Épsilon - *Revista de Educación Matemática* 2013, Vol. 30(2), nº 84, 19-40

Aspectos de la presentación del sistema de coordenadas cartesianas en la *Introductio in Analysin Infinitorum* de Euler y en libros de texto de Lacroix[1]

Maite Navarro y Luis Puig
Universitat de València Estudi General

Resumen: *Este artículo estudia la presentación del sistema de coordenadas cartesianas en la Introductio in Analysin Infinitorum de Euler y en los libros de texto de Lacroix Traité du calcul différentiel et du calcul intégral y Traité Élémentaire de Trigonométrie Rectiligne et Sphérique, et d'Application de l'Algèbre a la Géométrie, indagando qué componentes hicieron posible su sistematización, y teniendo presente las dificultades de los estudiantes en el uso de las coordenadas cartesianas.*
Términos Claves: *Euler, Lacroix, Coordenadas cartesianas, Representación gráfica de funciones, Trazado de curvas, Libros de texto*

Facets of the presentation of the Cartesian coordinate system in Euler's *Introductio in Analysin Infinitorum* and Lacroix's textbooks

Summary: *This paper studies the presentation of the Cartesian coordinate system in Euler's Introductio in Analysin Infinitorum and in Lacroix's Traité du calcul différentiel et du calcul intégral and Traité Élémentaire de Trigonométrie Rectiligne et Sphérique, et d'Application de l'Algèbre a la Géométrie, searching for what components made possible its systematization, and bearing in mind students' difficulties.*
Key Words: *Euler, Lacroix, Cartesian coordinates, Graphical representation of functions, Curves drawing, Textbooks*

1. Este trabajo es resultado de los proyectos de investigación financiados por el Ministerio de Ciencia e Innovación (EDU2009-10599) y el Ministerio de Economía y Competitividad (EDU2012-35638) de España.

INTRODUCCIÓN

Es un hecho harto conocido que los estudiantes tienen dificultades en la comprensión y el uso de la representación de funciones en el sistema de coordenadas cartesianas (SCC). Muchas veces provocadas por una lectura o localización incorrecta de las coordenadas cartesianas como se observa en la figura 1.

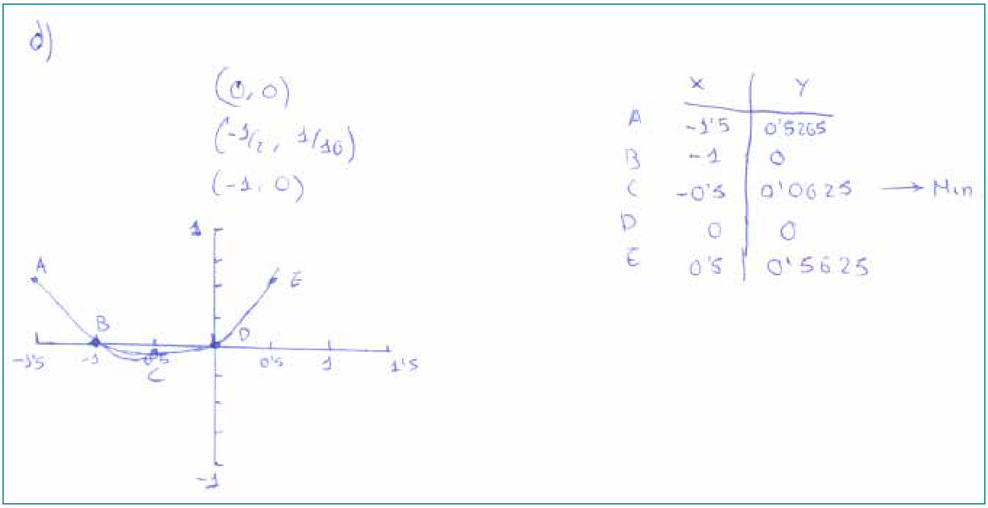

Figura 1. Errores en la localización de coordenadas cartesianas.

Esta problemática didáctica nos ha conducido a establecer "qué textos debíamos examinar en la historia y qué preguntas debíamos hacerles" (Puig, 2011, p. 29).

Hemos examinado los textos buscando lo que Puig (Puig, 2006, p. 113), llama "cogniciones petrificadas". "Petrificadas" porque están ahí, en el texto que nos ha legado la historia, como en los monumentos de piedra de los que no cabe esperar que digan más que lo que ya está en ellos. "Cogniciones" porque lo que queremos leer en esos textos no es el despliegue de un saber, las matemáticas, sino el producto de las cogniciones (matemáticas) de quien se declara su autor".

Los textos que hemos elegido examinar desde este punto de vista han sido el libro de Euler *Introductio in Analysin Infinitorum* (1748), y su traducción francesa de 1796-1797, y los libros de texto de Lacroix *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* (1797) y *Traité Élémentaire de Trigonométrie Rectiligne et Sphérique, et d'application de l'Algèbre a la Géométrie* (1797).

RAZONES PARA LA ELECCIÓN DE LOS TEXTOS

Las razones para elegir la *Introductio* de Euler y los libros de texto de Lacroix son, en primer lugar, que queríamos examinar textos del momento en que la forma actual de representar las funciones en el SCC se estaba constituyendo, y del momento en que se estaba incorporando como materia de enseñanza en los libros de texto.

Además, la razón principal para elegir la *Introductio* de Euler es que es uno de los primeros libros que tratan las coordenadas cartesianas de forma sistemática.

Por su parte, los libros de texto de Lacroix han sido elegidos porque

1) elementarizan las matemáticas con el objetivo de enseñarlas (Schubring, 1987),
2) tratan las coordenadas cartesianas de forma progresiva y
3) tuvieron un gran impacto en la enseñanza de las matemáticas no sólo en Francia, sino también en España.

El *Traité Élémentaire de Trigonométrie Rectiligne et Sphérique, et d'application de l'Algèbre a la Géométrie* de Lacroix fue traducido al español como parte del *Curso completo elemental de matemáticas*, título con que se publicó la traducción española de los libros de texto de Lacroix. Esta traducción fue muy usada ya que el Real Decreto de 1824 del rey Fernando VII sobre el plan general de estudios del Reino, estableció en su artículo 42 que "en todas estas cátedras [refiriéndose a las cátedras de Matemáticas y Ciencias de las Universidades] durarán las lecciones hora y media por la mañana y una por la tarde; sirviendo de texto para las Matemáticas puras la obra de Mr. Lacroix, traducida por Rebollo".


DECRETOS

A1802

DEL REY NUESTRO SEÑOR

DON FERNANDO VII,

Y REALES ORDENES, RESOLUCIONES Y REGLAMENTOS GENERALES EXPEDIDOS POR LAS SECRETARIAS DEL DESPACHO UNIVERSAL Y CONSEJOS DE S. M. EN LOS SEIS MESES CONTADOS DESDE 1.° DE JULIO HASTA FIN DE DICIEMBRE DE 1824.

CON UN APENDICE.

POR DON JOSEF MARIA DE NIEVA.

TOMO NONO.

R 18/983

DE ORDEN DE S. M.

MADRID EN LA IMPRENTA REAL

AÑO DE 1825.

Figura 2. Decretos del rey nuestro señor don Fernando VII.

Hasta donde hemos podido averiguar, el *Tratado elemental de trigonometría rectilínea y esférica, y de la aplicación del álgebra a la geometría* se publicó en ocho ediciones, siendo la octava de 1846. Hemos usado la 6ª edición española de 1820 (Lacroix, 1820), y la 4ª edición del original francés (Lacroix, 1807). El *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* de Lacroix no se tradujo al español, que sepamos, de modo que hemos usado sólo la primera edición del original francés (Lacroix, 1797).

COMPONENTES DE LA CONSTITUCIÓN DEL SCC

Como resultado de nuestro estudio, hemos establecido que los componentes principales que hicieron posible la sistematización del sistema de coordenadas cartesianas, tal y como ésta se encuentra en los textos analizados, son los siguientes:

1) La dotación de significado a las cantidades negativas en álgebra y en geometría, y el establecimiento de un origen fijo de coordenadas.
2) La constitución del concepto de abscisa.
3) El paso de la noción de aplicada (un segmento levantado en el extremo de las abscisas) al concepto de ordenada (una distancia medida en el eje de ordenadas).
4) El paso de las coordenadas como segmentos a las coordenadas como distancias, y el consiguiente paso a las coordenadas como números.
5) El establecimiento de ejes de coordenadas absolutos, esto es, ejes no específicos de la curva.

La dotación de significado a las cantidades negativas en álgebra y en geometría, y el establecimiento de un origen fijo de coordenadas

La dotación de significado a las cantidades negativas en la aritmética y en el álgebra es una cuestión bastante compleja y sobre la que hay mucho estudiado y escrito. En concreto, la dificultad en la expresión y simbolización de estas cantidades en el álgebra provoca ciertas ambigüedades en ambos autores.

En los libros analizados las letras representan cualquier tipo de número. Así pues, la letra simboliza cualquier número, ya sea un número (real) positivo o negativo. Sin embargo, en las formas canónicas de segundo grado, la letra representa una cantidad positiva que se puede añadir o sustraer.

$$axx \pm c = 0, \text{ ou } axx = \mp c$$

Figura 3. Ecuación de 2º grado pura (Euler, 1774, p. 519).

Por otra parte, cada vez que se quiere subrayar que la cantidad es negativa, la expresión lleva explícitamente antepuesto el signo –, es decir, la letra únicamente puede representar un número positivo. Lacroix proporciona la siguiente ecuación de la recta cuando la incógnita es negativa.

> Lorsque x sera négatif, on trouvera
> $y = - ax + b$

Figura 4. (Lacroix, 1807, p. 123)[2]

En el tomo II de la *Introductio* cada vez que se hace referencia a un valor negativo de la variable x hace uso de la expresión $-x$.

> 18. Secundum Figuram apparet, dum Abſciſſa negativa $- x$ contineatur intra limites AC & AE, Applicatam y fieri imaginariam, eſſeque $PP < Q$: ultra E vero ſiniſtrorſum progrediendo Applicatæ iterum fiunt reales, quod fieri nequit niſi

Figura 5. (Euler, 1748, t. II, p. 9)[3]

Las dificultades que ocasionan las cantidades negativas en el álgebra provocan a su vez dificultades en la expresión de las ecuaciones en la geometría y el análisis.

Así pues, la dotación de significado de lo negativo se convierte en una cuestión primordial en el proceso de sistematización de las coordenadas. Hubiera sido imposible dicha sistematización sin tener en cuenta tanto los valores positivos como los negativos, lo que apremiaba a la geometría a dotar de significado a las magnitudes asociadas a cantidades negativas. Para ello fue necesario considerar las magnitudes como segmentos orientados, lo que a su vez hizo imprescindible el establecimiento de un origen de coordenadas fijo.

Para representar cantidades en geometría, Euler utiliza magnitudes (en el sentido que tiene magnitud en los *Elementos* de Euclides). Para representar las magnitudes determinadas utiliza una recta ilimitada (RS) que contiene todos sus valores determinados y fija en ella un punto que será el origen (A), no de las cantidades, sino de las magnitudes determinadas. Así pues, cada magnitud determinada representa un valor determinado incluido en la cantidad variable.

2. "Cuando x sea negativa, se hallará $y = - ax + b$". (Lacroix, 1820, p.141)

3. "Está claro, después de la inspección de la figura, que, mientras que la abscisa negativa $-x$ está contenida entre los límites AC y AE, la aplicada y es imaginaria […]". (Traducción nuestra)

1. Une quantité variable étant une grandeur conſidérée en général, qui renferme toutes les valeurs déterminées; une droite indéfinie, telle que *R S*, ſera très-propre à repréſenter, en géométrie, une quantité de cette nature. En effet, puiſqu'on peut prendre ſur une droite indéfinie, une partie quelconque, qui ait une valeur déterminée, cette ligne préſente à l'eſprit la même idée de grandeur, que la quantité variable. Il faut donc, avant tout, fixer ſur une ligne indéfinie *R S* un point *A*, qui ſera cenſé l'origine des grandeurs déterminées, qu'on en ſéparera; ainſi une portion déterminée *A P* repréſentera une valeur déterminée compriſe dans la quantité variable.

Figura 6. Magnitud (Euler, 1796-97, t. II, p. 1)[4].

Euler, representa las magnitudes como segmentos en una recta ilimitada, que orienta arbitrariamente respecto de un punto previamente fijado, el origen (A).

Figura 7. Representación de magnitudes orientadas (Euler, 1748, t. II, Table I).

Para que la correspondencia sea biunívoca es necesario considerar solamente los segmentos que tienen el origen como uno de sus extremos. Fija arbitrariamente a la derecha del origen los valores reales positivos de la variable x, a la izquierda los valores negativos y el valor cero en el origen. Establece el orden en la recta ilimitada: cuanto más se aleja el punto P hacia la derecha, más grande es el valor de x representado por AP; cuanto más se aleja el punto p hacia la izquierda, más disminuye[5] el valor de x representado por Ap. Una vez fijados, añade que es indiferente ubicar a la derecha o la izquierda

4. "1. Como una cantidad variable es una cantidad que se considera en general, que contiene todos los valores determinados, una línea recta indefinida, como *RS*, será muy apropiada para representar en geometría una cantidad de esta naturaleza. En efecto, ya que se puede tomar sobre una recta indefinida, una parte cualquiera, que tenga un valor determinado, esta línea presenta al espíritu la misma idea de magnitud, que la cantidad variable. Por tanto, en primer lugar es necesario fijar sobre una línea indefinida *RS* un punto *A*, que será considerado el origen de las magnitudes determinadas, que se separarán de ella, así una porción determinada *AP* representará un valor determinado comprendido en la cantidad variable." (Traducción nuestra)

5. En esta ocasión Euler utiliza la letra x para referirse a una cantidad numérico-algebraica negativa sin necesidad de anteponer el signo –, que además asocia geométricamente a una magnitud considerada como un segmento orientado.

los valores positivos, puesto que los negativos se representarán en el lado opuesto, poniendo de relieve la arbitrariedad en la ubicación de las magnitudes que representan los valores positivos o negativos de las cantidades variables, y que lo realmente importante es que los valores negativos se deben representar en el lado opuesto al de los positivos[6].

3. Or, comme la droite indéfinie *RS* s'étend à l'infini de part & d'autre du point *A*, on pourra auſſi couper de part & d'autre toutes les valeurs de *x*. Mais, ſi nous prenons les valeurs poſitives de *x*, en allant ſur la droite depuis le point *A*, les intervalles *Ap* ſitués ſur la gauche repréſenteront les valeurs négatives de *x*. En effet, puiſque plus le point *P* s'éloigne du point *A* vers la droite, plus eſt grande la valeur de *x* repréſentée par l'intervalle *AP*; réciproquement, plus le point *P* s'éloigne vers la gauche, plus la valeur de *x* eſt diminuée; &, ſi *P* tombe ſur *A*, la valeur de *x* devient = o. C'eſt pourquoi, ſi le point *P* eſt reculé davantage vers la gauche, les valeurs de *x* deviendront plus petites que zéro, c'eſt-à-dire, ſeront négatives, & les intervalles *Ap* pris ſur la gauche depuis le point *A*, repréſenteront les valeurs négatives de *x*, ſi les intervalles *AP*, ſitués à la droite, ſont cenſés repréſenter les valeurs poſitives. Au reſte, il eſt indifférent de prendre du côté qu'on voudra les valeurs poſitives de *x*; car le côté oppoſé renfermera toujours les valeurs négatives.

Figura 8. Magnitudes orientadas (Euler, 1796-1797, t.II, p. 2)[7].

La arbitrariedad de la ubicación de las cantidades en geometría se pone de manifiesto en la representación que Lacroix hace de senos y cosenos. En el primer capítulo del *Traité Élémentaire de Trigonométrie*, Lacroix establece los signos de senos y cosenos en los diferentes cuadrantes, siendo ésta la primera vez en la que, por una parte, el lector del tratado se encuentra con este tema y, por otra, Lacroix justifica la ubicación en el plano de las magnitudes correspondientes a cantidades negativas. Dicha justificación es bastante peculiar pues se realiza tras la representación gráfica de los valores de senos y cosenos que ha deducido previamente gracias a la generalidad de las fórmulas:

6. De ahora en adelante nos referiremos a este aspecto como el convenio de oposición de los signos (COS).

7. "3. Ahora bien, como la recta indefinida *RS* se extiende hasta el infinito de una y otra parte del punto *A*, se podrá cortar también de una y otra parte todos los valores de *x*. Pero, si tomamos los valores positivos de *x*, siguiendo la recta desde el punto *A*, los intervalos *Ap* situados a la izquierda representarán los valores negativos de *x*. En efecto, puesto que cuanto más se aleja el punto *P* del punto *A* hacia la derecha, más grande es el valor de *x* representado por el intervalo *AP*; recíprocamente, cuanto más se aleja el punto *P* hacia la izquierda, más disminuye el valor de *x*; y, si *P* cae sobre *A*, el valor de *x* deviene = 0. Por ello, si el punto *P* está más apartado hacia la izquierda, los valores de *x* devienen más pequeños que cero, es decir, serán negativos, y los intervalos *Ap* tomados a la izquierda desde el punto *A*, representaran los valores negativos de *x*, si los intervalos *AP*, situados a la derecha se considera que representan los valores positivos. Por lo demás, es indiferente tomar del lado que se quiera los valores positivos, pues el lado opuesto contendrá siempre los valores negativos." (Traducción nuestra)

$$\left.\begin{array}{l}\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b \\ \sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \sin b \cos a\end{array}\right\}$$

Figura 9. (Lacroix, 1807, p. 21)

que son aplicables a todas las magnitudes posibles de los arcos *AM* (figura 10).

En el artículo 23 hace un resumen de los resultados que ha obtenido respecto del valor absoluto y el signo de los senos y cosenos de un ángulo cualquiera según en qué cuadrante se encuentre. Dichos resultados se ilustran en la figura 10, en la que es necesario notar que los arcos se miden a partir del punto *A* y en el sentido horario, probablemente bajo la influencia de la astronomía.

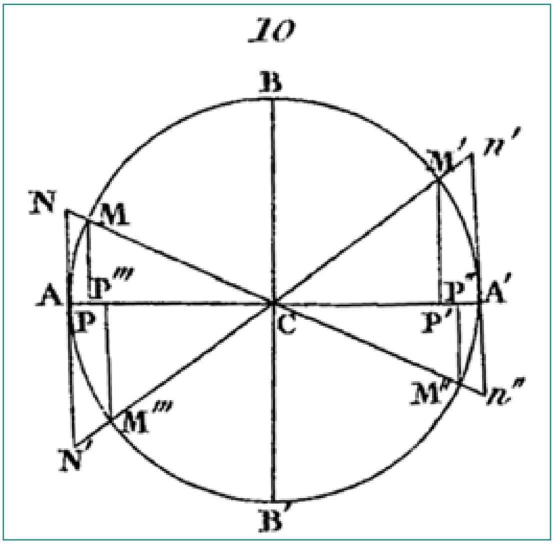

Figura 10. Representación de senos y cosenos (Lacroix, 1807, Pl. I).

Los senos cambian de signo cuando están situados por debajo del diámetro *AA*' y los cosenos cuando pasan de un lado al otro del punto *C*, o cuando caen a distintos lados del diámetro *BB*' perpendicular al primero.

Luego las magnitudes correspondientes a los valores negativos de los senos no se sitúan por debajo del diámetro *AA*' por convenio, sino que dichas magnitudes se interpretan como negativas porque el valor que se obtiene de la aplicación de las fórmulas para los senos de arcos entre π y 2π es negativo. Ocurre lo mismo con los valores negativos de los cosenos, su ubicación a la izquierda del punto *C* viene determinado por los arcos y, puesto que son negativos, las magnitudes que los representan se han de interpretar como negativas. De esta manera se pone de manifiesto que las magnitudes correspondientes a cantidades negativas quedan ubicadas de manera natural en el lado opuesto a las magnitudes correspondientes a cantidades positivas. Conviene también indicar que los segmentos *AA*’ y *BB*’ de la figura 10 no representan ejes de coordenadas sino diámetros de la circunferencia. Hasta el capítulo 3, Lacroix no introducirá los ejes de coordenadas ni definirá abscisa y ordenada, pero esta figura, junto con otras, preparan al estudiante para comprender la sistematización de las coordenadas cartesianas en el plano. A pesar de que los signos en la trigonometría no coinciden con los signos de las coordenadas en la geometría analítica, hay un aspecto importante y que se mantendrá: las magnitudes correspondientes a cantidades negativas se representan en el lado opuesto a las que corresponden a cantidades positivas, siendo arbitrario, tal como ya expresó Euler, en qué lado se representen cada una de ellas.

Es decir, la oposición de los signos más y menos en aritmética y en álgebra se traduce en geometría en la inversión de la posición de las magnitudes respecto de un segmento o un punto.

En ambos casos, el origen se concibe como un punto arbitrario pero imprescindible en la dotación de significado de las cantidades negativas en geometría y por consiguiente en la construcción de las coordenadas por segmentos.

La constitución del concepto de abscisa

A cada uno de los segmentos que Euler ha construido en el artículo 1 (figura 6) lo va a llamar abscisa. Es decir, define abscisa como un intervalo orientado de la recta, medido desde el origen, el cual representa un valor determinado de la cantidad variable. Definición de la que es necesario subrayar que la abscisa no es el punto en la recta, ni la longitud del intervalo sino que la abscisa es el intervalo, el segmento *AP*, que, como ya habíamos señalado anteriormente, tiene como uno de ses extremos el origen de abscisas.

2. Soit donc x une quantité variable, repréſentée par la droite indéfinie RS; il eſt clair que toutes les valeurs déterminées de x, pourvu qu'elles ſoient réelles, peuvent être exprimées par des portions priſes ſur la igne RS. Par exemple, ſi le point P tombe ſur le point A, l'intervalle AP, devenant nul, repréſentera la valeur de $x=0$; mais plus le point P s'éloignera du point A, plus la valeur déterminée de x repréſentée par l'intervalle AP deviendra grande.

On appelle ces intervalles AP, ABSCISSES.

Ainſi les abſciſſes repréſentent les valeurs déterminées de la variable x.

Figura 11. Definición de abscisa (Euler, 1796-97, t.II, pp. 1-2)[8].

8. “2. Sea pues *x* una cantidad variable, representada por la recta indefinida *RS*, está claro que todos los valores determinados de *x*, siempre que sean reales, pueden ser expresados por porciones tomadas sobre la línea *RS*. Por ejemplo, si el punto *P* cae en el punto *A*, el intervalo *AP*, deviniendo nulo, representará el

El paso de la noción de aplicada al concepto de ordenada

Euler sistematiza las coordenadas con el objeto de representar y estudiar las propiedades de las funciones. En su teoría de curvas el valor de la función es una cantidad variable ligada a la variable x, de manera que para cada valor determinado de x, la función y toma un valor determinado que se representa levantando una perpendicular desde el extremo de la abscisa AP, que representa el valor dado de x, cuya longitud es igual al valor correspondiente de y. Euler llama aplicadas[9] a cada una de estas perpendiculares.

> Et on a donné le nom d'APPLIQUÉES * aux perpendiculaires *PM*, menées des extrémités des abſciſſes à la courbe.

Figura 12. Definición de aplicada (Euler, 1797, t. II, p. 5)[10].

Luego las aplicadas, al igual que las abscisas, son intervalos cuyas longitudes representan a los valores dados. Las abscisas necesitaban un eje y un origen para que su construcción fuera incuestionable, en cambio cada aplicada depende para su construcción de la construcción previa de la abscisa correspondiente. Esta dependencia provoca que cada aplicada se levante de manera independiente del resto de las aplicadas y hace innecesario para Euler la introducción de un nuevo eje. Así, cada aplicada que se quiere levantar necesita su propia perpendicular.

Ahora bien, dado que y puede tomar cualquier valor determinado, Euler tendrá que justificar dónde representar cada tipo de valor real, y de nuevo fija arbitrariamente los valores positivos por encima de la recta, los nulos sobre la recta y los negativos, por el COS, por debajo.

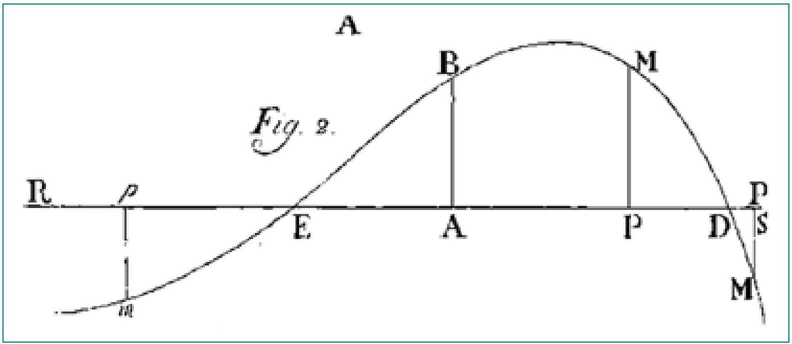

Figura 13. Abscisas y aplicadas (Euler, 1797, t. II, Table I).

valor de $x = 0$, pero cuanto más se aleje el punto P del punto A, más grande se hará el valor determinado de x representado por el intervalo AP.

Se llama a estos intervalos AP, ABSCISAS.

Así, las abscisas representan los valores determinados de la variable x." (Traducción nuestra)

9. Aunque en la época se utiliza el término de ordenada, Euler utiliza el de aplicada.

10. "Y se ha dado el nombre de APLICADAS a las perpendiculares *PM*, tiradas de los extremos de las abscisas a la curva." (Traducción nuestra)

En definitiva, en la *Introductio* las coordenadas no son un par de números sino magnitudes que se representan mediante segmentos dotados de sentido. Las abscisas medidas desde el origen en un único eje, el eje de abscisas. Las aplicadas levantadas desde los extremos de las abscisas.

Lacroix va a liberar las coordenadas geométricas de la *Introductio* de la rigidez que imponen los extremos de las magnitudes a abscisas y sobre todo a aplicadas, se desprenderá de los extremos y conservará de sus predecesoras únicamente la distancia o longitud de las magnitudes. Lacroix define simultánea y conjuntamente abscisa y ordenada como coordenadas determinadas por la dirección de unos ejes de coordenadas previamente fijados.

85. Cette manière de représenter le *cours* des lignes, c'est-à-dire les circonstances de leur forme et de leur situation, en les rapportant à une droite, par des perpendiculaires, mérite la plus grande attention; on voit qu'elle revient à déterminer la position d'un point quelconque, par le moyen de sa distance à deux droites *AB* et *AC*, perpendiculaires entre elles. Le point *M*, *fig.* 34, est en effet déterminé lorsqu'on a les distances *AP* et *AQ*, puisqu'il se trouve à l'intersection des lignes *PM* et *QM*, menées par les points *P* et *Q*, parallèlement aux droites *AB* et *AC*. FIG. 34.

Les lignes *AP* et *AQ*, ou leurs égales, *QM* et *PM*, se nomment les *coordonnées*. On se sert ordinairement du mot *abscisse* pour désigner celle qu'on suppose connue, et l'on donne à l'autre le nom d'*ordonnée*. Ainsi, dans les exemples précédens, où j'ai toujours exprimé les lignes *PM* par les lignes *AP*, *PM* était l'ordonnée, et *AP* l'abscisse. Les lignes *AB* et *AC*, qui déterminent la direction des coordonnées, se nomment les *axes des coordonnées*.

Figura 14. Definición de abscisa y ordenada (Lacroix, 1807, p. 119)[11].

11. "Este modo de representar el curso de las líneas, esto es, las circunstancias de su forma y de su situación, refiriéndolas á una recta por perpendiculares, merece la mayor atención; se ve que él tiene por objeto determinar la posición de un punto cualquiera por medio de dos rectas *AB* y *AC*, perpendiculares entre sí. El punto *M*, fig. 34, está determinado cuando se tiene las distancias *AP* y *AQ*, puesto que se halla en la intersección de las líneas *PM* y *QM*, tiradas por los puntos *P* y *Q* paralelamente á las rectas *AB* y *AC*.

Las líneas *AP* y *AQ*, ó sus iguales *PM* y *QM*, se llaman *coordenadas*. Comunmente se emplea la palabra *abscisa* para designar la coordenada que se supone conocida, y á la otra se le da el nombre de *ordenada*. Asi en los ejemplos anteriores, en que siempre hemos expresado las líneas *PM* por medio de las *AP*, las tales *PM* expresaban las ordenadas, y las *AP* las abscisas. Las líneas *AB* y *AC*, que determinan la dirección de las coordenadas, se llaman los ejes de las *coordenadas*." (Lacroix, 1820, pp. 136-137)

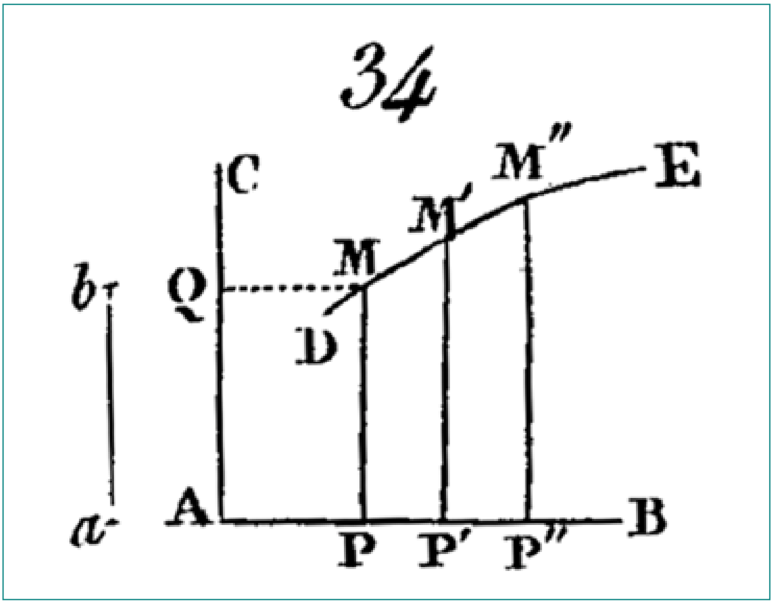

Figura 15. Abscisas y ordenadas (Lacroix, 1807, Pl. 2).

En esta definición se aprecia un cambio sustancial en el concepto de abscisa pues, deja de ser un intervalo, el segmento *AP*, y se convierte en la longitud o distancia de un segmento orientado. Pero el cambio más importante corresponde al concepto de ordenada y la construcción del eje de ordenadas. La ordenada (aplicada de Euler) ya no es la perpendicular, sino su longitud, que se puede expresar mediante el segmento *PM* o su igual *AQ*. O lo que es más importante su longitud, *ab*, llevada sobre la recta *AC*, que se convierte de esta manera en un auténtico eje de ordenadas.

El paso de las coordenadas como segmentos a las coordenadas como distancias, y el consiguiente paso a las coordenadas como números

El paso de la consideración de las coordenadas como magnitudes geométricas a su consideración como distancias será fundamental en el proceso de sistematización de las coordenadas cartesianas.

La sistematización se inicia en el momento que Euler asigna sentido a las magnitudes para dotar de significado en geometría a las cantidades negativas que surgen en álgebra cuando quiere asociar las funciones con el trazado de sus curvas correspondientes.

Pero el proceso de sistematización de las coordenadas no había hecho más que empezar y necesitará de muchas aportaciones para que poco a poco se transformen en las coordenadas cartesianas actuales, independientes del trazado de curvas y superficies.

Este proceso de independencia se aprecia claramente en el texto de Lacroix, las coordenadas se desprenden de los extremos y conservan, de sus predecesoras, únicamente la distancia o longitud de las magnitudes. Con ello se consigue que las coordenadas pasen de ser intervalos a ser distancias.

En la *Introductio* las coordenadas, como ya hemos comentado antes, no son un par de números sino magnitudes que se representan mediante segmentos dotados de sentido: las abscisas, medidas desde el origen en un único eje, el de abscisas, y las aplicadas, generalmente ortogonales, tomadas desde los extremos de las abscisas. Además abscisas y aplicadas están ligadas entre sí por una curva o por su ecuación que se representan en un SCC que no se fija previamente sino que se elige según la naturaleza de la curva que se quiere representar. Y son los extremos de las aplicadas los puntos que trazan la curva de la función de la que se pretende estudiar sus propiedades. De todo ello podemos llegar a la conclusión de que la sistematización de coordenadas en Euler no tiene como objetivo determinar la posición de un punto aislado. Sin embargo, éste es el objetivo ansiado de Lacroix aunque no siempre le resultará fácil desprender el punto de las ataduras de la curva o su ecuación.

Euler define coordenadas tras la definición y construcción de abscisas y aplicadas, Lacroix, en cambio, comienza por el concepto de coordenadas para posteriormente diferenciar abscisa y ordenada. Define coordenadas de un punto (figura 15) a partir del modo en que se representan las curvas, es decir, utiliza un proceso aceptado en su época (coordenadas geométricas) para convertirlas en coordenadas numéricas: las distancias de los intervalos determinan el punto de la curva. En el momento en que el punto se desprende de la curva quedan establecidas las coordenadas numéricas cuya dirección está determinada por ejes de coordenadas fijados previamente.

El establecimiento de ejes de coordenadas absolutos, esto es, ejes no específicos de la curva

Pero lo que hemos expuesto en el apartado anterior no es suficiente, pues el valor absoluto de las magnitudes no permite establecer de forma biunívoca la localización del plano cartesiano en toda su extensión. La longitud de las coordenadas únicamente mide la distancia a la que el punto se sitúa respecto de los ejes de coordenadas, por lo que es necesario conocer también el signo de afección de las magnitudes que ha considerado anteriormente, para determinar el cuadrante concreto en el que situar cada punto. Por tanto, es necesario considerar los signos de las coordenadas para fijarlos en un cuadrante determinado, teniendo en cuenta abscisas y ordenadas de forma conjunta y el COS. Lacroix establece definitivamente de esta manera las coordenadas de puntos en el plano cartesiano. En la figura 16 observamos cómo la localización de puntos en el plano se hace de forma absoluta, los puntos adquieren indentidad propia, ya no son puntos que pertenecen a una curva. Y teniendo en cuenta la tabla de signos que adjunta (figura 18) y el texto que acompaña a estas figuras, podemos afirmar que las coordenadas se han transformado de manera considerable.

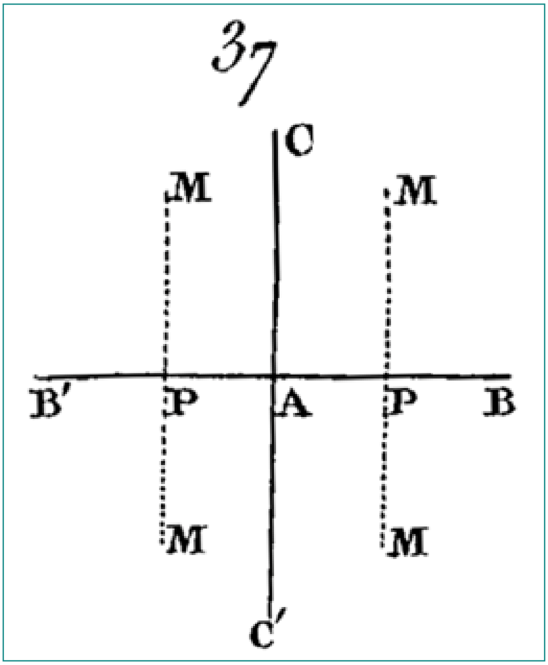

Figura 16. Coordenadas de un punto (Lacroix, 1807, Pl. 2).

En ne donnant que les valeurs absolues de l'abscisse *AP* et de l'ordonnée *PM*, le point *M* reste encore indéterminé à quelques égards ; car on ne connaît alors que les distances de ce point aux droites indéfinies *BB′* et
FIG. 37. *CC′*, *fig.* 37 ; et en conservant ces mêmes distances, il pourrait se trouver indifféremment dans l'un quelconque des quatre angles droits *BAC*, *B′AC*, *B′AC′*, *BAC′* ; mais les combinaisons des signes affectés aux coordonnées *AP* et *PM*, font connaître dans lequel de ces angles se trouve le point proposé. En effet, étant convenu de donner le signe + aux parties de la ligne *AB*, en allant de *A* vers *B*, le signe — sera celui qu'il faudra assigner aux parties de *AB′*, en allant de *A* vers *B′*. De même, si l'on a donné le signe + aux parties de *AC*, en allant de *A* vèrs *C*, les parties de *AC′*, en allant de *A* vers *C′*, seront nécessairement affectées du signe —. Cela posé, on aura

Figura 17. Coordenadas numéricas (Lacroix, 1807, p. 120)[12].

12. Si solo se dan los valores absolutos de la abscisa *AP* y de la ordenada *PM*, queda aun indeterminado el punto *M*; pues en tal caso no se conoce más que la distancia de este punto á las rectas indefinidas *BB'* y *CC'*, fig. 37; y conservando estas mismas distancias, el tal punto podrá hallarse indiferentemente en uno

$$\text{pour le point } M \text{ de l'angle} \left\{ \begin{array}{ll} BAC, \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} +\ AP \\ +\ PM \end{array} \right. & \begin{array}{l} \text{ou} \quad +\ x \\ \phantom{\text{ou}} \quad +\ y \end{array} \\ B'AC, \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} -\ AP \\ +\ PM \end{array} \right. & \begin{array}{l} \phantom{\text{ou}} \quad -\ x \\ \phantom{\text{ou}} \quad +\ y \end{array} \\ B'AC', \ldots \left\{ \begin{array}{l} -\ AP \\ -\ PM \end{array} \right. & \begin{array}{l} \phantom{\text{ou}} \quad -\ x \\ \phantom{\text{ou}} \quad -\ y \end{array} \\ BAC', \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} +\ AP \\ -\ PM \end{array} \right. & \begin{array}{l} \phantom{\text{ou}} \quad +\ x \\ \phantom{\text{ou}} \quad -\ y \end{array} \end{array} \right.$$

Figura 18. Signo de las coordenadas (Lacroix, 1807, p. 120).

Le choix des lignes *AB* et *AC*, perpendiculaires entre elles, n'est pas le seul qu'on puisse faire pour déterminer sur un plan la position d'un système quelconque de points; toute combinaison de lignes capable de fixer la position d'un point, ses distances à deux points donnés, par exemple, serait également propre à cet usage; mais dans le plus grand nombre de cas les *coordonnées perpendiculaires* sont celles dont l'emploi présente le plus de facilité, et on verra plus loin plusieurs exemples de la manière dont on passe de ces coordonnées à diverses manières d'assigner sur un plan la position des points.

Figura 19. Coordenadas perpendiculares (Lacroix, 1807, pp.120-121)[13].

cualquiera de los cuatro ángulos rectos *BAC, B'AC, B'AC', BAC'*; pero las combinaciones de signos afectados á las coordenadas *AP* y *PM* hacen conocer en cual de estos ángulos se halla el punto propuesto. En efecto, habiendo convenido en dar el signo + á las partes de la línea *AB*, yendo desde *A* hacia *B*, el signo – será el que es necesario asignar á las partes de *AB'* que están desde *A* hácia *B'*. Del mismo modo si se ha dado el signo + á las partes de *AC*, que están desde *A* hácia *C*, deberemos afectar del signo – á las otras que se hallan desde *A* hacia *C'*. En virtud de lo dicho se tendrá (Lacroix, 1820, pp. 137-138)

13. "La elección de las líneas *AB* y *AC*, perpendiculares entre sí, no es la única que puede hacerse para determinar sobre un plano la posicion de un sistema de puntos: toda combinación de líneas capaz de fijar la posición de un punto, como, por ejemplo, la distancia de él á dos puntos dados, seria propia para este uso; pero comunmente las *coordenadas perpendiculares* son las que en su empleo presentan mas facilidad: en lo sucesivo se verán muchos ejemplos del modo con que se pasa de estas coordenadas á otros diversos modos de asignar sobre un plano la posicion de un sistema de puntos." (Lacroix, 1820, pp. 137-138)

En definitiva, las coordenadas en el *Traité Élémentaire de Trigonométrie* determinan la posición de un punto a partir de dos ejes, que fijan la dirección de las coordenadas, y un origen que divide el plano en cuatro ángulos en los que se establece por el COS dónde se representa un punto cualquiera según los signos de la abscisa y ordenada conjuntamente. Las coordenadas de Lacroix son un par de valores que se representan en el plano mediante distancias (longitud de una magnitud) siguiendo la dirección de unos ejes absolutos y contadas desde el origen según el convenio de oposición de los signos.

Trazado de curvas

La sistematización de las coordenadas tanto en Euler como en Lacroix responde a una necesidad instrumental. Para los dos autores, las coordenadas son el instrumento que permite realizar dos procesos recíprocos: el trazado para cada función-ecuación de una línea recta o curva que exprese su naturaleza, y la obtención, a partir de las relaciones geométricas que se establecen en la curva entre las abscisas y las aplicadas-ordenadas, de la ecuación que asocia la curva con la función, siempre que esto sea posible.

Tanto Euler como Lacroix utilizan las coordenadas en el modo que cada uno de ellos las ha formalizado. En ambos casos el sistema de coordenadas que se considera es en principio el más genérico posible, es decir, el sistema de coordenadas no tiene por qué ser ortogonal, ni necesariamente la abscisa representa a la cantidad conocida, la variable x; ni es imprescindible representar las abscisas sobre una misma línea recta (Lacroix explícitamente considera coordenadas desde un punto, aunque él no utiliza este tipo de coordenadas lo que nos induce a pensar que sea una manera de reconocer el tipo de coordenadas que utilizaron sus predecesores e incluso sus contemporáneos) y las aplicadas-ordenadas paralelas entre ellas. Aunque en ambos casos, en aras de la comodidad y de la simplicidad, el trazado de curvas se realizará, salvo que se indique lo contrario, a partir de un sistema de coordenadas perpendiculares, en el que las abscisas se tomarán sobre una misma recta, el eje de abscisas, y representarán el valor de la variable x.

Así, en la *Introductio* de Euler, a partir de la función y, de su expresión analítica o de una ecuación entre x e y, se determinan los valores correspondientes de y al variar x. Los valores de x se representan mediante un segmento, la abscisa; y, los de y mediante otro segmento, la aplicada, levantado perpendicularmente al eje por el extremo de la abscisa. (Ver figura 13)

Podríamos decir que lo que hace Euler es construir una tabla ilimitada de valores, valores que no son pares ordenados de números sino magnitudes que se representan, en un sistema de coordenadas perpendiculares en el que utiliza un único eje, mediante segmentos (la abscisa y la aplicada) dotados de sentido, siendo los extremos de las aplicadas los que trazan la curva de la función. Pero es necesario advertir que la curva no se describe por un punto que se mueve, ni es un conjunto de puntos.

Por otra parte, en el *Traité du Calcul* de Lacroix, a partir de una ecuación entre x e y, los valores de x se representan mediante segmentos sobre el eje de abscisas cuya longitud es el valor de x; y los valores de y, mediante segmentos según la dirección, fijada a priori, de la recta AC y de longitud el valor de y correspondiente.

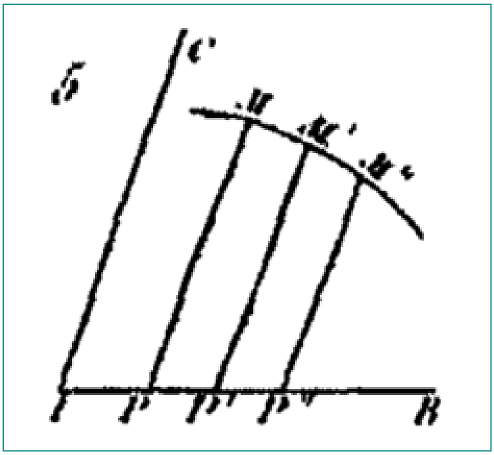

Figura 20. Coordenadas oblicuas (Lacroix, 1797, Pl. I).

195. On sait que toute équation renfermant deux indéterminées x et y, peut se construire en prenant sur une ligne AB, *fig.* 5, à partir d'un point donné A, des portions AP, AP' AP'' etc. pour représenter les valeurs de l'une quelconque des indéterminées, celles de x par exemple, et en menant par les points P, P', P'' etc. des droites égales aux valeurs correspondantes de y, et parallèles à une même droite AC, donnée de position, à l'égard de AB; la ligne $MM'M''$ qui passe par tous les points ainsi trouvés, est le lieu de l'équation proposée.

Comment les diverses circonstances du cours d'une ligne sont exprimées par son équation.
FIG. 5.

Figura 21. Lugar geométrico de una ecuación (Lacroix, 1797, p. 327)[14]*.*

Luego, en el *Traité du Calcul*, Lacroix sigue utilizando las magnitudes para trazar la línea como lugar geométrico correspondiente a una ecuación (ver figura 20). Las longitudes *AP* (las abscisas) representan los valores de *x*; las magnitudes *PM*, cuya longitud (la ordenada) representa los valores de *y*, levantadas paralelamente al eje *AC* desde el punto *P*. De momento, como en la *Introductio*, son los extremos de los segmentos *PM* los puntos que dan lugar al trazado de la curva. La curva no se describe como un punto que se mueve, pero aunque de la ecuación solamente se puedan obtener puntos aislados,

14. Se sabe que toda ecuación que contiene dos indeterminadas *x* e *y*, puede construirse tomando sobre una línea *AB*, fig. 5, a partir de un punto dado *A*, porciones las *AP*, *AP'*, *AP''*, etc. para representar los valores de una cualquiera de las indeterminadas, los de *x* por ejemplo, y tirando por los puntos *P*, *P'*, *P''*, etc. rectas iguales a los valores correspondientes de *y*, y paralelos a una misma recta *AC*, dada en posición, con respecto a *AB*; la línea *MM'M''* que pasa por todos los puntos así hallados, es el lugar de la ecuación propuesta. (Traducción nuestra) siempre se podrán determinar puntos tan inmediatos como se quiera ya que la variable x puede tomar cualquier valor y por tanto la diferencia entre dos valores de x podrá ser tan pequeña como se desee (así lo expresa en Lacroix, 1807, p. 119)).

Pero en el *Traité du Calcul* Lacroix da un paso más y elabora una tabla de valores para construir la curva por puntos, con el propósito de conocerla mejor. Puntos cuyos valores se calculan en la ecuación correspondiente y se representan en el plano, en un sistema de coordenadas perpendiculares con dos ejes, mediante la longitud de segmentos, y teniendo en cuenta el sentido de los mismos, según representen valores positivos o negativos. Es decir, representando los puntos tal como hemos analizado que estableció en el *Traité Élémentaire de Trigonométrie*, obra que recordamos que se publicó en el mismo año que el *Traité du Calcul*, pero teniendo en cuenta que esta última llevaba muchos años preparándola y que es su gran obra.

Teniendo en cuenta que el concepto de función en la época de Lacroix no es el concepto actual, veamos cómo representa la curva de ecuación

Soit l'équation $y^4 - 96a^2y^2 + 100a^2x^2 - x^4 = 0$

Figura 22. (Lacroix, 1797, p. 334)

en el caso $a = 1$.

Despejando y en la ecuación $y^4 - 96y^2 + 100x^2 - x^4 = 0$ se obtiene las cuatro expresiones siguientes:

$$y = \sqrt{48a^2 + \sqrt{x^4 - 100a^2x^2 + 2304a^4}} \ldots (1),$$
$$y = \sqrt{48a^2 - \sqrt{x^4 - 100a^2x^2 + 2304a^4}} \ldots (2),$$
$$y = -\sqrt{48a^2 + \sqrt{x^4 - 100a^2x^2 + 2304a^4}} \ldots (3),$$
$$y = -\sqrt{48a^2 - \sqrt{x^4 - 100a^2x^2 + 2304a^4}} \ldots (4).$$

Figura 23. Ramas de la ecuación (Lacroix, 1797, p. 335).

Expresiones que darán lugar a cuatro ramas semejantes dos a dos, (1) y (3); y, (2) y (4). Por ello será suficiente considerar las ecuaciones (1) y (2) para elaborar la tabla de valores que harán conocer mejor la figura de la curva (figura 16), puesto que los valores de las ecuaciones (3) y (4) se obtienen por el COS.

Lacroix elabora la tabla dando sucesivamente a x los valores 1, 2, 3, 4, etc., y calculando los valores de y por aproximación, y la presenta de la siguiente manera:

Lorsque $x =$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	etc.

l'équation (1) donne $y =$

9,798	9,744	9,582	9,302	8,887	8,289	6,928	*imagin.*	6,928	8,698	9,798	10,845	11,872	etc.

et l'équation (2) donne $y =$

0	1,021	2,045	3,076	4,125	5,224	6,928	*imagin.*	6,928	4,510	0	*imagin.*	*imagin.*	etc.

Figura 24. Tabla de valores (Lacroix, 1797, p. 337).

Con estos valores representa la función como aparece en la figura 25. Si la dibujamos a partir de la expresión analítica con GeoGebra, la curva que obtenemos (figura 26) es ligeramente distinta a la que aparece en el texto de Lacroix.

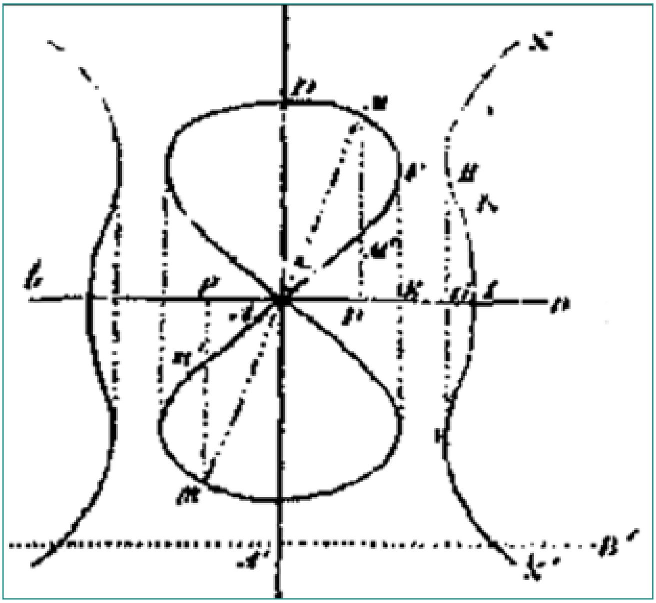

Figura 25. Figura original (Lacroix, 1797, Pl. I).

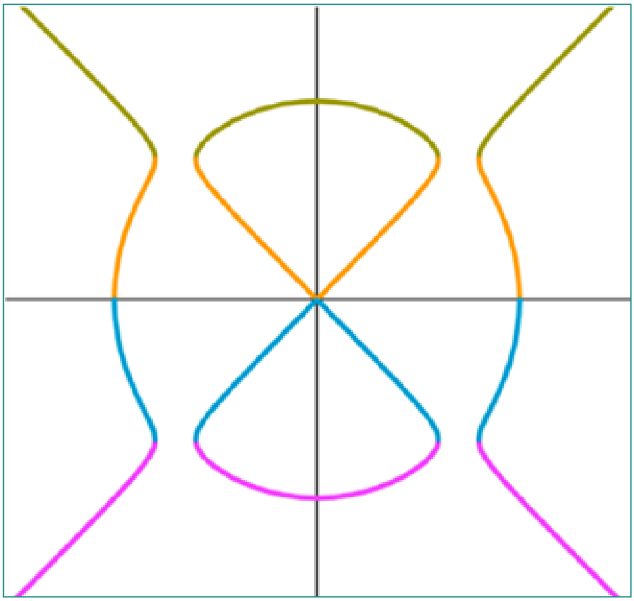

Figura 26. Figura hecha con GeoGebra.

CONCLUSIONES

Uno de los instrumentos básicos en el estudio de las funciones tanto en la *Introductio* como en el *Traité du Cálcul* estriba en el trazado de la curva mediante coordenadas cartesianas.

En la *Introductio* de Euler, a partir de la función se determinan sus "infinitos valores", las aplicadas, que se representan elevando un segmento perpendicular al eje de abscisas. Estos valores no son pares de números sino magnitudes que se representan mediante segmentos, la abscisa y la aplicada, y son los extremos de las aplicadas los que trazan la curva de la función. Esto es, la curva no se describe por un punto que se mueve, ni es un conjunto de puntos.

Por otro lado, en el *Traité du calcul* de Lacroix, a partir de la función se determina una tabla de valores tal como la entendemos actualmente, salvo por el hecho de que la función puede tomar más de un valor. Valores que se representan conjuntamente en el plano cartesiano teniendo en cuenta la longitud y el signo de las coordenadas, a partir de los que se dibuja la curva.

Una de las mayores aportaciones de estos autores respecto a la representación gráfica de funciones o lugares geométricos en el plano estriba en el reconocimiento y justificación del uso de las cantidades negativas en la representación gráfica de funciones, dado que se reconoce que la forma gráfica de la función depende en gran medida del uso de las cantidades negativas, es más, no se puede obtener la forma completa de una curva si no se utilizan las cantidades negativas.

La otra gran aportación surge de la evolución de las coordenadas geométricas, que Euler recoge en la *Introductio*, a las coordenadas numéricas gracias al establecimiento de unos ejes de coordenadas absolutos en el *Traité Élémentaire de Trigonométrie*, que permiten la localización de puntos en el plano cartesiano mediante un par de coordenadas que se consideran de forma conjunta pero independientes, a las que solamente les faltará tomar la expresión actual como un par ordenado.

Por ello, dos de los componentes de mayor importancia que hemos visto en el uso y sistematización de las coordenadas en los textos estudiados son precisamente la dotación de significado de la cantidades negativas en la geometría y el paso de las magnitudes coordenadas (ligadas a cada curva o a su ecuación) a las coordenadas como un par de números (no sometidos a curva alguna o ecuación), que se representan en el plano como longitudes orientadas según el COS. Es esto lo que permitió, a nuestro entender, el establecimiento definitivo de unos ejes de coordenadas absolutos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Euler, L. (1748). *Introductio in analysin infinitorum* (2 vols.). Lausanne: Marcum-Michaelem Bousquets & Socios.

Euler, L. (1774). *Élémens d'algebre. De l'analyse déterminée*. Lyon: Chez Jean Marie Bruyset, Père & Fils.

Euler, L. (1796-1797) *Introduction à l'analyse infinitésimale* (2 vols.) (Traducción francesa de J. B. Labey). Paris: Chez Barrois.

Lacroix, S. F. (1797). *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*. Tome premier. Première édition. Paris: Duprat.

Lacroix, S. F. (1807). *Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et sphérique, et d'application de l'algèbre à la géométrie*. Quatrième édition. Paris: Courcier.

Lacroix, S. F. (1820). *Tratado elemental de trigonometría rectilínea y esférica, y de la aplicación del álgebra a la geometría*. (Trad. Catedráticos de Matemáticas de los Caballeros Pages de S. M.) Sexta edición. Madrid: En la Imprenta Real.

Puig, L. (2006). Vallejo perplejo. En A. Maz, M. Torralbo, y L. Rico (Eds.) *José Mariano Vallejo, el matemático ilustrado. Una mirada desde la educación matemática,* 113-138. Córdoba: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba.

Puig, L. (2011). Researching the History of Algebraic Ideas from an Educational Point of View. In. V. Katz & C. Tzanakis (Eds.) *Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education*, 29-42. Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Schubring, G. (1987). On the Methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as Textbook Author, *For the Learning of Mathematics*, *7*, 41-51.