Épsilon - *Revista de Educación Matemática* 2013, Vol. 30(1), nº 83, 67-84

Thales dinámico en la espiral del currículo

Silvia Bernardis - Susana Moriena
silvia.bernardis@gmail.com - smoriena@yahoo.com.ar
Facultad de Humanidades y Ciencias - Universidad Nacional del Litoral
Prov. Santa Fe. Argentina

Resumen: *Uno de los teoremas más importantes de la Geometría Sintética es el Teorema de Thales. Consideramos que tiene más dificultades de aprendizaje de las que podemos sospechar. El objetivo de esta publicación es presentar una propuesta que permita superarlas.*
Presentamos, por un lado, el Teorema de Thales en su aspecto proyección, brindando una idea de movimiento respaldada en las características de la proyección paralela.
Por otro, trabajamos dicho teorema en su aspecto homotecia, aprovechando la otra dinámica que utiliza las características de la homotecia.
Debido a que el Teorema se aborda en la escuela, como una configuración estática que oculta estas dos dinámicas, consideramos que trabajando estas dos experiencias con el mismo problema; lograremos que se entremezclen para una mejor comprensión.
Palabras claves: *Teorema de Thales, Geometría, Didáctica de las matermáticas*

Thales dynamic in the spiral of the curriculum

Abstract: *One of the most important theorems of the synthetic geometry is the theorem of Thales. We believe that it has more learning difficulties than we suspect. The aim of this publication is to present a proposal allowing overcoming them.*
Present, on the one hand, the theorem of Thales in its projection aspect, providing an idea of movement endorsed in the characteristics of parallel projection.
On the other hand, we work the theorem in his homothetic appearance, taking advantage of the other dynamics that uses the characteristics of the homothetic.
Because the theorem is discussed in school as a static configuration that hides these two dynamics, we consider these two experiences working with the same problem; we will make intermingle for a better understanding.
Keywords: *Thales Theorem, Geometry, Matehematics education.*

INTRODUCCIÓN

La cuestión de la proporcionalidad era de gran importancia para los griegos principalmente en la arquitectura y agrimensura, por eso se conjetura que la primera sistematización de la geometría pudo haber sido entorno a la proporcionalidad de segmentos determinados por un haz de rectas paralelas y dos transversales. Esta cuestión fue reconocida durante muchos siglos como teorema de "segmentos proporcionales". A fines del siglo XIX, en Francia, lo denominaron Teorema de Thales, denominación que continúa en nuestros días (Boyer, 1986)

El Teorema de Thales es el corazón de la relación entre lo geométrico y lo numérico, ya sea a través de la medición o con el método de coordenadas y la geometría analítica.

Con el objetivo de analizar las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje del teorema, implementamos una encuesta con 20 alumnos de 1er año del Profesorado de Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la UNL. La encuesta aplicada incluía las siguientes cuestiones:

1) ¿Has estudiado el Teorema de Thales en la escuela secundaria? ¿En qué año?
2) Con tus palabras, escribe lo que recuerdes del Teorema. (Enunciado, representación gráfica, expresión simbólica, explicación en palabras)

Las respuestas que obtuvimos a la primera pregunta son contundentes y se describen en la siguiente tabla:

Categorías	Nunca lo estudió	No lo recuerda	Enuncia-representa y simboliza
Porcentajes	50%	25%	25%

En base a estos resultados, observamos que la mayoría de estos alumnos no conoce o no recuerda el Teorema de Thales.

En un taller realizado recabamos opiniones de docentes, quienes expresaron que las dificultades más frecuentes de los estudiantes en la utilización del teorema son las siguientes:

- Confusión en el concepto de puntos correspondientes.
- Confusión en la interpretación correcta de las proporciones.

Además, analizamos el abordaje del teorema de Thales y sus aplicaciones en distintos libros de texto, correspondientes a 2do. y 3er. año de la escuela secundaria (10 en total) y observamos que presentan el teorema:

- Reduciéndolo a una figura prototípica.
- La demostración está ausente, se limitan a una ejemplificación.
- Reducen su uso, al cálculo de una incógnita en la proporción.

MARCO TEÓRICO

En la elaboración de las situaciones presentadas tuvimos en cuenta aquellas que permitan a los estudiantes modelar eficazmente problemas reales por medio de dibujos dinámicos que podrán explorar con el objeto de: descubrir, formular conjeturas y validar las mismas.

Es importante crear en nuestros alumnos la necesidad de explicar la verdad comprobada en todos los casos con el software, es decir la demostración como una explicación a través de las propiedades conocidas (De Villiers, 1996). Mediante la exploración experimental es posible despejar las dudas en torno a la verdad del enunciado, sin embargo será necesario explicar por qué se está cumpliendo.

> Tradicionalmente, el enfoque crítico de la geometría era tratar de crear dudas en la mente de los estudiantes acerca de la validez de sus observaciones empíricas, esas estrategias de tratar de generar dudas para crear la necesidad de una demostración simplemente no funcionan cuando las conjeturas geométricas se investigan a fondo a través de su variación continua con un software de geometría dinámica (De Villiers, 1996; p. 2).

Es necesario acostumbrar a nuestros alumnos a justificar sus afirmaciones, argumentar lo que aseguran es verdadero en base a resultados y propiedades que ya conocen. Esta tarea no es sencilla. Como afirma Dreyfus (2000; p. 130), “no deberíamos esperar que nuestros estudiantes sean capaces de captar demostraciones sofisticadas y de alto nivel, sin haber estado expuestos durante muchos años al espíritu de la justificación y a la naturaleza del pensamiento matemático”.

El desafío es diseñar actividades para lograr que los alumnos valoren la necesidad de justificar sus construcciones y conjeturas.

PROPUESTA

En esta publicación presentamos un nuevo enfoque basándonos en la propuesta de Duperret (1996), adaptada a nuestra escuela secundaria, en el cual sugerimos enseñar el Teorema de Thales en dos etapas:

- *Primera etapa:* en 2º año (14 años) el Teorema de Thales en su aspecto proyección, brindando una idea de movimiento respaldada en las características de la proyección paralela.
- *Segunda etapa:* retomar el tema en 3er año (15 años) desde su aspecto homotecia, aprovechando la otra dinámica que utiliza las características de la homotecia.

Para esta propuesta suponemos que los temas: proyección paralela, homotecia semejanza han sido estudiados previamente en los cursos respectivos.

La idea de retomar el teorema desde otra mirada para su mejor comprensión está fundamentada en la idea de Bruner (1984), quién presenta el currículo en espiral, mediante el cual los planes de estudio se presentan de manera recurrente, trabajando siempre los mismos conceptos pero a diferente nivel de profundización.

> Mientras se asciende a los niveles superiores, los núcleos básicos de la materia aumentan progresivamente la cantidad informativa, variando también el tipo de procedimiento, según el nivel de desarrollo de los alumnos. Pasando así de lo manipulativo a lo intuitivo, y desde lo intuitivo a lo simbólico (Hernández, 1991).

Primera Etapa: *Aspecto Proyección del Teorema de Thales*

La enseñanza del teorema en 2º ***año*** de la escuela secundaria: el teorema de Thales reducido a dos lados del triángulo.

En esta primera etapa, presentamos una actividad, basada en la resolución de un problema, para lograr que los estudiantes:

- Conozcan el Teorema de Thales en su aspecto proyección, reconociendo los puntos correspondientes en la proyección paralela.
- Exploren y conjeturen utilizando el software Geogebra.
- Demuestren el Teorema de Thales a partir de las áreas.
- Utilicen el Teorema para justificar sus conjeturas en la resolución de problemas.

El aspecto proyección del Teorema de Thales destaca la proyección paralela de cada punto de la recta AC sobre la AC’, según la dirección de la recta BB’.

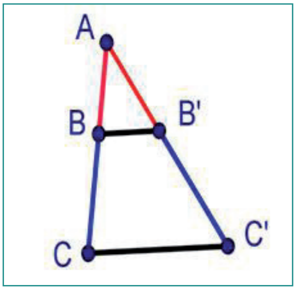

Figura 1

Ejemplo de Secuencia para la Primera etapa

Dado el siguiente problema:

La lámpara de Marta

Marta quiere comprar los vidrios para arreglar la lámpara de su estudio. Le sacó una foto, hizo un dibujo para anotar las medidas de los vidrios pero no pudo tomarlas todas. Decidió mostrar su dibujo al señor de la vidriería para pedirle que fuera él a terminar de medir los vidrios. Cuando el señor vio el dibujo, observó que los segmentos BB’, CC’, DD’ eran paralelos y le dijo a Marta que con las medidas anotadas se podían conocer las faltantes. El dibujo de Marta es el siguiente:

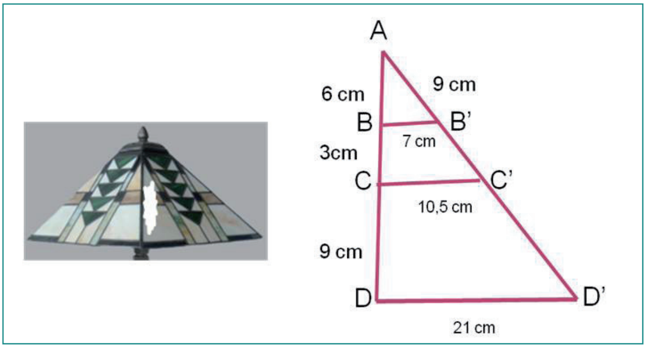

Figura 2

¿Estás de acuerdo que con las medidas anotadas se pueden obtener las que faltan? ¿Por qué?

Actividad 1: Explorar con la ayuda del software

Enunciado: Realiza la construcción del dibujo de Marta con el software.

Utilizando un software de geometría dinámica (en este caso utilizamos Geogebra), los estudiantes visualizarán la situación que plantea el problema, como en la Figura 3.

Observación: Debido a que el software integra la geometría con el álgebra, en estas figuras ya se ha fijado una unidad de medida que permite obtener la longitud de los segmentos determinados.

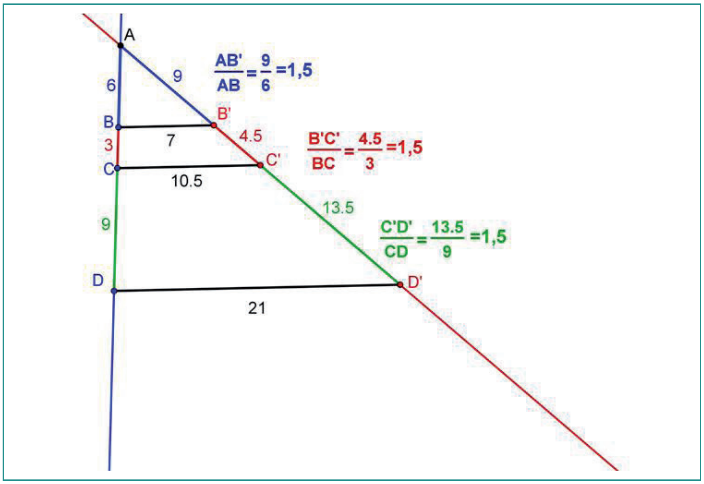

Figura 3

Hallarán todas las medidas que faltan, realizando la construcción con Geogebra:

|B'C'| = 4,5
|C'D'| = 13,5

Actividad 2: Validación de la conjetura

Enunciado1: *Si bien hemos encontrado los valores que necesitábamos con el software, ¿**Cómo podríamos obtenerlos analíticamente?** ¿Cómo se obtienen los puntos C' y D'?*

Los estudiantes concluirán que los puntos C' y D' se obtienen como imagen en la recta AD' de la proyección paralela de los puntos C y D de la recta AD.

Sugerimos aquí recordar la definición de: Proyección paralela a *l* sobre ***a´***

Dadas dos rectas *l* y *a'* en el plano, no paralelas, se llama proyección paralela a *l* sobre *a'* a la aplicación que a cada punto P de la recta *a* le hace corresponder el punto P*´* ***de intersección de la recta*** *a´* con la recta paralela a *l* que pasa P (ver Figura 4).

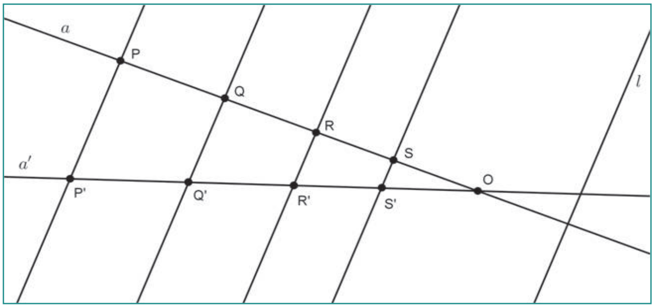

Figura 4

Enunciado 2: *¿Existe alguna relación entre las longitudes de los segmentos conocidos para hallar los demás? Enunciar dicha relación.*

Enunciado del Teorema de Thales en su aspecto proyección:

Dado el triángulo ACC' siendo B un punto en el lado AC y B' un punto en el lado AC'. Si BB' es paralelo a CC' entonces:[1]

$$k_p = \frac{|AB'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{|AC'|}{|AC|}, \text{ donde } k_p \text{ es la razón de proyección.}$$

1. |AB| es la longitud del segmento AB, notación tomada de Tirao (1979).

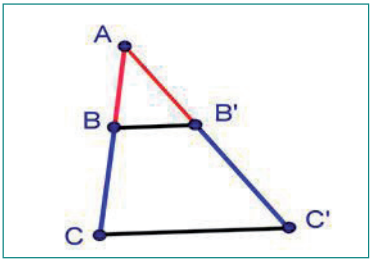

Figura 5

Enunciado 3: ¿Esta relación es siempre verdadera? ¿Por qué?

Con el objetivo de iniciar a los estudiantes en las demostraciones geométricas y poniendo en juego una de las reglas de debate matemático imprescindible como es la idea de que los ejemplos no alcanzan para asegurar que una propiedad es verdadera, que se necesita para ello una demostración, es que sugerimos plantear a los estudiantes dichas preguntas.

Debido a que la demostración a partir de las áreas, que fue utilizada por Euclides es muy sencilla, la elegimos para esta etapa.

Dado el triángulo ACC’ sea B un punto en el lado AC y B’ un punto en el lado AC’. Suponemos que BB’ es paralelo a CC’, entonces:

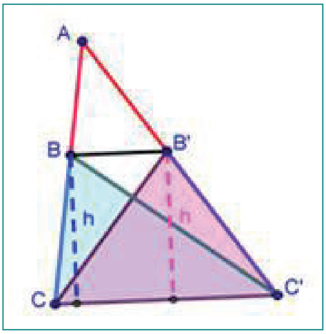

Figura 6

Los triángulos BCC’ y CB’C’ tienen igual área. (Figura 6), pues comparten un lado y tienen la misma altura

Área (BCC’)=Área (CB’C’)

Por lo tanto:

Área (ABC′)=Área (ACB’)

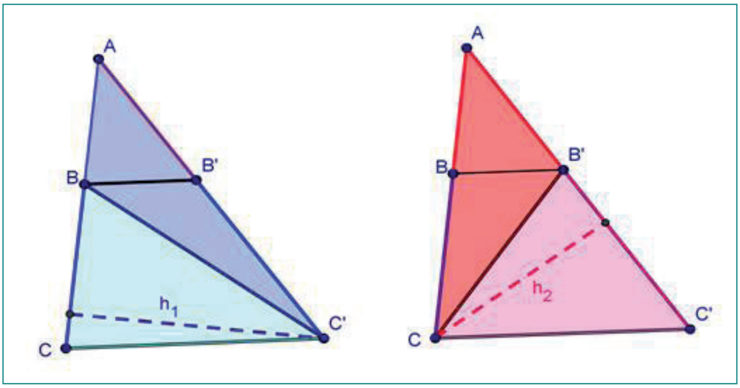

Figura 7

Área (ABC´)=Área (ACB’), es decir: $\frac{|\mathrm{AB}|.\mathrm{h}_1}{2} = \frac{|\mathrm{AB}'|.\mathrm{h}_2}{2}$

Área (BCC´)=Área (CB’C’), es decir: $\frac{|\mathrm{BC}|.\mathrm{h}_1}{2} = \frac{|\mathrm{B}'\mathrm{C}'|.\mathrm{h}_2}{2}$

Dividiendo a ambos miembros se tiene: $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AB'|}{|B'C'|}$

O bien: $\frac{|AB'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|}$

Análogamente podemos probar que: $\frac{|AC'|}{|AC|} = \frac{|B'C'|}{|BC|}$

Luego hemos demostrado el teorema de Thales en su aspecto Proyección.

Actividad 3: Resolución del Problema

Enunciado: *Calcular los valores obtenidos con el software, utilizando el teorema de Thales.*

Para calcular |B’C’|, conociendo |AB|, |AB’| y |BC| podemos utilizar la relación

$$k_p = \frac{|AB'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|};\ \frac{9}{6} = \frac{|B'C'|}{3};\ |B'C'| = \frac{9}{2} = 4{,}5$$

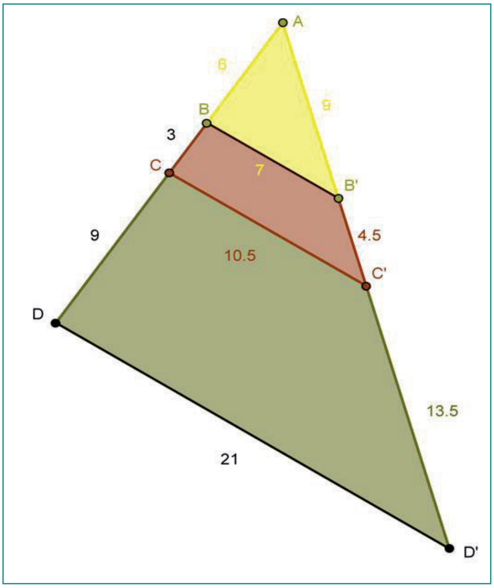

Figura 8

Para calcular |C'D'|, conociendo |AB|, |AB'| y |CD| podemos utilizar la relación:

$$k_p = \frac{|AB'|}{|AB|} = \frac{|C'D'|}{|CD|};\ \frac{9}{6} = \frac{|C'D'|}{9};\ \ |C'D'| = \frac{27}{2} = 13{,}5$$

Utilizando el Teorema de Thales es posible hallar todas las medidas que faltan, para dar respuesta al problema.

Respuesta: *El Señor de la vidriería tenía razón…*

Segunda Etapa: *Aspecto Homotecia del Teorema de Thales*

La enseñanza del teorema en 3er. año de la escuela secundaria: sugerimos desarrollar homotecia y luego el Teorema de Thales.

En esta segunda etapa, nos proponemos que los estudiantes:

- Reconozcan el Teorema de Thales en su aspecto homotecia, reconociendo los puntos correspondientes en la misma. Presentación de la razón del tercer lado.
- Exploren y conjeturen utilizando el software Geogebra.
- Demuestren la proporción con el tercer lado.
- Utilicen el Teorema para justificar sus conjeturas en la resolución de problemas.

Este aspecto destaca el paso del triángulo ABC al triángulo AB'C'. Utilizando homotecia.

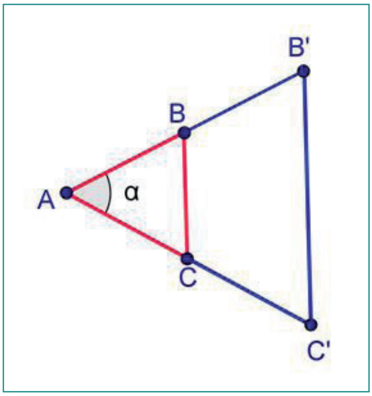

Figura 9

Ejemplo de Secuencia para la Segunda etapa

Incendio en el hospital

A un incendio producido en un hospital acude la unidad de bomberos con una escalera de 8 m de longitud que consta de 20 peldaños distribuidos uniformemente. Al apoyar la escalera sobre la fachada del edificio se observa que el primer peldaño se encuentra a 30 cm del suelo.

Figura 10

Debido a que las llamas ascienden rápidamente hacia arriba, es necesario averiguar si es posible con dicha escalera evacuar el 3er. piso del hospital. Cada planta tiene 2,5 m de altura. ¿Podrán ser rescatados? Justifica tu respuesta.

Actividad 1: Exploración con la ayuda del software

Enunciado: Realizar la construcción de la situación que presenta el problema con la ayuda del software.

Utilizando un software de geometría dinámica (en este caso utilizamos Geogebra), los estudiantes visualizarán la situación que plantea el problema, como en la Figura 11.

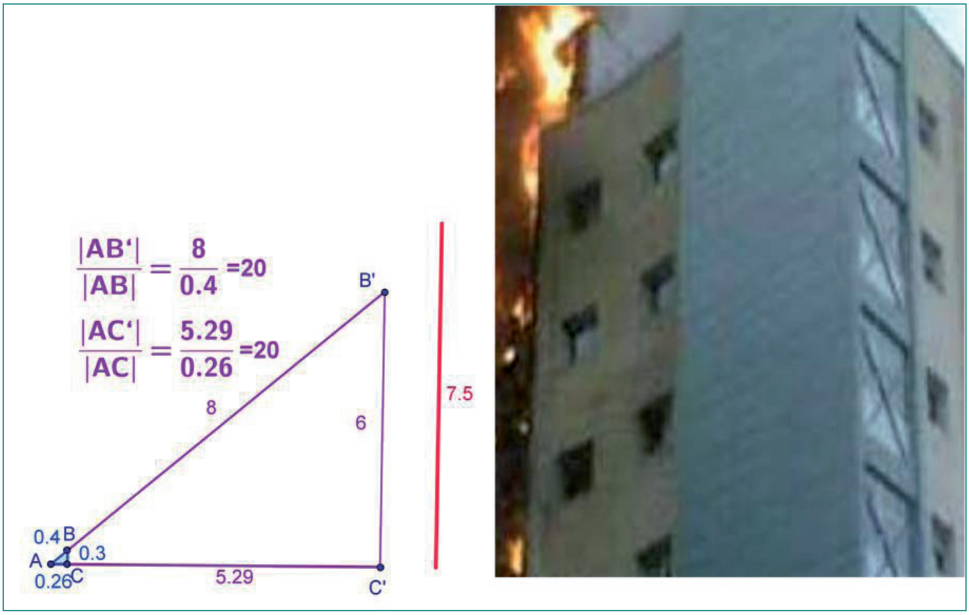

Figura 11

Hallarán todas las medidas que faltan, con la ayuda del software:
|B’C’|=6 m
Como los 3 pisos de 2,5 m tienen una altura total de 7,5 m
No será posible salvar a todos…

Actividad 2: Validación de la conjetura

Enunciado 1: Si bien hemos encontrado los valores que necesitábamos con el software, ¿Cómo podríamos obtenerlos analíticamente? ¿Cómo se obtienen los puntos B’ y C’?

Los estudiantes concluirán que los puntos B’ y C’ son los homotéticos de B y C respectivamente.

En efecto: dado que los puntos A, B y B’ y los puntos A, C y C’ están alineados y

$$\frac{|AB'|}{|AB|} = \frac{|AC'|}{|AC|} = 20$$

Luego los puntos B’ y C’ se obtienen por la homotecia H(A; 20).

Sugerimos aquí recordar la definición de homotecia y sus propiedades:

Definición de Homotecia

Sea O un punto del plano y k un número real distinto de cero. Una *homotecia de* centro O y razón k es la transformación geométrica del plano en sí mismo, que hace corresponder a un punto **A** distinto de O otro **A’**, alineado con **A** y **O**, tal que: **|OA’|=k· |OA|** y deja invariante el punto O.

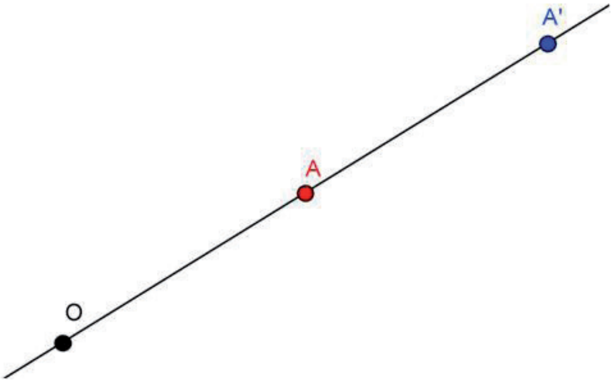

Figura 12

Enunciado 2: ¿Existe alguna relación entre las longitudes de los segmentos conocidos para hallar los demás? Enunciar dicha relación.

Enunciado del Teorema de Thales en su aspecto homotecia:

Dado el triángulo AC’B’ siendo B un punto en el lado AB’ y C un punto en el lado AC’. Si BC es paralelo a B’C’ entonces:

$$k_h = \frac{|AB'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{|AC'|}{|AC|}, \ \textit{k_h es la razón de homotecia}$$

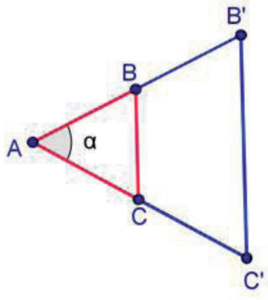

Figura 13

Enunciado 3: ¿Esta relación es siempre verdadera?¿Por qué?

La igualdad $\frac{|AB'|}{|AB|} = \frac{|AC'|}{|AC|}$ es la que hemos probado en la 1ra etapa.

Probaremos la igualdad: $\frac{|AB'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|}$.

Para ello trazamos un segmento paralelo al segmento CC' por B. Ese segmento cortará en el punto D al segmento B'C'. Queda determinado el paralelogramo BCC'D, las medidas de los segmentos BC y DC' son iguales (Figura 14).

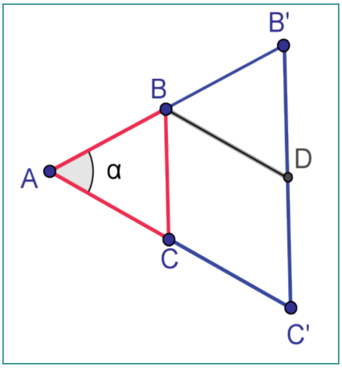

Figura 14

Los triángulos ADC' y ABC' tienen igual área (Figura 15), pues comparten un lado y tienen la misma altura.

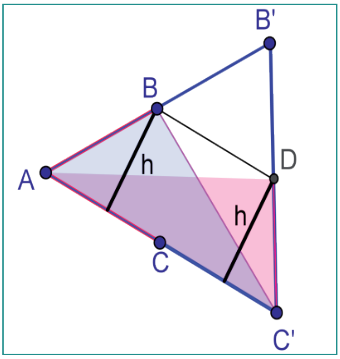

Figura 15

Por lo tanto:

$$\text{Área (ADC')} = \text{Área (ABC')}$$

$$\text{Área (AB'D)} = \text{Área (BB'C')}$$

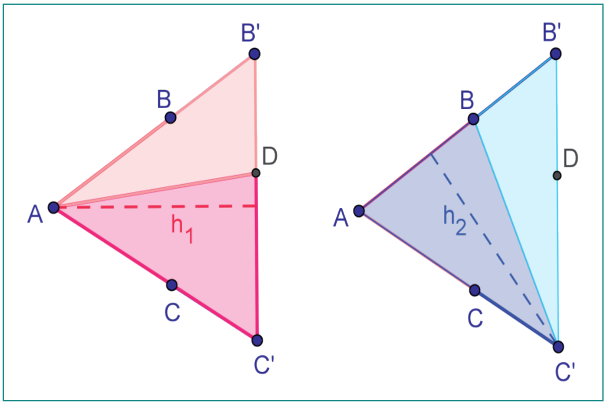

Figura 16

Área (ADC') =Área (ABC'), es decir: $\frac{|DC'|.h_1}{2} = \frac{|AB|.h_2}{2}$

Área (AB'D) =Área (BB'C'), es decir: $\frac{|B'D|.h_1}{2} = \frac{|BB'|.h_2}{2}$

Dividiendo a ambos miembros se tiene: $\frac{|DC'|}{|B'D|} = \frac{|AB|}{|BB'|}$

Como ya mencionamos: $|DC'| = |BC|$. Pero $|B'D| = |B'C'| - |DC'| = |B'C'| - |BC|$ y $|BB'| = |AB'| - |AB|$, así de la proporción anterior obtenemos:

$$\frac{|BC|}{|B'C'| - |BC|} = \frac{|AB|}{|AB'| - |AB|}$$

O bien: $\frac{|B'C'| - |BC|}{|BC|} = \frac{|AB'| - |AB|}{|AB|}$

Es decir: $\frac{|AB'|}{|AB|} - 1 = \frac{|B'C'|}{|BC|} - 1$

Luego, se obtiene la proporción buscada: $\frac{|AB'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|}$

Probamos de esta manera que los triángulos ABC y AB'C' tienen sus lados proporcionales:

$$\frac{|AB'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{|AC'|}{|AC|}$$

Finalmente, observemos que en los triángulos ABC y AB'C' la razón entre los lados homólogos es k_h, además se verifica la alineación y se preserva el orden. Concluimos que el homotético del triángulo ABC es el triángulo AB'C' por una homotecia de centro A y razón k_h, con $k_h > 0$.

En el caso en que $k_h < 0$ podemos utilizar que toda homotecia de razón negativa puede obtenerse como la composición de una simetría de centro en A con la homotecia correspondiente positiva.

Por lo tanto podemos concluir que en los triángulos homotéticos ABC y AB'C' se verifica el Teorema de Thales.

Actividad 3: Resolución del Problema

Enunciado: ***C**alcular analíticamente los valores obtenidos con el software, utilizando el teorema de Thales.*

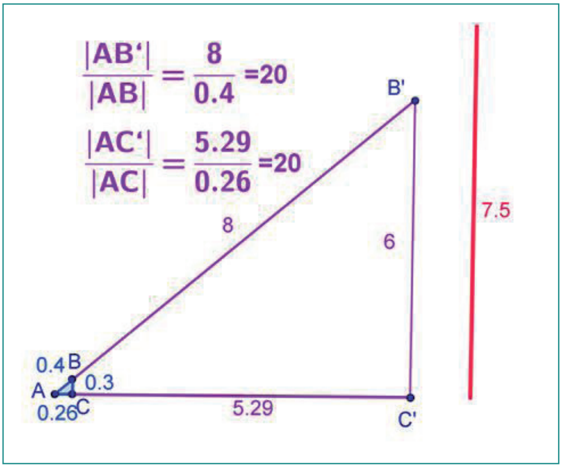

Figura 17

Para calcular |B'C'|, conociendo |AB|, |AB'|y |BC| podemos utilizar la relación:

$$k_h = \frac{|AB'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|};\ \frac{8}{0{,}4} = \frac{|B'C'|}{0{,}3};\ |B'C'| = \frac{24}{4} = 6$$

El hospital tiene 3 plantas de 2,5 m de altura, el 3er piso estará a 7,5 m de altura.
La escalera alcanzará una altura de 6 m.
Respuesta: *No es posible salvar a los enfermos del 3er. piso…*

Finalmente recomendamos realizar actividades de integración para que los estudiantes pongan en juego los dos aspectos del Teorema.

Además creemos importante aclarar que si bien estas actividades refieren al enunciado directo del teorema es igualmente interesante plantear actividades donde se involucre el enunciado recíproco del mismo.

Dado el triángulo AC'B' siendo B un punto en el lado AB' y C un punto en el lado AC' Si ABC y AB'C' tienen sus lados homólogos proporcionales entonces los lados BC y B'C' son paralelos.

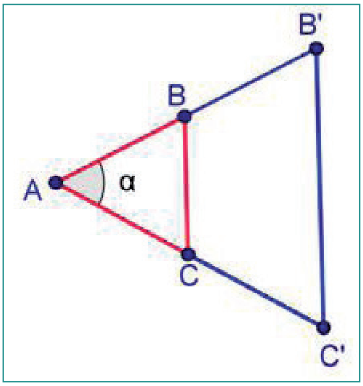

Figura 18

REFLEXIONES FINALES

Comenzar en una primera etapa con la configuración triangular permite dar vida a Thales a partir de una figura simple, luego variar esta figura para construir otras más complejas. En las actividades propuestas se destaca la importancia del uso del software tanto en la exploración y formulación de la conjetura, como en la validación de la misma.

El trabajo con ambos aspectos del teorema contribuyen a una mejor comprensión de los conceptos de "puntos correspondientes" y de "segmentos homólogos" del mismo, otorgándole un sentido de acuerdo al movimiento. Creemos que ambas dinámicas de Thales deben formar parte de la enseñanza y que hay que hacer y construir en el tiempo estos dos enfoques, sugerimos esta secuencia que permite matemáticamente validar las diferentes etapas. Consideramos necesario confrontar las dos lógicas dinámicas de Thales y pensar en una geometría "en movimiento" que despierte interés en los estudiantes.

En esta propuesta se potencia una característica de la actividad matemática, como es el uso de herramientas conocidas para justificar otras y al mismo tiempo brindar experiencias que permitan tener disponible esta nueva herramienta, el Teorema de Thales, para justificar otras situaciones similares.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Boyer, C. (1986). *Historia de las Matemáticas.* Madrid: Alianza Universidad.

Bruner, J. (1984). *El Desarrollo de los procesos de representación, en: Acción, Pensamiento y Lenguaje*. Madrid: Alianza ED.

De Villers, M. (1996). *Algunos desarrollos en enseñanza de la geometría* The Future of Secondary School Geometry, la lettre de la preuve, Nov.-Dic., 1999.

Dreyfus, T. (2000). La demostración como contenido del currículum. En M. Colén, Y. Fraile, y C. Vidal(Eds): *Matemática y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*. Barcelona: Graó

Duperret, J.C. (1996). Por un Tales Dinámico. En E. Barbin y R. Douady (Cord) *La enseñanza de las matemáticas: Relación entre Saberes, Programas y Prácticas.* Pub del IREM. France: Topiques editions.

Hernandez, P. (1991). *Psicología de la Educación*. Corrientes actuales y teorías aplicadas. México: Trillas.

Tirao J. (1979). *El plano.* Buenos Aires: Editorial Docencia.