D. JOSÉ MARIANO VALLEJO,
CATEDRÁTICO que fué de Matemáticas, Fortificacion, Ataque y Defensa de las Plazas en dicho Seminario; y en la actualidad, oficial Gefe de Seccion de la Secretaria de la Gobernacion de la Península, é individuo de varios establecimientos científicos.
TERCERA EDICION
corregida y considerablemente aumentada.
TOMO I. PARTE PRIMERA
Que contiene la Aritmética y Álgebra.
BARCELONA.
Imprenta del Gobierno político superior
AÑO DE 1821.

Figura 5. Portada de la tercera edición del *Tratado elemental de Matemáticas* (1821)

"Res. *Fórmese ante todas cosas un conjunto de números con el orden siguiente: póngase en un lugar separado* 1; *a su izquierda el residuo que quede de restar el número que ha de servir de divisor, todas las veces que se pueda de* 10; *a la izquierda de este residuo, póngase el que quede de restar el divisor propuesto, todas las veces que se pueda, de diez veces la resta anterior, a la izquierda de este el que quede de restar el mismo divisor todas las veces que se pueda de diez veces el residuo anterior; y continúese de este modo hasta encontrar tantos* *residuos de estos, como guarismos tiene el que ha de servir de dividendo, o hasta que los residuos sean cero; después multiplíquese el último guarismo del que ha de servir de dividendo por* 1*, que es el primero de este conjunto de números; el segundo del dividendo por el segundo de estos números, el tercero por el tercero, etc. hasta que cada guarismo del dividendo se haya multiplicado por el correspondiente en este conjunto; súmense todos estos productos, y si la suma es divisible por el divisor dado lo será también el dividendo propuesto*."

El propio Vallejo señala la autoría del resultado en la página 76, indicando lacónicamente "que es de Pascal". Sin embargo, no da indicación alguna respecto a la obra en la que hubiera podido aprender dicho resultado.

Tras la descripción del criterio, Vallejo lo aplica a modo de ejemplo a los números 6232 y 19. Posteriormente detalla las demostraciones de los casos en los que el dividendo tiene una, dos y tres cifras. En esos casos, la demostración dada por Vallejo consiste en el desarrollo detallado de las que hemos mostrado en las Figuras 2 y 3. Para el caso general el autor se limita a señalar que "*lo mismo demostraríamos cuando tuviese más guarismos*".

Una vez establecida la validez general del método de Pascal, el autor se dedica a mostrar cómo pueden deducirse de él los criterios clásicos de divisibilidad por 2, 3, 5, 6, 9, 11 y 13. Para ello, Vallejo calcula las sucesiones de restos por los que hay que multiplicar cada una de las sucesivas cifras del dividendo. En concreto obtiene:

Divisor	**Sucesión de restos (de izquierda a derecha)**
2	1, 0, 0, 0, 0,…
3	1, 1, 1, 1, 1,…
5	1, 0, 0, 0, 0,…
6	1, 4, 4, 4, 4,…
9	1, 1, 1, 1, 1,…
11	1, 10, 11, 10, 11,…
13	1, 10, 9, 12, 3, 4, 1, 10,…

Es evidente que recordando el modo en que se construye la sucesión de restos correspondiente a un divisor, podemos "fabricar" a nuestro antojo los criterios de divisibilidad por un número cualquiera.

Por ejemplo, si deseamos construir un criterio de divisibilidad por 7, basta con calcular la sucesión de restos correspondiente (recordar la introducción):

$$r_n: 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2,\dots\ (n \geq 0).$$

Así, dado un número N expresado en base 10:

$$N = \sum_{i=0}^{k} c_i 10^i,$$

se tiene que 7 es divisor de N si y sólo si 7 es divisor de $N' = \sum c_i r_i$.

Además, el método de Pascal posee la evidente ventaja de ser recursivo, en el sentido de que puede aplicarse nuevamente al número *N’* obtenido para estudiar su divisibilidad y, en cada paso en que se aplique el método, el número cuya divisibilidad debe estudiarse es cada vez más pequeño.

4. EL ENUNCIADO GENERAL Y SU EXTENSIÓN A CUALQUIER BASE

En esta sección vamos a presentar el método de Pascal para determinar si un número es divisible por otro con un lenguaje más moderno. Gracias a ello podremos dar una demostración general muy condensada, así como extenderlo al caso en que utilicemos bases de numeración cualesquiera y no necesariamente la base decimal.

Supongamos que tenemos un entero N, expresado en un sistema de numeración en base b cualquiera:

$$\boxed{N = \sum_{i=0}^{k} c_i b^i.}$$

Dado un entero m cualquiera, construimos recursivamente una sucesión $\left\{r_n^{(m)}\right\}_{n\geq 0}$ del siguiente modo:

$$r_0^{(m)} = 1,$$
$$r_n^{(m)} \equiv br_{n-1}^{(m)} \ (\mathrm{mod}\ m), \text{ con } 0 \leq r_n^{(m)} \leq m - 1, \text{ para todo } n \geq 1.$$

En estas condiciones, el resultado de Pascal afirma que m divide a N si y sólo si m divide a:

$$N' = \sum_{i=0}^{k} c_i r_i^{(m)}.$$

La demostración de este resultado es bastante sencilla. Por construcción, tenemos que $r_n^{(m)} = B_n m + br_{n-1}^{(m)}$ para algún entero B_n. En consecuencia, razonando recursivamente, se tiene que, para todo $n \geq 0$:

$$r_n^{(m)} = A_n m + b^n.$$

Así pues, tenemos que:

$$N' = \sum_{i=0}^{k} c_i r_i^{(m)} = \sum_{i=0}^{k} (c_i A_i m + c_i b^i) = Am + N,$$

de donde el resultado de Pascal se sigue directamente.

Como ejemplo de este resultado más general tenemos el siguiente criterio de divisibilidad por 3 para números escritos en base 2, cuya justificación y comprobación dejamos como ejercicio al lector: *Un número N escrito en base 2 es múltiplo de 3 si y sólo si la suma de las cifras de posición impar (unidades, centenas, etc,…) más el doble de la suma de las cifras de posición par (decenas, millares, etc,…) es múltiplo de 3*.

5. ALGUNAS REFLEXIONES HISTÓRICO-DIDÁCTICAS

Si revisamos libros de texto de Enseñanza Secundaria Obligatoria actuales en los que se presentan algunos criterios de divisibilidad elementales (por ejemplo el criterio de divisibilidad por 2, por 3, por 5, etc.) observaremos que presentan defectos similares a los apuntados por Vallejo ya en 1812: los resultados se presentan no ya sin demostración, sino sin justificación alguna más allá de la presentación de algunos ejemplos concretos.

Evidentemente la demostración que hemos presentado en la sección anterior va, tanto por el lenguaje como por su complejidad, más allá de lo que puede tratarse en un aula de Secundaria.

Sin embargo, pensamos que a ese nivel sí que hay espacio (debe haberlo) para que los alumnos traten de descubrir (aunque sea por ensayo y error) algunos criterios de divisibilidad sencillos. Igualmente creemos que el método de Pascal puede introducirse, dado su carácter algorítmico, sin muchos problemas e incluso puede justificarse (siguiendo la demostración original de Pascal) en los casos de dos o tres cifras. Una vez hecho esto, los alumnos pueden construir las sucesiones de restos correspondientes y “fabricar” así distintos criterios de divisibilidad.

El carácter elemental que se otorga desde la enseñanza a la Aritmética del número natural (desaparece del currículo ya a partir del tercer curso de la Enseñanza Secundaria Obligatoria) hace que este tipo de resultados elementales abordables desde un punto de vista superior queden en el olvido.

Con este trabajo, además de “rescatar” del olvido este resultado de Pascal, hemos pretendido poner de manifiesto el modo en que el estudio de textos antiguos de Matemáticas puede aportar ideas interesantes que presentar en el aula.

En este sentido, pensamos que el uso de fuentes históricas y textos antiguos es de especial interés con maestros y profesores en formación. El trabajo a realizar se desarrollaría según las siguientes fases:

1) Búsqueda, lectura y estudio de los textos.
2) Análisis del contenido de dichos textos, poniéndolo en relación con el currículo actual de matemáticas.
3) Profundización, desde un punto de vista matemático, en el contenido estudiado.
4) Diseño de actividades para el aula a partir del trabajo anterior.

En las secciones anteriores hemos desarrollado los tres primeros puntos anteriores (el segundo sólo superficialmente). Dejamos al lector interesado el desarrollo más detenido del segundo punto, así como el trabajo sobre el cuarto.

REFERENCIAS

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática.* Madrid: Alianza Editorial.

Dickson, L. E. (1919). *History of Theory of Numbers* (Volume I. Divisibility and primality). Washington: Carnegie Institution.

Meavilla-Seguí, V. (2010). *La sinfonía de Pitágoras: El fascinante mundo de la Aritmética*. Córdoba: Almuzara.

Pascal, B. (1819). *Oeuvres de Blaise Pascal* (Tome cinquième). Paris: Chez Lefèvre, Libraire.

Peyronnet, J. B. (1856). *Seminario pintoresco español.* Núm. 52, 28 de diciembre de 1856.

Vallejo, J. M. (1812). *Tratado elemental de Matem*áticas escrito de orden de S. M. para uso de los caballeros seminaristas del Seminario de Nobles de Madrid y demás casas de educación del Reino (Tomo primero. Parte primera). Mallorca: Imprenta de Melchor Guasp.