Sobre la génesis y evolución del Teorema de Rolle

Carlos Suso Fernández
IES Andrés de Vandelvira, Baeza

María Victoria Velasco Collado
Universidad de Granada

Resumen: *La Historia de las Matemáticas y el conocimiento de la génesis y evolución de los contenidos matemáticos desempeñan un papel fundamental en la formación de los Profesores de Matemáticas, como muchos autores vienen señalando desde hace ya más de un siglo. Sin embargo, este enfoque todavía no está plenamente asentado en nuestros estudios de grado y posgrado, aún siendo cada vez más demandado. En este trabajo presentamos una experiencia docente en relación con un Trabajo Fin de Máster realizado dentro del Programa de Máster Interuniversitario Matemáticas, que versa sobre la historia del Teorema de Rolle.*

El Teorema de Rolle es un resultado fundamental de Análisis Matemático que nuestros alumnos de Bachillerato estudian. Sin embargo, suele desconocerse quién era Rolle y la historia del teorema que lleva su nombre. En este trabajo mostramos el perfil algebrista de Rolle y cómo expuso su Teorema en un contexto algebraico, totalmente alejado del Cálculo; e indagamos en el proceso mediante el cual el Teorema de Rolle muta del Álgebra al Análisis a lo largo de los siglos XVIII y XIX.
Palabras clave: *Teorema de Rolle, Historia, Educación Matemática*

About the origin and evolution of the Rolle's Theorem

Abstract: *The History of Mathematics and the knowledge of the genesis and evolution of the mathematical contents play a basic role in the training of teachers of mathematics, as many authors have pointed out since more than one century ago. However, this approach is not fully seated still in our postgraduate (and grade) programs, in spite of its* *demand. In this work we show a teaching experience in relation to a Master Thesis work which was carried out within the Interuniversity Master's Programme "Mathematics", which deals with the history of Rolle's theorem.*

The Rolle's Theorem is a fundamental result of Mathematical Analysis which is studied by our High School students. Nevertheless, it is not usually known who was Rolle and the history of the theorem that takes his name. In this work we show the algebraic profile of Rolle and how he exposed his Theorem in an algebraic context unrelated with Calculus; and we investigate in the process by means of which the Theorem mutates from the Algebra to the Analysis throughout the XVIIIth and XIXth century.

Keywords: *Rolle's Theorem, History, Mathematics Education.*

MOTIVACIÓN DE LA EXPERIENCIA DOCENTE.

Las normativas educativas actuales, así como los planes de calidad que las acompañan, ya contemplan de forma precisa las necesidades formativas específicas de nuestros profesores de Enseñanza Secundaria. Es por ello que la Ley Orgánica de Educación de 2006 articuló una formación de posgrado orientada a la especialización profesional, que es la que habilita para el ejercicio de las profesiones de Profesor de Enseñanza Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas (finalmente regulada con la Resolución de 17 de diciembre de 2007).

En cuanto a los profesores de Bachillerato en activo, la adquisición (y acreditación) de un nivel de formación más cualificado se reconoce por la Administración como mérito curricular (véase, por ejemplo, el apartado titulado Méritos Académicos, en el baremo del RD 850/1993 de 4 de junio a que se refiere la Ley Orgánica 1/1990, de 3 de octubre, de la Ordenación General del Sistema Educativo).

Sea como fuere, el hecho es que son muchos los profesores de Enseñanza Secundaria (con o sin empleo) que demandan actualmente una formación de posgrado, que en un momento dado (ya sea a corto o a medio plazo) los habilite para realizar una Tesis Doctoral. Al menos esa es nuestra impresión personal. Y además, parece que buena parte de los alumnos de posgrado con este perfil perciben como ajenos muchos de los temas de investigación que se trabajan habitualmente en las distintas líneas de investigación de los másteres universitarios (por considerarlos desvinculados de las materias y problemáticas que les competen como profesores de Enseñanza Secundaria). Dicho de otro modo: por lo general, estos alumnos de tercer ciclo no se sienten atraídos por adquirir las competencias necesarias para realizar una labor investigadora similar a la que realizan los profesores de universidad y los investigadores de los organismos públicos de investigación, en temas que nada tienen que ver con la Enseñanza Secundaria, y hacerlo además con el "hándicap" (o la desventaja) de tener que desarrollar dicha actividad vinculados a un puesto de trabajo que no está pensado para ello. De hecho, probablemente, no consideren factible ni rentable el esfuerzo de formación requerido para hacer de la investigación una doble actividad profesional que discurra en paralelo a la de profesor de Bachillerato (que es la remunerada para ellos). Podríamos decir que sólo excepcionalmente, o de manera coyuntural, estos alumnos se refugian en la Enseñanza Secundaria para, desde allí, colaborar con la investigación que se hace en las universidades en determinados temas muy especializados, desligados de los que atañen la docencia preuniversitaria.

Por otra parte, como argumentábamos antes, los alumnos de posgrado que responden al perfil de Profesor de Secundaria tienen necesidades formativas propias, derivadas de la importancia y la complejidad de su labor profesional, así como de los estándares de calidad actuales requeridos desde el marco europeo de educación en el que estamos inmersos. Parecen por tanto demandar una formación específica que, fomentándola y llevándola a buen puerto, los capacite al máximo nivel en su propio desempeño docente como profesores de Enseñanza Secundaria. Se configura así la Educación Matemática en el foro interdisciplinar (o trasfronterizo) que ha de servir de punto de encuentro desde el cual impulsar y canalizar todas estas necesidades formativas. Y dentro de la Educación Matemática ha de concebirse, como no podría ser de otro modo, la Historia de la Matemática como una herramienta estructural y procedimental de primer nivel.

En relación con la problemática descrita se presenta a continuación una experiencia docente. Para ello haremos un resumen (evitando aquí los desarrollos matemáticos) del Trabajo Fin de Máster realizado por el primer autor de esta ponencia bajo la dirección de la segunda autora, dentro del Programa de Máster Interuniversitario "Matemáticas" (impartido por varias universidades andaluzas).

INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO REALIZADO

Uno de los principales resultados del Análisis Matemático es el Teorema de Rolle. Dicho teorema, en su versión moderna, afirma lo siguiente:

> *Sea una función real de variable real* $f{:}[a, b] \to \mathbb{R}$*, continua en* $[a, b]$ *y derivable en* $]a, b[$*. Si* $f(a) = f(b)$*, entonces existe un valor* $c \in\,]a, b[$ *tal que* $f'(c) = 0$.

Como es bien conocido, el Teorema de Rolle, el Teorema del valor medio de Lagrange y el Teorema del valor medio generalizado de Cauchy son resultados equivalentes (a partir de cada uno de ellos se deducen los dos restantes), y como corolario de ellos se obtienen todos los resultados fundamentales del Cálculo Diferencial (como son el desarrollo en serie de Taylor, la regla de l'Hôpital para el cálculo de límites indeterminados, así como los teoremas clásicos para el cálculo de máximos y de mínimos que permiten el estudio y la representación de funciones).

En los textos actuales, por lo general, para demostrar el Teorema de Rolle se usan los teoremas de Bolzano-Weierstrass (sobre la condición necesaria de extremo relativo, obtenida a partir del teorema de los ceros de Bolzano) y de Weierstrass (sobre funciones continuas definidas en un intervalo cerrado y acotado). Por tanto, la secuencia lógica de los teoremas anteriores es la siguiente:

B-W (1817) - Weierstrass (1850) - Rolle (1691) - Lagrange (1801) - Cauchy (1823).

Claramente se aprecia en la sucesión de estos resultados una llamativa anomalía temporal: el teorema de Rolle es más de cien años anterior al resto de los teoremas mencionados.

Esto se debe a que originalmente Rolle expuso su resultado en un contexto totalmente alejado del Cálculo. Rolle era un algebrista sin apego alguno al Cálculo Infinitesimal, que había publicado su teorema (el Teorema de Rolle) en un tratado de Álgebra, formando parte del llamado Método de las Cascadas que él había ideado para resolver las ecuaciones polinómicas. Por tanto, dicho resultado nació en un contexto meramente algebraico y fue demostrado con técnicas algebraicas.

Durante el siglo XVIII y primera mitad del XIX el Teorema de Rolle se mantuvo como un resultado para la resolución de ecuaciones que no llegó a alcanzar mucha relevancia. A partir de la segunda mitad del siglo XIX dicho teorema se transforma en un resultado fundamental de Análisis (paradójicamente habiendo sido Rolle un detractor destacado de esta disciplina). En las secciones posteriores se detalla el proceso mediante el cual el Teorema de Rolle muta del Álgebra al Análisis.

LA FIGURA DE MICHEL ROLLE

Como indica Fontanelle (1729), Michel Rolle nació el 21 de Abril de 1652 en Amber, una pequeña ciudad de la región francesa de Auvernia, en el seno de una familia de clase media. A los 23 años viajó a París con la intención de dar clases particulares. Debido a sus habilidades matemáticas y a su gusto por esta materia, pronto se empezó a interesar por los trabajos de Diofanto y de Bachet de Meziriac y Jacques Ozanam (matemáticos contemporáneos afincados en Paris). Este último fue un apasionado de las matemáticas recreativas que con frecuencia divulgaba acertijos y curiosidades matemáticas muy populares en Francia. En 1682 Rolle consiguió publicar en el *Journal des S*çavans la solución de un problema propuesto por Ozanam: "Encontrar cuatro números tales que la diferencia entre cada dos de ellos es tanto la suma de los tres primeros como un cuadrado perfecto".

La solución de Rolle fue calificada de "elegante", y le reportó cierta fama entre el círculo de matemáticos de la época. En particular, llamó la atención de Jean-Baptiste Colbert, Ministro de Finanzas de entonces, que le otorgó una beca (que le permitió continuar con sus trabajos matemáticos) como premio a la publicación mencionada. En 1685 Rolle fue elegido miembro de la Academia de las Ciencias de París como "alumno de astronomía", responsable de preparar experimentos. Sobre esa fecha el Marqués de Louvois (que era entonces el Ministro de la Guerra de Louis XIV) lo contrató como profesor tutor para su cuarto hijo. A este último Rolle le dedica su *Traité d'Algebre* de 1690, su obra más famosa, y su posterior *Démonstration d'une méthode pour résoudre les* égalitez *de tous les degrez* de 1691.

En 1699 la Academia de las Ciencias le concedió la ''Pensión de Geometría'', cargo de cierta relevancia. Ese mismo año Rolle publicó su *Methodes pour resoudre les questions indéterminées de l'algebre*.

A principios del siglo XVIII, Michel Rolle se vio envuelto en una disputa desencadenada en la Academia de las Ciencias, sobre la validez de los métodos del Cálculo

Infinitesimal de Newton y Leibniz, justo cuando l'Hôpital publicó en 1696 su obra *Analyse des infiniment petits*. En relación con esta polémica, por un lado estaban los seguidores del nuevo Cálculo, y por otro los críticos con él. Rolle se posicionó de manera activa en esta última facción, denostando al Cálculo Infinitesimal por su falta de rigor y su propensión al error. Posteriormente Rolle también criticó abiertamente la *Geometría* de Descartes.

La críticas de Rolle al Cálculo Infinitesimal, no exentas de algunas equivocaciones e imprecisiones, sirvieron para poner de manifiesto la falta de rigor del Cálculo por aquel entonces lo que, en cierto modo, impulsó la investigación sobre los retos planteados por una disciplina emergente que todavía no se había acabado de entender (a falta de una noción rigurosa de límite). Jean Itard, en el *Dictionary of Scientific Biography,* finaliza la biografía de Rolle afirmando que "Rolle era un hábil algebrista que rompió con las técnicas cartesianas; y cuya oposición a los métodos infinitesimales, a la postre, fue beneficiosa".

En 1708 Rolle sufrió un ataque de apoplejía del que logró recuperarse. Murió el 8 de Noviembre de 1719, a la edad de 68 años tras un segundo ataque que ya no resistió.

ORIGEN DEL TEOREMA DE ROLLE

Michel Rolle aportó un método algebraico para localizar las raíces de una ecuación polinómica de cualquier grado con una sola incógnita. El método aparece publicado en su *Traité d'Algebre* de 1690, con el nombre de "Método de las Cascadas".

Bajo una perspectiva analítica, el Método de las Cascadas de Rolle consiste en derivar sucesivamente la ecuación polinómica original hasta llegar a una ecuación de primer grado, que fácilmente se puede resolver. Una vez resuelta esta ecuación de primer grado, su solución se usa para acotar (o delimitar) las soluciones de la ecuación derivada anterior, que es una ecuación de segundo grado. A su vez, estas soluciones sirven para acotar las de la derivada anterior; y así sucesivamente hasta llegar a la ecuación original, cuyas raíces quedan acotadas por las de su derivada. A las derivadas sucesivas de la ecuación original Rolle las llamó "cascadas".

Por tanto, en terminología actual, el Método de las Cascadas de Rolle se sustenta en el siguiente resultado ubicado en el contexto de las funciones polinómicas:

> **Corolario (Rolle):** *Sea $f(x)$ una función polinómica. Entre dos raíces reales sucesivas de $f'(x) = 0$ no puede haber más de una raíz real de $f(x) = 0$.*

Por supuesto que Rolle no considera en ningún momento la derivada de una función. Lo que realmente hace es lo que se expone, de forma muy resumida, a continuación:

En primer lugar, como explica en el Capítulo V del libro segundo de *Traité d'Algebre*, Rolle somete la ecuación a un proceso de "preparación" por el cual, manipulando algebraicamente el polinomio original obtiene, en cuatro etapas, otro polinomio con coeficiente líder igual a uno, y cuyas raíces reales son todas positivas, y se relacionan con las del polinomio de partida mediante un conveniente cambio de variable (para detalles y justificación del proceso véase Rolle (1690), así como el Trabajo Fin de Máster antes aludido). De este modo, en el Método de las Cascadas se parte de una ecuación polinómica ya preparada (por lo que sus raíces son todas positivas):

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n = 0,$$

Entonces se multiplica cada término de la ecuación por los correspondientes términos de la progresión aritmética 0, 1, 2, 3, …, *n,* con lo que se obtiene

$$0a_0 + 1a_1 x + 2a_2 x^2 + \cdots + (n-1)a_{n-1} x^{n-1} + nx^n = 0.$$

Rolle señala que el método es válido para cualquier progresión aritmética que se utilice. Como indica Barrow-Green (2009, p.741), Johann Hudde había empleado ya esta técnica de multiplicar cada término del polinomio por los correspondientes términos de una progresión aritmética, si bien Rolle no hace ninguna referencia a Hudde.

A continuación, se divide por la incógnita x, obteniéndose la cascada:

$$a_1 + 2a_2 x \ldots + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + nx^{n-1} = 0$$

Reiterando el proceso se van obteniendo las sucesivas cascadas, hasta llegar a la primera cascada de la forma $ax + b = 0$, que se resuelve sin dificultad (llamemos x_0 a su solución).

Ahora Rolle considera la cascada siguiente (que es un polinomio de grado dos) y obtiene su *gran hipótesis* (esto es, una cota superior de sus raíces que determina mediante el valor $h = (\frac{u}{c} + 1)$ donde u es el valor absoluto del mayor coeficiente negativo de la ecuación y c es el coeficiente líder), su *pequeña hipótesis* (que es una cota inferior de sus raíces; que por tratarse de polinomios con raíces positivas la toma igual a cero), y sus *hipótesis medias* (que son las raíces de la cascada anterior, en este caso, x_0). En consecuencia, la cascada que nos ocupa tendrá una raíz en el intervalo $[x_0, h]$ y otra en el intervalo $[0, x_0]$. Mediante el método de la bisección, Rolle procura obtener buenas aproximaciones de estos valores (y si es posible, el valor exacto), que de nuevo serán las *hipótesis medias* de la cascada siguiente.

Así, las raíces de la cascada siguiente deben de estar contenidas en los intervalos determinados por su *gran hip*ótesis, las *hipótesis medias* recién obtenidas y cero (la *pequeña hipótesis*). De nuevo aplicará el método de la bisección para aproximarlas. De este modo se llegará finalmente a estimar las raíces del polinomio de partida.

Rolle llama *raíces efectivas* a las raíces reales y distintas de una ecuación polinómica; y a las raíces que no son *efectivas* las llama *raíces desfallecientes*. A las raíces reales y múltiples (contadas a partir de su segunda aparición) Rolle las llama *raíces desfallecientes de la primera especie*, y a las raíces complejas las llama *raíces desfallecientes de la segunda especie*. Además, Rolle es capaz de determinar (apoyándose en regla de los signos de Descartes) de qué tipo son las raíces de la ecuación original a partir de la sucesión de signos que resulta de evaluar las hipótesis en las distintas cascadas. Finalmente incorpora estas casuísticas al Método de las Cascadas e indica cómo proceder.

Rolle no aportó ninguna prueba de su método en su *Traité d'Algebre* de 1690, por lo que fue objeto de críticas, y se vio obligado a publicar en 1691 el tratado *Demonstration d'une methode pour resoudre les egalitez de tous les degrez*, donde se incluye la demostración del Método de las Cascadas.

Lo que prueba Rolle en esta última monografía es el siguiente resultado (que es una versión polinómica del actual Teorema de Rolle), del cual se deduce fácilmente el Corolario anterior.

Teorema (Rolle): *Entre dos raíces consecutivas de una ecuación polinómica hay al menos una raíz de su cascada (derivada).*

Para demostrar este teorema, Rolle vuelve a suponer primeramente que las raíces de la ecuación son reales y simples y estructura su prueba (el Método de las Cascadas) en 15 artículos y 22 corolarios de corte meramente algebraico. Posteriormente, en dicho texto de 1691, Rolle también demuestra su teorema para ecuaciones con cualquier tipo de raíces. Dichos resultados resultan bastante tediosos de exponer (véase Cajori (1911) o el Trabajo Fin de Máster que aquí se resume), y lo son más aún si se tiene presente que, en términos analíticos (esto es involucrando a la derivada), la demostración del teorema anterior es casi inmediata. De hecho como indica Luis Español (2011, p.175), si suponemos que el polinomio dado es

$$f(z) = (z-a)(z-b)(z-c)\ldots..(z-m)$$

y consideramos las raíces ordenadas: $a < b < c < \cdots < m$; entonces tomando por ejemplo las raíces a y b se tiene que

$$f\ (a) = (a-b)(a-c)\ldots(a-m)$$

$$f\ (b) = (b-a)(b-c)\ldots(b-m).$$

Claramente, $f'(a)$ y $f'(b)$ tienen signos distintos, pues sus factores tienen todos el mismo signo excepto $(a-b)$ y $(b-a)$; con lo que $f'(z)$ se anulará en un valor intermedio entre a y b por razones de continuidad.

EVOLUCIÓN DEL TEOREMA DE ROLLE

El resultado que Rolle incluyó en su Método de las Cascadas fue aceptado y difundido en los tratados de Álgebra y de resolución de ecuaciones que se fueron publicando a lo largo del siglo XVIII y primera mitad del XIX. No obstante, siempre aparecía dentro de su contexto original, esto es, como un teorema de Álgebra y no como un resultado de Cálculo.

Por otra parte, el Método de las Cascadas, y en consecuencia el resultado original de Rolle en su marco algebraico de partida, aún siendo útil, nunca gozó de una especial relevancia en el ámbito de la localización de las raíces de una ecuación polinómica: el método de Newton-Raphson para aproximar raíces de una ecuación polinómica (publicado por Newton en 1736 y por Raphson en 1690); y el resultado que Sturm demostró en 1829 para aproximar raíces de ecuaciones siempre fueron más populares.

Según Cajori (1911) el resultado de Rolle aparece por primera vez en el *Analyse demontrée, ou la méthode de résoudre les problêmes des mathematiques* de **Charles-René Reyneau,** en 1708. Reyneau (1708, p. 290) afirma:

> *... Luego, las raíces de una ecuación [...] son límites de la nueva ecuación que se obtiene de la multiplicación de cada término de la original por el número que es exponente de la incógnita de ese término, y de su último término por cero.*
>
> *COROLARIO VII. QUE ES FUNDAMENTAL.*
> *... las raíces de esta última ecuación son los límites de las raíces de la ecuación propuesta...*

Colin MacLaurin (1729, p. 88) demostró el siguiente resultado en un artículo publicado en la revista *Philosophical Transaction* en 1729:

> *TEOREMA III. En general, las raíces de la ecuación*
>
> $$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3}\&c = 0$$
>
> *son* límites de las raíces de la ecuación
>
> $$nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3}\&c = 0$$
>
> *[...] y recíprocamente, las raíces de esta nueva ecuación serán límites de las raíces de la ecuación propuesta*
>
> $$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3}\&c = 0$$

La primera vez que aparece el resultado de Rolle en un tratado de Cálculo es en 1755, de la mano de **Euler**, tal y como indican Barrow-Green (2009, p. 748) y Suárez Alemán (2011, p. 46). Euler, en su *Institutiones calculi differentialis* (1755, p. 660) publica una versión del Teorema de Rolle dentro del contexto de resolución de ecuaciones, pero por primera vez dicho resultado aparece expresado en el lenguaje del Cálculo:

> *... Se deduce que si la ecuación z = 0 tiene dos raíces reales, entonces la ecuación* $\frac{dz}{dx} = 0$ *tiene necesariamente una raíz real. Igualmente, si la ecuación z = 0 tiene tres raíces reales, entonces la ecuación* $\frac{dz}{dx} = 0$ *sin duda tiene dos raíces reales. Y, en general, si la ecuación z = 0 tiene m raíces reales, la ecuación* $\frac{dz}{dx} = 0$ *necesariamente tiene por lo menos m – 1 raíces.*

Lagrange también ofrece su versión del resultado de Rolle en su *Traité de la résolution des* équations *numériques de tous les degrés* de 1798. En la Nota VIII sobre los límites de las raíces de ecuaciones, Lagrange (1798, p. 159) argumenta como sigue:

> *Primeramente es evidente que la ecuación Fx = 0 de grado m, tendrá m raíces reales, y que la ecuación derivada F'x = 0 de grado m–1 tendrá también necesariamente m–1 raíces reales, puesto que, entre dos raíces reales consecutivas de la ecuación Fx = 0, cae siempre una raíz real de la ecuación F'x = 0…*

Según Cajori (1911), **Wilhelm Drobisch** fue el primero en llamar al resultado de Rolle *Teorema de Rolle*. Drobisch, en su *tratado Grundzüge der Lehre von den höheren numerischen Gleichungen* de 1834 establece tanto el Teorema de Rolle (esto es, el resultado que Rolle proporcionó en su *Démonstration* de 1691) como el Corolario de Rolle (el resultado del *Traité d'Algèbre* de 1690). En el índice de contenidos, Drobisch (1834) escribe: "Los teoremas de Rolle sobre las acotaciones de las raíces reales de la ecuación derivada por las raíces reales de la original y viceversa." (p. xxvi). Y en la página 177 del libro de Drobisch se establece lo siguiente:

> *Se puede extender esta conclusión para cada ecuación derivada posterior, y por lo tanto establecer la proposición general: dos raíces reales de cada ecuación derivada encierran una raíz real de la ecuación siguiente derivada, y por lo tanto se puede utilizar para los mismos límites.*

A partir de esta fecha, encontramos frecuentemente el Teorema de Rolle atribuido a Rolle:

Por ejemplo, en 1840, **François Moigno**, un profesor de matemáticas del College Saint Geneviève de París, escribe un artículo titulado *Note sur la détermination du nombre des racines réelles ou imaginaires d'une* équation *numérique comprises entre les limites données. Théorèmes de Rolle, de Budan ou de Fourier, de Descartes, de Sturm et de Cauchy.* En dicho artículo, en la página 86, se dice:

> 12. Teorema (teorema de Rolle). *El número de raíces reales de la ecuación F*(x) = 0 *comprendidas entre dos límites dados x_0, X no puede nunca sobrepasar en una unidad el número de raíces reales de la ecuación derivada F'* (x) = 0 *comprendidas entre los mismos límites.*

En 1844, **Orly Terquem** en su artículo *Théorèmes de Descartes, de Rolle, de Budan et Fourier, de Mm. Sturm et Cauchy deduits d'un seul principe* llega a la misma conclusión que Moigno:

Théorème de Rolle.

12. *Théorème* **2. Le nombre de racines réelles de l'équation $F(x)=0$, comprises entre les limites a et b, ne peut jamais surpasser de plus d'une unité le nombre de racines réelles de l'équation dérivée $F'(x)=0$, comprises entre les mêmes limites.**

Otros ejemplos de tratados de Álgebra publicados en la primera mitad del siglo XIX en donde aparece el resultado de Rolle son los siguientes:

- *A teatrise on the nature and properties of algebraic equations* (1835), **de R. Stevenson,** en la página 55:

32. The real roots of the equation $f'(x) = 0$ lie between those of $f(x) = 0$; so that an odd number of the roots of $f'(x) = 0$ will be found between every two of the roots of $f(x) = 0$, when the real roots of both equations are written in one series in the order of magnitude.

- *Traité* élémentaire *d'Algèbre*, (1836), de **Mayer** y **Choquet**, en la página 550:

Ainsi, *entre deux racines réelles inégales d'une équation* $f(x) = o$, *il se trouve au moins une racine réelle de l'équation* $f'(x) = o$.

Ce théorème, qui a été découvert par Rolle, sert de base à une méthode connue sous le nom de *Méthode des cascades,* que ce géomètre a proposée pour la résolution des équations.

- *A teatrise on the theorie of algebraical equations* (1839), **de R. Murphy**, en la página 28:

From this proposition we see that between two cc the primitive equation $\phi(x)=0$, an odd number of ı of the derived equation must exist.

- Traité d'Algèbre (1846), de **M.E. Gentil**, en la página 112:

COROLLAIRE.

Théorème de Rolle. Si on range les racines d'une équation $f(x) = o$ par ordre de grandeur, il y aura toujours un nombre impair de racines de l'équation $f'(x) = o$ comprises entre deux racines consécutives de l'équation.

En estos resultados, aunque se usa una notación cada vez más general, las funciones que se tienen en mente son polinómicas (son tratados de Álgebra).

Es en la segunda mitad del siglo XIX cuando se produce la mutación del Teorema de Rolle del Álgebra al Análisis. Hasta entonces el Teorema de Rolle había sido un resultado útil en teoría de ecuaciones, pero a partir de la segunda mitad del siglo XIX se transforma en un teorema fundamental en Análisis.

Aunque hoy en día el Teorema de Rolle y el Teorema del valor medio de Lagrange aparezcan directamente relacionados en todos los libros de Análisis, lo cierto es que originariamente ambos teoremas existieron separadamente. Lagrange dio su Teorema como una consecuencia del Teorema de Taylor, en su tratado *Théorie des fonctions analytiques* (1797, p. 49), y lo llamó "teorema nuevo y notable por su sencillez y su generalidad". Posteriormente el Teorema del valor medio de Lagrange aparece en un artículo de Ampère (1806, pp. 148-181) y asimismo queda recogido por Cauchy en su *Cours d'analyse* (1821, pp. 259-261), pero en ninguno de estos tratados figura el Teorema de Rolle.

Según indica Cajori (1911, p. 310) el primer autor que presenta juntos el Teorema de Rolle y el Teorema del valor medio de Lagrange fue el matemático francés **Pierre-Ossian Bonnet**. Esta asociación de Bonnet de los dos teoremas fue recogida por **Joseph-Alfred Serret** en su tratado de Análisis *Cours de calcul différential et intégral* de 1868. Serret enuncia el Teorema del valor medio de Lagrange como sigue (Serret, 1868, p. 17):

> TEOREMA I.- *Sea $f(x) = 0$ una función de x que permanece continua para los valores de x comprendidos entre límites dados, y que, para esos valores, tiene una derivada $f'(x) = 0$ determinada. Si x_0 y X designan dos valores de x comprendidos entre esos mismos límites, tendremos*
>
> $$\frac{f(X)-f(x_0)}{X-x_0} = f'(x_1)$$
>
> *siendo x_1 un valor comprendido entre x_0 y X.*

Serret, para demostrar el Teorema del valor medio de Lagrange, define una función auxiliar $\Phi(x)$ que es continua en un intervalo $[x_0, X]$, derivable en $]x_0, X[$ y tal que $\Phi(x_0) = 0$ y $\Phi(X) = 0$, para probar la existencia de un valor x_1 comprendido entre x_0 y X tal que $\Phi'(x_1) = 0$. Esto es sin duda el Teorema de Rolle en un contexto analítico totalmente alejado del Álgebra.

Posteriormente **Charles Hermite**, en su obra *Cours d'analyse* de 1873, utiliza el Teorema de Rolle en el marco de la teoría de series de Taylor, atribuyendo a Rolle de forma clara el teorema:

> *Cuando una función continua se anula para dos valores x_0 y X, la derivada, si es ella misma también continua, se anula para un valor comprendido entre x_0 y X.*
>
> *Es esta última proposición, esto es el teorema de Rolle, junto con las reglas de cálculo establecidas tan fácilmente en Álgebra para la formación de las derivadas de sumas, de productos y de potencias de funciones, lo que nos bastará para establecer la serie de Taylor (Hermite, 1873, p. 48).*

Obsérvese que Hermite incluye la innecesaria condición de que la derivada tenga que ser continua.

A partir de esta fecha ya es habitual encontrar el Teorema de Rolle en los tratados de Análisis, junto con el Teorema del valor medio de Lagrange y el Teorema de Taylor. Así por ejemplo lo encontramos en los siguientes textos:

- **Paul Mansion** (1876), *Leçons d'analyse infinitésimale*, p. 18:

7. THÉORÈME DE ROLLE. *Si une fonction* $y = \mathrm{F}x$ *est continue, ainsi que sa dérivée* $\mathrm{F}'x$, *depuis* $x = x_0$, *jusqu'à* $x = \mathrm{X}$, *et si elle s'annule pour* $x = x_0$, $x = \mathrm{X}$, *sa dérivée s'annule pour une valeur intermédiaire.*

- **Ulisse Dini** (1878), *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*, pp. 76-77, donde se observa que ya se excluye la condición de continuidad de la derivada:

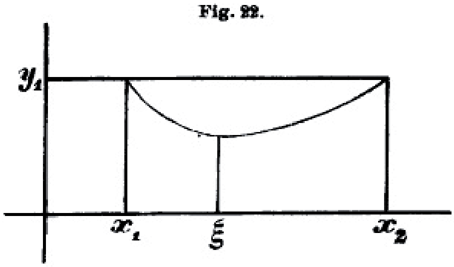
8.° Dalla osservazione 6.ª poi, come anche dai ragionamenti del §. 71, si deduce in particolare che: *Se nell'intervallo* (α, β) *la funzione* $f(x)$ *è sempre finita e continua e, eccettuati tutto al più gli estremi dell'intervallo, in tutti gli altri punti ammette una derivata che è finita e determinata o che essendo infinita è determinata di segno, e se inoltre nei punti estremi a e b la funzione stessa* $f(x)$ *prende uno stesso valore, esisterà sempre nell'* interno *dell'intervallo* (a, b) *almeno un punto determinato* x' *nel quale si avrà:* $f'(x') = 0$.

- **Alex Harnack** (1881), *Die Elemente der differential - und integralrechnung*, pp. 64-66. Harnack enuncia el Teorema del valor intermedio y lo demuestra exactamente igual que Serret en su *Cours de calcul différential et intégral*, aunque esta vez sí, citando al Teorema de Rolle por su nombre:

*) Der Beweis des Satzes, der auch das Theorem von Rolle (1652—1719) genannt wird, ist nach Serret: Cours de calcul différentiel et intégral. T. I. éd. II., pag. 17 ff. gegeben.

- **Moritz Pasch** (1882), *Einleitung in die differential - und integral -rechnung*, pp. 82-83. Aquí se incluye una interpretación geométrica:

Fig. 22.



- **Giuseppe Peano** (1884), *Calculo differenziale e principii di calcolo integrale*. En la página 42 se lee:

> **44. — Teorema** (di Rolle). — *Se* f(x) *è funzione di* x *data in un intervallo* (a, b), *avente derivata* f′(x) *per tutti i valori di* x *in questo intervallo, e se* f(a) = 0 *ed* f(b) = 0, *esisterà un valore* x_1 *compreso fra* a *e* b *e diverso dagli estremi, per cui la derivata è nulla.*

- **Jules Tannery** (1886), *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*. En la página 231 dice lo siguiente:

> **135.** Soit $f(x)$ une fonction qui admet une dérivée $f'(x)$ pour toutes les valeurs de x appartenant à l'intervalle (a, b); si l'on a
>
> $$f(a) = 0, \quad f(b) = 0,$$
>
> il existe une valeur ξ de x appartenant à l'intervalle (a, b), différente de a et de b, pour laquelle on a
>
> $$f'(\xi) = 0.$$

A principios del siglo XX surgieron ciertas dudas sobre si el Teorema de Rolle era realmente atribuible a Rolle, tal y como señala Barrow-Green (2009, p. 751). Esto quizás se debiese a que el *Démonstration* de 1691 se había perdido, y solamente se conocía el *Traité d'Algebre* de 1690, en donde, como hemos visto, solo aparece (sin demostración) el Corolario de Rolle.

Se argumentaba que el Teorema de Rolle podría no ser atribuible a Rolle teniendo en cuenta la época en la que éste vivió. Pero también parecía razonable que Rolle hubiera proporcionado su teorema en el contexto de los polinomios, con una demostración adecuada a su momento. Gustaf H. Eneström, director de la revista *Bibliothema Mathematica*, en un artículo de 1906 publicado en esta revista, advirtió la existencia de una obra de Rolle, citada por algunos matemáticos, llamada *Demonstration d'une methode pour resoudre les egalitez de tous les degrez,* y pronosticó que allí debería encontrarse el resultado de Rolle. La conjetura de Eneström fue resuelta por Florian Cajori en su artículo de 1911, y el asunto sobre la autoría del Teorema de Rolle fue clarificado definitivamente.

Para concluir con el recorrido histórico del Teorema de Rolle, exponemos algunos indicios de cómo se introduce el Teorema de Rolle en España. Para ello hemos seleccionado dos textos, uno de Ignacio Salinas y Angulo, de 1888, y otro de Julio Rey Pastor, de 1952. En el primero de ellos el Teorema de Rolle se presenta en su contexto algebraico mientras que el tratado de Rey Pastor, ya más moderno, se centra en la versión analítica:

- En el Tratado de Álgebra de **Ignacio Salinas y Angulo** (1888, pp. 322-323) encontramos:

333. Teorema de Rolle (**). Como la regla de Descartes sólo determina generalmente un límite superior del número de raíces reales, es preciso dar á conocer nuevas proposiciones que permitan fijar dicho número.

Con tal objeto demostraremos el siguiente principio.

TEOREMA. *Dos raíces reales y consecutivas,* a *y* b, *de una ecuación, comprenden una ó un número impar de raíces reales de la ecuación derivada.*

- En el Análisis Matemático, vol. 1, p. 553, de **J. Rey Pastor, P. Pi Calleja**, y **C. A. Trejo** podemos leer:

Esto es lo que expresa el teorema de ROLLE (generalización para funciones racionales enteras del teorema visto en § 35-2):

Entre cada dos raíces consecutivas de la ecuación de coeficientes reales $f(x) = 0$ *hay un número impar de ceros de su derivada* $f'(x)$, *contando cada uno de ellos tantas veces como indique su orden de multiplicidad.*

COROLARIO: *Entre dos raíces consecutivas de la derivada* $f'(x)$ *hay a lo sumo una sola raíz de la función (cuya existencia se decide por el teorema de* BOLZANO, § 26-2).

En la segunda mitad del siglo XX es un hecho constatable que el Teorema de Rolle se consagra ya como un teorema crucial del Análisis Matemático que aparece sistemáticamente en los textos, en la forma habitual que hoy día conocen nuestros alumnos de Bachillerato.

CONCLUSIONES

El estudio de las Matemáticas desempeña un papel fundamental en la Educación Secundaria, no solo como herramienta básica para el desarrollo de los contenidos científicos y tecnológicos, sino también por su papel preponderante en el desarrollo de las competencias intelectuales del individuo. Por ello, es esencial transmitir a nuestros alumnos la idea de que las Matemáticas no son algo fijo y definitivo; sino que constituyen una ciencia dinámica y viva que hay que ubicar en un marco temporal. De esta manera se favorecerá que los alumnos desarrollen actitudes que les permitan entender las Matemáticas como parte esencial de la evolución cultural y científica de nuestra sociedad. A la larga, esto les resultará mucho más formativo que la mera adquisición de un listado de contenidos de los que muchas veces no comprenden muy bien ni cómo han surgido, ni para qué sirven, ni qué importancia histórica han tenido.

Conocer la Historia de las Matemáticas resulta fundamental para alcanzar tales objetivos. Es por ello que una formación en Historia de la Matemática debe formar parte indispensable del bagaje de conocimientos del Profesor de Matemáticas. De hecho, en la Orden del 5 de Agosto de 2008 por la que se desarrolla el currículo correspondiente al Bachillerato en Andalucía (BOJA 26-8-2008) queda reflejado expresamente que "hay que aprender de y con la Historia de las Matemáticas" y que "los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas deben basarse en la génesis y evolución de los propios conceptos y técnicas matemáticas"

Como hemos mostrado, el resultado que Rolle aportó en su *Demonstration d'une methode pour resoudre les egalitez de tous les degrez* de 1691 se encuentra en un contexto puramente algebraico, totalmente alejado del Cálculo Infinitesimal. Durante mucho tiempo el Teorema se concibió como un resultado algebraico para la resolución de ecuaciones polinómicas. La transición de dicho Teorema del Álgebra al Análisis comenzó en 1755 con Euler, y se prolongó durante más de cien años hasta que Ossian-Bonnet y Serret en 1868, y Hermite en 1873, lo transformaron definitivamente en un resultado del Análisis Matemático. Paralelamente a la transición del Teorema del Álgebra al Análisis, el teorema de Rolle fue creciendo en importancia: pasó de ser un resultado útil en el campo de la resolución de ecuaciones, a convertirse en un resultado fundamental del Cálculo Infinitesimal.

Sin embargo es fácil encontrar afirmaciones sobre el Teorema de Rolle alejadas de la realidad. Véase, por ejemplo, la entrada sobre el Teorema de Rolle que aparece a día de hoy en la Wikipedia: (http://en.wikipedia.org/wiki/Rolle's_theorem).

History [edit]

The first known formal proof was offered by Michel Rolle in 1691, which used the methods of differential calculus. The name "Rolle's theorem" was first used by Moritz Wilhelm Drobisch of Germany in 1834 and by Giusto Bellavitis of Italy in 1846.[1]

Sirva esta anécdota como botón de muestra de lo que aquí hemos argumentado: adquirir una formación mínima sobre la historia, la génesis y la evolución de las ideas inherentes a los conceptos y los resultados que los docentes de Matemáticas enseñamos habitualmente en nuestras aulas, es un requisito primordial para mejorar nuestra cultura matemática y con ello los estándares de calidad de nuestro desempeño docente. En consecuencia, avanzar en este sentido es fundamental a la hora de fortalecer el perfil profesional del Profesor de Matemáticas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ampère, A. (1806). Recherches sur quelques points de la théorie des fonctions dérivées qui conduisent à une nouvelle démosntration de la série de Taylor, et à l'expression finie des termes qu'on néglige lorsqu'on arrête cette série à un terme quelconque. *Journal de l'école polytechnique*. Treizième cahier, tome VI, 148-181.

Barrow-Green, J. (2009). From cascades to calculus: Rolle's theorem. *The Oxford Handbook of the History of Mathematics*. Oxford University Press, Oxford, 737-754.

Besenyei, Á. (2012). A brief history of the mean value theorem. *Talk presented at the conference History of Mathematics and Teaching of Mathematics*. Sárospatak, Hungary, May 24, 2012.

Cajori, F. (1911). On Michel Rolle's book "Methode pour résoudre les egalitez" and the history of "Rolle's Theorem". *Bibliotheca mathematica*, 11, 300-313.

Cauchy, A. L. (1821/1994) *Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique*. Paris 1821. Selección, traducción directa del francés con notas de Carlos Álvarez Jiménez. Introducción de Jean Dhombres. Colección Mathema de los Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias de la UNAM. Universidad de México.

Dini, U. (1878). *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*. Pisa.

Español, L. (2011). Comentarios históricos sobre el teorema de Rolle con referencias a la matemática española hacia 1911. *La Gaceta de la RSME*. 14 (1), 167-178.

Euler, L. (1755). *Institutiones calculi differentialis*. St. Petersburg.

Drobisch, M. W. (1834). *Grundzüge der Lehre von den höheren numerischen Gleichungen*. Leipzig.

Fontenelle, B. (1729). Eloge de Monsieur Rolle. *Oeuvres diverses. Tome troisieme*. La Haye, 300-305.

Gentil, M.E. (1846). *Traité d'Algèbre*. Paris.

Harnack, A. (1881). *Die Elemente der differential - und integralrechnung.* Leipzig.

Hermite, C. (1873). *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*. Paris.

Itard, J. (1970-1990). Biography in *Dictionary of Scientific Biography*, New York.

Marquis de l'Hôpital, G. F. (1796). *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes.* Paris.

Lagrange, J. L. (1797). *Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel.* Paris.

Lagrange, J. L. (1798). *Traité de la résolution des* équations *numériques de tous les degrés*. Paris.

Mansion, P. (1876). *Leçons d'analyse infinitésimale*. Gand.

Mayer y Choquet (1836). *Traité* élémentaire *d'Algèbre*. Paris.

McLaurin, C. (1729). A second letter ... concerning the roots of equations. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 36, 59-96.

Moigno, F. (1840). Note sur la détermination du nombre des racines réelles ou imaginaires d'une équation numérique comprises entre les limites données. Théorèmes de Rolle, de Budan ou de Fourier, de Descartes, de Sturm et de Cauchy. *Journal de mathématiques pures et appliquées*. 1er série, tome 5, 75-94.

Montucla, J. É. (1799.1802). *Histoire des mathématiques*. 4 vols, Paris.

Murphy, R. (1839). *A teatrise on the theorie of algebraical equations*. London.

Pasch, M. (1882). *Einleitung in die differential - und integral -rechnung*. Leipzig.

Peano, G. (1884). *Calculo differenziale e principii di calcolo integrale* Roma, Torino, Firenze.

Rey Pastor, J., Pi, P. y Trejo, C. A. (1952). *Análisis matemático.* Vol.1. Buenos Aires: Editorial Kapelusz.

Reyneau, C. R. (1708). *Analyse demontrée ou la methode de résoudre les problêmes des mathematiques*. Paris.

Rolle, M. (1682). Probléme résolu par le Sieur Rolle. *Journal des Sçavans*. 31 Agosto, 284-286.

Rolle, M. (1690). *Traité d'algebre ou principes généraux pour resoudre les questions de mathématique.* Paris.

Rolle, M. (1691). *Demonstration d'une methode pour resoudre les egalitez de tous les degrez; suivie de deux autres methodes, dont la premiere donne les moyens de resoudre ces mêmes* égalitez *par la Geometrie, et la seconde, pour resoudre plusieurs questions de Diophante qui n'ont pas encore esté resoluës*. Paris.

Salinas, I. y Benítez, M. (1888). Álgebra. Segunda Parte elegida de texto por real orden de 21 de octubre de 1886 en el concurso celebrado el 3 de octubre de 1885 por la Dirección general de Instrucción Militar. Tercera Edición. Madrid.

Serret, J. A. (1868). *Cours de calcul différential et intégral*. Paris.

Shain, J. (1937). The method of Cascades *The American Mathematical Monthly*, 44(1), 24-29.

Suso, C. (2012). *Origen y Evolución del Teorema de Rolle*. Trabajo de fin de máster. Universidad de Granada.

Stevenson, R. (1835). *A treatise on the nature and properties of algebraic equations*. Cambridge.

Suárez, C. O. (2011). Orígenes y evolución del Teorema de Rolle. *Epsilon. Revista de Educación Matemática*, 77, 39-50.

Tannery, J. (1886). *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*. Paris.

Terquem, O. (1884). Théorèmes de Descartes, de Rolle, de Budan et Fourier, de Mm. Sturm et Cauchy deduits d'un seul principe. *Nouvelles Annales de Mathématiques*. 1er série, tome 3, pp. 188-194, 209-213, 555-565, 577-580.

Carlos Suso Fernández
IES Andrés de Vandelvira
C/ Garnica, 1
23440 - Baeza (Jaén)
(Spain)
Email: carlossuso@yahoo.es

María Victoria Velasco Collado
Dpto. de Análisis Matemático
Facultad de Ciencias
Universidad de Granada
18071- Granada (Spain)
Email: vvelasco@ugr.es