Épsilon *- Revista de Educación Matemática* ***2012, Vol. 29(3), nº 82, 9-22, ISSN: 1131-9321***

Las derivadas: Análisis del libro de texto de la enseñanza secundaria en Portugal con sus primeras aplicaciones

Ana Paula Aires
Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro
aaires@utad.pt

Ana Elisa Esteves Santiago
Universidade Nova de Lisboa
elisa_santiago@hotmail.com

Resumen: *El trabajo aquí descrito consta de un estudio mas vasto en lo que se pretendió hacer un análisis de los problemas de optimización, en los libros históricos de Matemática, desde el siglo IV a.C., pasando después para el análisis de los programas oficiales de Matemática de la Enseñanza Secundaria con el objetivo de verificar cuales y de que forma abordaban el estudio de los problemas de optimización, terminando con el análisis de los problemas de optimización que constan en los libros de texto de cada plan de estudios (Santiago, 2008).*

Se presenta el análisis del programa y respectivo libro de texto que han marcado la introducción de los problemas de optimización en la enseñanza secundaria, en Portugal, mas específicamente el programa oficial de 1954 y el "Livro Único" que vigoraba en esa época. Para tal haremos un análisis de los problemas de optimización, basada en las cuatro fases de resolución de problemas propuestas por George Polya (2003).

Palabras Clave: *Planes de estudio Matemática, libros de texto, derivada, problemas de optimización.*

The derivatives: textbook analysis of secondary education in Portugal with its first applications

Abstract: *The work described here consists of a more extensive study on what was intended to analyze optimization problems, in the historical books of mathematics, from*

the fourth century B.C., then moving to the analysis of the official programs of Mathematics Secondary Education in order to verify which is addressed and that the study of optimization problems, ending with the analysis of optimization problems that appear in the textbooks of each curriculum (Santiago, 20089.
It provides an analysis of the program and textbook respective marked the introduction of optimization problems in secondary education in Portugal, more specifically the official program of 1954 and the "Livro Único" that vigoraba then. For this we will analyze optimization problems, based on the four phases of problem solving proposed by George Polya (2003).
Keywords: *Mathematics curricula, textbooks, derived, optimization problems.*

INTRODUCCIÓN

Una vez que esta investigación tiene un duplo carácter - histórico y didáctico – hemos buscado en las obras de Bisquera (1989), Ruiz-Berrio (1997) y Schubring (1987, 1989) la fundamentación para la metodología de investigación histórica a utilizar.

En este contexto han sido también importantes la obra de Astudillo (2002) que presenta una caracterización de las representaciones de los puntos críticos presentes en los libros de texto en España y en libros históricos y la obra de Sierra (2003) sobre la evolución de la enseñanza del Análisis Matemático y del Álgebra, en España.

De entre las obras que utilizamos para contextualizar la evolución de los sistemas educativos, con un cariz marcadamente histórico, destacamos la *História do Ensino em Portugal* de Rómulo de Carvalho (Carvalho, 1985) y la obra *O Sistema de Ensino em Portugal (Séculos XIX-XX*) de Maria Cândida Proença (Proença, 1998). Otra fuente, también importante ha sido la legislación y los planes de estudio publicados.

Para el análisis didáctico hemos tenido por base las cuatro fases de resolución de problemas propuestas por George Polya (2003).

INTRODUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN LOS PROGRAMAS OFICIALES PORTUGUESES

El concepto de derivada ha sido introducido por la primera vez en los planes de estudio de la enseñanza secundaria, designado por "ensino liceal", en el 1905 con el plan de estudios del ministro de la Instrucción, José Coelho (Decreto nº 3 do Diário de Governo nº 250, del 4 Noviembre del 1905).

Importa aquí decir que la estructura de la enseñanza secundaria, en esta época, en Portugal comprendía el curso general y el curso complementar que consagraba dos vías: letras y ciencias. El curso general constaba de dos ciclos, con la duración de cinco años (1º al 5º año), mientras el curso complementar, con un ciclo solo, tenía la duración de dos años (6º y 7º anos) (Figura 1).

El concepto de derivada está integrado en el programa relativo à la VII clase (o 7º año) del curso complementar de ciencias, en el capítulo destinado al Álgebra que contempla los siguientes contenidos (Ver imagen):

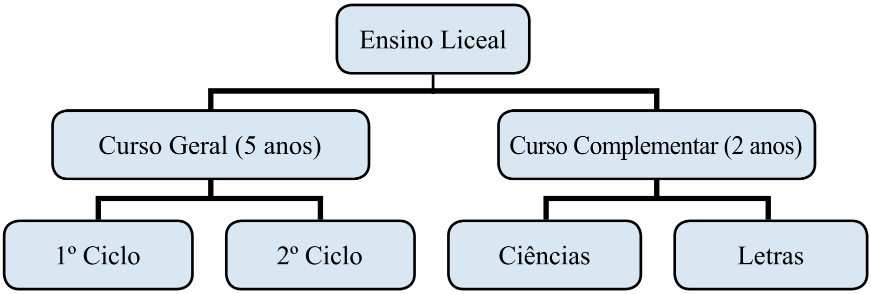
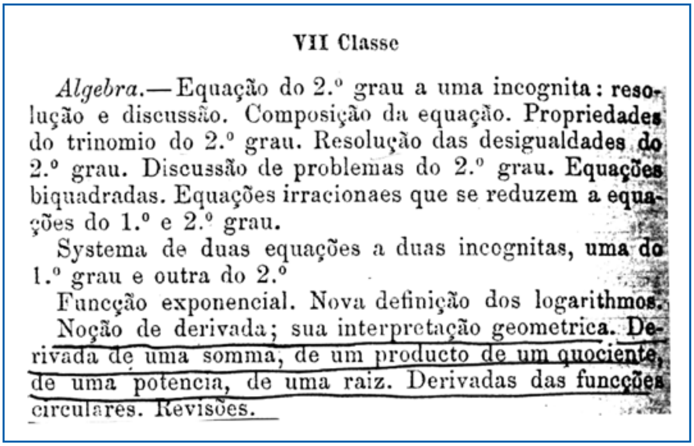


Fig. 1 Estructura de la enseñanza secundaria en Portugal en el 1905



VII Classe

Algebra.—Equação do 2.º grau a uma incognita: resolução e discussão. Composição da equação. Propriedades do trinomio do 2.º grau. Resolução das desigualdades do 2.º grau. Discussão de problemas do 2.º grau. Equações biquadradas. Equações irracionaes que se reduzem a equações do 1.º e 2.º grau.

Systema de duas equações a duas incognitas, uma do 1.º grau e outra do 2.º

Funcção exponencial. Nova definição dos logarithmos.

Noção de derivada; sua interpretação geometrica. Derivada de uma somma, de um producto de um quociente, de uma potencia, de uma raiz. Derivadas das funcções circulares. Revisões.

Con excepción del plan de estudios del 1936, del ministro de la Instrucción Pública Carneiro Pacheco, el estudio de las derivadas se ha mantenido siempre presente en los programas oficiales de la enseñanza secundaria hasta la actualidad. Pero, las aplicaciones de las derivadas solo empiezan a constar en los programas oficiales a partir del plan de estudios del 1954, siendo ministro de la Educación Pires de Lima (Aires, 2006).

EL PLAN DE ESTUDIOS DEL 1954

Abordemos ahora el plan de estudios del 1954, empezando por el análisis del programa oficial que ha sido publicado.

Los nuevos programas de las disciplinas de la Enseñanza Secundaria han sido aprobados el 7 de Septiembre del 1954 (Decreto nº 39807, do Diário de Governo nº 198 del 7 de Septiembre del 1954) y, en el programa de Matemática, el concepto de derivada aparece en el 6º año del Curso Complementar de Ciencias.

Presentamos de seguida la estructura de este:

6.º ano

Álgebra

Breves noções sobre as sucessivas generalizações do conceito de número; representação geométrica do sistema dos números reais. Números complexos de duas unidades; forma algébrica; igualdade, desigualdade e operações. Noção elementar de variável e de função; expressão analítica de uma função; classificação das funções; funções inversas; representação geométrica de algumas funções.

Infinitamente grandes; infinitésimos; infinitésimos simultâneos; teoremas relativos ao produto e à soma de infinitésimos. Limite de uma variável; limite de uma função; operações sobre limites.

Noção elementar de continuidade de uma função.

Derivada de uma função num ponto; função derivada. Derivadas das funções algébricas. Aplicação ao estudo da variação das funções nos casos mais simples.

Propriedades dos polinómios inteiros.

Adição algébrica, multiplicação e divisão de polinómios.

Divisão por $(x-a)$; polinómio identicamente nulo; polinómios idênticos; princípio das identidades; método dos coeficientes indeterminados; regra de Ruffini.

Fracções algébricas. Símbolos de impossibilidade; símbolos de indeterminação da forma

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty}\ \text{e}\ 0\times\infty;$$

verdadeiro valor de uma expressão que se apresenta sob a forma indeterminada.

Verificamos que, después del estudio de la derivada, apenas surge la indicación del estudio de las aplicaciones de esta al estudio da la variación de funciones en los casos simples.

Una vez que vigoraba el régimen del libro único[1], al final del programa surge la información del nombre de los libros. Para el tema que estamos analizando se encuentra la siguiente referencia: *Compêndio de Álgebra, num volume.*

EL LIBRO ÚNICO

En el 1947 empieza a vigorar el régimen del libro único, habiendo sido aprobado para el 3º ciclo de la enseñanza secundaria el *Compêndio de Álgebra* de António Augusto

1. En el 1947, a través del Decreto-Lei nº 36508 del 17 de Septiembre se da la reposición del libro único, una medida que ha provocado alguna contestación, pero que permanecerá vigorando hasta 1974

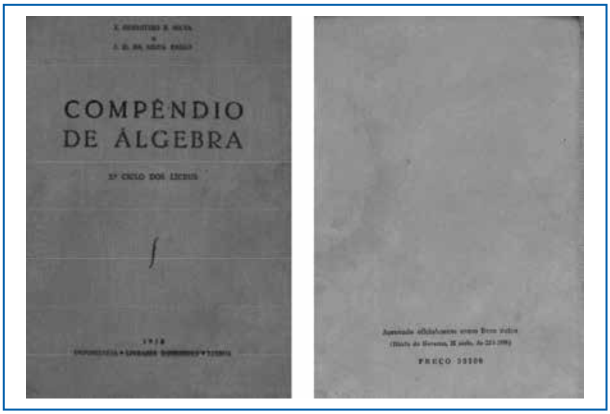
Lopes (D. G. nº 145, II Série, del 24 de Junio del 1950). Como la ley previa[2] este debería vigorar hasta el 1955 debiendo ser abierto concurso para presentación de libros de texto hasta el final del mes de Septiembre del año anterior al que se empezaría el nuevo período, lo que ha acontecido el 18 de Septiembre del 1954 (D.G. nº 221, III Série).

António Augusto Lopes, el autor del libro único de Álgebra para el 3º ciclo de la enseñanza secundaria, ha sometido de nuevo su libro de texto a este concurso donde también han concursado otros dos libros cuyos autores eran profesores bien conocidos y conceptuados en el espacio académico. El primer de autoría de António Nascimento Palma Fernandes y Francisco Maria Gonçalves – *Elementos de Álgebra para o 6º ano do ensino secundário* - y el segundo de António Augusto Ferreira de Macedo, António Nicodemos Sousa Pereira y Alfredo Tenório de Figueiredo - *Compêndio de Álgebra, 3º ciclo liceal. 1ª parte - 6ºano*.

El Profesor José Duarte da Silva Paulo ha sido nombrado como relator para emitir opinión sobre los libros candidatos a este concurso, que ha tenido como resultado la no aprobación del libro único de Álgebra para el 3º ciclo de la enseñanza secundaria.

Para resolver este problema, todavía en 1955, ha sido abierto un nuevo concurso para presentación de los libros destinados al 3º ciclo de la enseñanza secundaria, en particular para el *Compêndio de Álgebra* al cual se ha presentado mas un libro à la lista de los anteriores: el *Compêndio de Álgebra* de José Sebastião e Silva y José Duarte da Silva Paulo, este último autor era precisamente el relator del anterior concurso. Pero, ha sido necesario esperar tres años para que se publicase el resultado del referido concurso, habiendo sido aprobado el *Compêndio de Álgebra para o 3º ciclo* de José Sebastião e Silva y José Duarte da Silva Paulo (D.G. nº 18, II Série, del 22 de Enero del 1958).

De esta forma, en este periodo de tiempo, entre el 1950 y 1958, podemos encontrar cuatro compendios destinados al Álgebra para el 3º ciclo de la enseñanza secundaria, exactamente los cuatro libros de texto que habían sido candidatos al último concurso del 1955. Presentamos aquí la capa e contra capa del libro de texto aprobado.



Importa todavía referir que todos los ejemplares de este libro de texto estaban firmados y autenticados por el Ministerio da la Educación Nacional.

2. Articulo 391, nº 1 e nº 2 del decreto nº 36 508 (Estatuto do Ensino Liceal) do D. G. nº 216, I Serie, del 17 de Septiembre del 1947.

Este libro tuvo varias ediciones a lo largo de los años que han sufrido algunas alteraciones. De esta forma, iremos hacer el análisis de las cuatro ediciones que nos han parecido representativas de la época.

La obra, de José Sebastião e Silva y de J. D. Silva Paulo, intitulada *Compêndio de Álgebra, 6º e 7º Ano, 3º Ciclo - Ensino Liceal*, ha sido publicada el 1958 y el 1960 por la Librería Rodrigues (Aprobado como libro único por el D. G. nº 18, 2ª Serie del 22/01/1958). El 1963 ha sido publicada en Lisboa por la librería Bertrand (Irmãos), Lda, (Aprobado como libro único por el D. G. nº 100, 2ª Serie del 24/04/1963) y el 1968 ha sido publicada en Braga por la Librería Cruz (Aprobado como libro único por el D. G. nº 110, 2ª Serie del 08/05/1968).

Veamos ahora las características de esta obra.

La edición del *Compêndio de Álgebra* del 1958 estaba repartida en dos partes: una para el sexto año y otra para el séptimo. Los compendios editados después ya estaban separados para los dos años, uno para el sexto y otro para el séptimo.

En la parte dedicada al sexto año encontramos un capítulo dedicado à la derivada, estructurado da siguiente forma:

Después de analizados los cuatro compendios de Álgebra, candidatos a libro único del 3º ciclo de la enseñanza secundaria, concluimos que nengún de los libros, más allá de este, presenta problemas de aplicación de las derivadas ahora designados de problemas de optimización, donde podemos concluir que es exactamente con este libro de texto que se asiste a la introducción de los problemas de optimización.

En este libro es clara la preocupación, por parte de los autores, en presentar una nota introductoria al concepto para una mejor comprensión del tema. Existe también el cuidado en introducir una nota histórica con el objetivo de permitir a los alumnos comprender cuales los matemáticos que han estudiado el tema así como las varias etapas por las que ha pasado el Cálculo Diferencial.

LOS PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN PRESENTES EN EL LIBRO ÚNICO

Los problemas de optimización se encuentran en el cuarto punto del libro de texto, dedicado a las aplicaciones de las derivadas. En este libro, los autores empiezan por explicar el sentido de la variación de una función, a partir de la señal de la derivada, y después presentan la aplicación de los teoremas enunciados y por fin dos ejemplos de aplicaciones concretas. Encontramos dos problemas de optimización enunciados como

"Ejemplos de aplicación concreta del sentido de la variación de una función", seguidos de la respectiva resolución. Existen después, al final del capítulo, mas siete problemas de optimización, en la parte dedicada a los ejercicios de aplicación, las respectivas respuestas surgen en el final del enunciado de todos los ejercicios.

Identificamos tres problemas de Geometría Métrica, dos de Aritmética y cuatro de Medida en Contexto Real. Los problemas están numerados de 1 a 9, teniendo en cuenta el orden por la cual surgen en el libro de texto.

Presentamos ahora la lista de los problemas de optimización encontrados.

Problemas de Geometría Métrica

1. *De entre los triángulos rectángulos cuya hipotenusa mide 6 cm, determinar los que tengan área máxima* (Silva y Paulo, 1958, 1960, 1963, 1968, p.230).

3. *Exprimir el área, A, de un rectángulo, como función de uno de los lados, x, suponiendo que el perímetro es igual a 20. Desenar la gráfica de la función en el intervalo [0, 10]. Determinar, gráficamente y analíticamente, el valor de x que torna el área máxima* (Silva y Paulo, 1958, 1960, 1963, 1968, p.236).

6. *Un rectángulo está inscrito en un semicírculo de rayo fijo, r. Exprimir el área, A, del rectángulo, como función de la base, x. Determinar el valor de x para el cual el área es máxima* (Silva y Paulo, 1958, 1960, 1963, 1968, p.236).

Problemas de Aritmética

4. *La suma de dos números x y y, es una constante a. Cuando es máximo su producto (P = x.y)?* (Silva y Paulo, 1958, 1960, 1963, 1968, p.236).

5. *El producto de dos números positivos, x y y, es una constante k. Cuando es mínima su suma (S = x + y)?* (Silva y Paulo, 1958, 1960, 1963, 1968, p.236)

Problemas de Medida en Contexto Real

2. *Se pretende construir una caldera cilíndrica, cerrada, con un dado volumen V, de manera que su área total sea mínima. Determinar el rayo de la base, r, y la altura, h, de la caldera en tales condiciones* (Silva y Paulo, 1958, 1960, 1963, 1968, p.231).

7. *Una caja rectangular, sin tapa, de capacidad v, fija, tiene la base cuadrada. Exprimir el área total de la caja como función del lado, x, de la base. Determinar el valor de x para la cual el área es mínima* (Silva y Paulo, 1958, 1960, 1963, 1968, p.236).

8. *En una hoja rectangular de zinc, con dimensiones de 30 cm por 40 cm, se han cortado, en los cuatro cantos, cuatro cuadrados iguales, doblando-se en seguida la hoja de forma a obtener una caja abierta en la parte superior. Determinar el volumen de la caja como función del lado del cuadrado que se ha cortado en cada* *canto. Cual debe ser la medida del lado del cuadrado para que la caja tenga volumen máximo?* (Silva y Paulo, 1963, 1968 p.253).

9. *Se pretende construir un gasómetro cilíndrico de volumen V. Determinar la relación que debe existir entre el rayo de la base y la altura para que el coste de la chapa metálica para la construcción de la superficie lateral y de la base sea mínimo. Suponga-se que se emplea chapa de la misma espesura y de la misma cualidad en toda a superficie* (Silva y Paulo, 1963, 1968, p.253).

Observemos ahora las características de los problemas. Para tal haremos un análisis de estos, basada en las cuatro fases del modelo de resolución de problemas propuesto por Polya. Según Polya para resolver un problema debemos seguir los pasos siguientes:

- **Paso 1:** *Comprensión del Problema:* Identificar la incógnita, los datos y la condicionante; Verificar si es posible satisfacer la condicionante, se esta es suficiente para determinar la incógnita; Trazar una figura.
- **Paso 2:** *Establecimiento de un plan:* Encontrar la conexión entre los datos y la incógnita y verificar si es necesario considerar problemas auxiliares.
- **Paso 3:** *Ejecución del plan:* Verificar cada paso, verificar si cada paso está correcto.
- **Paso 4:** *Verificacion/Reflexión:* Examinar la solución obtenida, verificar si ese resultado es posible.

Dice el autor que:

> Em primeiro lugar, temos de compreender o problema, temos de perceber claramente o que é necessário. Em segundo, temos de ver como os diversos elementos estão relacionados, como a incógnita se relaciona com os dados, para ter una ideia da resolução, para estabelecer um plano. Em terceiro lugar, executamos o nosso plano. Finalmente, em quarto lugar, olhamos para trás, fazemos una revisão da resolução completa examinando-a a e discutindo-a (Polya, 2003, p. 27).

De esta forma, en el análisis efectuado a cada uno de los problemas, tuvimos en cuenta los cuatro aspectos siguientes:

- Forma de Enunciado: Identificamos la forma en que el problema está enunciado
  - Proposición (PR): Problemas enunciados como una proposición
  - Ejemplo (EX): Problemas enunciados como ejemplos
  - Problema (PB): Problemas enunciados como problema
  - Aplicación (AP): Problemas enunciados como aplicación
  - Ejercicio (EXR): Problemas enunciados como ejercicio
- Tipo de problema: Identificamos el contexto en que este problema se encuadra
  - Geometría Plana (GP)
  - Geometría Espacial (GE)
  - Aritmética (AR)
  - Física (FI)
  - Astronomía (AS)
- Tipo de optimización: Identificamos lo que se pretende optimizar en el problema

  - Distancia (OD)
  - Área (OAR)
  - Volumen (OV)
  - Producto (OP)
  - Ángulo (OAN)
  - Razón (OR)
  - Tiempo (OT)
- Tipo de resolución: Identificamos cómo se resuelve el problema. Si se realiza una demostración, cuando problema se propone en forma de proposición, o se presenta la resolución en los casos restantes.
  - Demostración (DEM)
  - Resolución (RES)

Empecemos el análisis de las características de los problemas, repartidas por las cuatro fases del modelo de Polya.

Paso 1: Comprensión del problema:

Examinando las características que dicen respecto con la primera fase, verificamos que solo dos problemas presentan la respectiva resolución (1 y 2). Ningún de los enunciados se encuentra acompañado de gráficos, figuras o esquemas auxiliares, ni los problemas que presentan resolución.

Identificamos, esencialmente, problemas geométricos, tres problemas de geometría métrica (1, 3 y 6) y cuatro problemas de medida en contexto real (2, 7, 8 y 9). Los restantes tres problemas son problemas aritméticos.

Verifiquemos ahora que tipo de función se pretende optimizar. En los problemas geométricos, se pretende optimizar el área: En el problema 1 se optimiza el área de un triangulo rectángulo dada la medida de la hipotenusa, en el problema 3 se pretende optimizar el área de un rectángulo dada la medida del perímetro, en el problema 6 también se optimiza el área de un rectángulo, pero en este caso es un poco más complexo porque el rectángulo se encuentra inscrito en una circunferencia, de tal forma que será necesario determinar su longitud y su largura en función del rayo de la circunferencia; en el problema 6 se pretende determinar el área máxima de un sector circular, dado su perímetro. Los restantes problemas en que se pretende optimizar el área son de geometría espacial, siendo que en los problemas 2 y 9 se pretende optimizar el área de un cilindro dado su volumen y en el problema 7 se pretende optimizar el área de un paralelepípedo dado su volumen.

El problema 8 tiene como objetivo optimizar el volumen: se optimiza el volumen de una caja dadas las dimensiones da la hoja a utilizar para su construcción. Cuanto a los problemas aritméticos, verificamos que en el problema 4 se pretende optimizar el producto de dos números dada su suma y en el problema 5 se pretende optimizar la suma de dos números dado su producto.

Ningún problema tiene figuras o esquemas auxiliares. Cuanto a los datos fornecidos en el enunciado del problema, verificamos que la mayoría de los problemas presenta datos genéricos (2, 4, 5, 6, 7 y 9) y apenas tres problemas presentan datos numéricos (1,3 y 8).

También el enunciado es en la mayor parte de los problemas un enunciado simples, o sea, solo es colocada la cuestión de optimización y solo cuatro de los problemas encontrados presentan un enunciado que orienta/encamina en la resolución del problema (3, 6, 7 y 8).

Observamos que, en el problema 3, con base en esta forma de enunciar el problema, el alumno sabe que tendrá de empezar por determinar el área del rectángulo en función de uno de los lados y que después irá dibujar el gráfico de la función. Estas dos cuestiones son extremamente útiles una vez que, cuando se coloca la última parte de la cuestión, donde se pretende optimizar el área, el alumno ya tendrá casi todo el trabajo realizado.

Paso 2: Estabelecimiento de un plan

Pasando ahora a las características relativas a la segunda fase del modelo de Polya observamos que, en relación a la función auxiliar que permite relacionar las variables, esta en la mayor parte de los problemas, es una función que surge explícitamente, estando implícita solo en tres problemas (1, 6 y 8).

Comparando los problemas 3 y 8 verificamos que, en el problema 3, es fornecido el valor del perímetro y se pide para optimizar el área. Así, es sencillo para el alumno verificar que la función auxiliar será determinada a partir del valor del perímetro. En contrapartida, en el problema 8, para determinar el volumen, el alumno tendrá que determinar el longitud, la largura y la altura de la caja, una vez que solo es fornecida la medida de los lados de la hoja y el facto de ser retirados cuatro cuadrados de los cantos, el alumno tendrá de utilizar la noción de distancia para verificar que el longitud/largura de la caja será la diferencia entre el longitud/largura de la hoja y el longitud/largura de los dos cantos, y la altura de la caja será la medida del lado del cuadrado a retirar de los cantos.

Las nociones aplicadas en la resolución de los problemas son, para los problemas geométricos, la noción de distancia, el Teorema de Pitágoras y las fórmulas de cálculo del perímetro, del área y del volumen. La noción de distancia es utilizada en el problema 8, es fornecida la medida de los lados de una hoja rectangular y a partir de ahí tiene que se determinar la medida del longitud, de la largura y de la altura de la caja formada después de cortar cuatro cuadrados de los cantos con la misma medida. El Teorema de Pitágoras se aplica en la resolución de los problemas 1, 6 y 8: en el primer problema es dada la hipotenusa de un triangulo rectángulo y se pretende escribir la medida de uno de los catetos como función del otro cateto, en el segundo problema tiene de se determinar la base y la altura de un rectángulo inscrito en un semicírculo a partir del rayo y en el último se pretende determinar el rayo de la base y la altura de un cilindro inscrito en una esfera, dado el rayo de esta. En relación al problema en que se utiliza la fórmula de cálculo del perímetro (3), es dado el perímetro del rectángulo. Cuanto a los tres problemas en que se utiliza la fórmula de cálculo del volumen (2, 7 y 9), en el primer y en el último es dado el volumen de un cilindro para determinar la medida de la altura en función de la medida del rayo de la base, en el segundo es dado el volumen de una caja rectangular con la base cuadrada que tiene de ser utilizada para determinar la medida de la altura de la caja en función del lado de la base. Para los problemas aritméticos se utilizan las nociones de suma y de producto. En el problema 5 es dado el producto de dos números que será utilizado para determinar uno de los números como función del otro y en el problema 4 es dada la suma de dos números que será utilizada para determinar uno de los valores como función del otro.

Para delinear la estrategia de resolución de los problemas, verificamos que cinco problemas surgen por la primera vez en este período, dos ya habían surgido en obras históricas (3 y 4) y dos fueran retirados del enunciado de exámenes (1 y 2).

Paso 3: Ejecución del plan

Pasemos ahora a las características que se prenden con la tercera fase del modelo de Polya. Empezando por el tipo de funciones utilizadas para optimizar, hemos visto que solo surgen tres tipos de funciones. Na mayor parte de los problemas surge, para optimizar, una función polinomial, en tres problemas aparece una función racional (2, 7 y 9) y apenas en dos problemas una función irracional (1 y 6). En los problemas en que aparece una función racional, esta surge porque se ha utilizado la fórmula de cálculo del área o del volumen para determinar el valor de una variable como función da otra variable. Cuanto a los problemas en que se obtiene una función irracional, esta surge una vez que se ha aplicado el Teorema de Pitágoras para determinar el valor de una de las variables como función de la otra variable.

Cuanto al esquema utilizado para el cálculo de máximos y mínimos, en los problemas que presentan resolución, notamos que los autores empiezan por calcular la derivada de la función a optimizar, después calculan los ceros de la derivada y, al final, estudian la señal de la derivada, y concluyen de seguida si el punto es un máximo o un mínimo. Veamos la resolución del problema 2 presentada por los autores: (Ver Imagen)

Paso 4: Verificación/Reflexión

Para terminar, con relación a la fase de Verificación/Reflexión, observamos que el valor pedido es explícito en seis problemas (2, 3, 6, 7, 8 y 9), o sea, el autor indica claramente el valor que pretende. El valor pedido se encuentra implícito en los restantes tres problemas (1, 4 y 5), o sea, en estos el autor no indica explícitamente el valor que pretende.

En el problema 1 apenas se pide para determinar los triángulos que tengan área máxima, quedando implícito que lo que se pretende es la medida de los catetos, en cuanto que, en el problema 6 el autor pide explícitamente para se determinar el valor de x.

II. *Pretende-se construir uma caldeira cilíndrica, fechada, com um dado volume* V, *de modo que a sua área total seja mínima. Determinar o raio da base,* r, *e a altura,* h, *da caldeira em tais condições.*

A área e o volume da caldeira são, respectivamente:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h, \qquad V = \pi r^2 h.$$

Da segunda fórmula deduz-se $h = V/(\pi r^3)$, o que permite exprimir S como função *só* de r:

$$S = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

A derivada de S em *relação a* r será pois

$$S'_r = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2V}{r^2}$$

e o seu sinal é portanto o de $4\pi r^3 - 2V$. Como

$$4\pi r^3 - 2V = 4\pi\left(r^3 - \frac{V}{2\pi}\right),$$

será $S'_r > 0$, $S'_r < 0$ ou $S'_r = 0$, conforme for

$$r > \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}, \qquad r < \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \qquad \text{ou} \qquad r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}};$$

logo a função S de r é decrescente à esquerda e crescente à direita do ponto $r = \sqrt[3]{V/(2\pi)}$, sendo portanto *mínima* neste ponto. E como então se tem

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2r,$$

conclui-se que *a área total da caldeira é mínima quando a altura é igual ao diâmetro da base.*

CONCLUSIÓN

Con este trabajo concluimos que los programas oficiales de Matemática para la enseñanza secundaria de 1954, (Decreto nº 39807, del Diário de Governo nº 198 del 7 de Septiembre del 1954) y el libro único - Compêndio *de Álgebra para o 3º ciclo do ensino liceal*, de Sebastião e Silva y Silva Paulo – aprobado como libro único (D.G. nº 18, II Serie, del 22 de Enero del 1958), constituyen un marco en el estudio da las aplicaciones de las derivadas, una vez que es con estos que se asiste a la introducción del estudio de los problemas de optimización en la enseñanza secundaria, en Portugal. En verdad, y tal como ya habíamos referido anteriormente, en los otros compendios de Álgebra para el 3º ciclo de la enseñanza secundaria publicados en la misma época, no trataban de las aplicaciones de las derivadas, concretamente a partir de los problemas de optimización.

Importa todavía decir que en el *Compendio de Álgebra para o 3º ciclo do ensino liceal*, de Sebastião e Silva y Silva Paulo los problemas de optimización son caracterizados por problemas en que no aparece cualquier esquema, figura o gráfico como auxiliar de la interpretación del problema o para ayudar en la resolución. No aparecen problemas de Geometría Analítica, de Física o Economía y también no surgen problemas en que se pide, a los alumnos, para elaborar un relatório. La resolución se hace de una manera bastante explícita, identificando los extremos con base en la señal de la derivada.

De esta forma, podemos afirmar que Sebastião e Silva y Silva Paulo han sido pioneros en el abordaje de los problemas de optimización en los libros de texto, destacado a un tema que merece una atención especial en los libros de texto de la Enseñanza Secundaria.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aires, A. P. (2006) *O conceito de derivada no ensino secundário em Portugal ao longo do século XX: Una abordagem histórica através dos planos curriculares e manuais escolares.* Salamanca (Tese de doutoramento apresentada na Universidade de Salamanca).

Bisquera, R. (1989) *Métodos de investigación educativa*. Madrid: CEAC.

Carvalho, R. (2001) *História do ensino em Portugal*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

González Astudillo, M. T. (2002) *Sistemas Simbólicos de Representación en la Enseñanza del Análisis Matemático: Perspectiva Histórica.* Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.

Polya, G. (2003) *Como resolver problemas*. Lisboa: Gradiva. [Traducción del libro How to solve it: A New Aspect of Mathematical Method. Princeton University Press. (1973)].

Proença, M. C. (1998) *O Sistema de ensino em Portugal (Séculos XIX-XX)*. Lisboa: Edições Colibri.

Ruiz-Berrio, J. (1997) El método histórico en la investigación histórico-educativa. Em N. De Gabriel e A. Viñao (eds.) *La investigación histórico-educativa.* Barcelona: Ronsel.

Santiago, A. (2008) *Evolução histórica dos problemas de optimização e o seu tratamento no Ensino Secundário português nos séculos XX e XXI.* Salamanca (Tese de doutoramento apresentada na Universidade de Salamanca).

Schubring, G. (1987). On the Methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as Textbook Autor. *For the learning of mathematics* 7(3), 41-51.

Schubring, G. (1989). *Categorías para la investigación en la historia social de la enseñanza de la matemática y algunos modelos característicos*. Traduzido por A. Orellana e L. Rico.

Sierra, M (Coord.) (2003). *Evolución de la enseñanza del Análisis Matemático y del Álgebra: de los libros de texto a las nuevas tecnologías*. Salamanca: Dpto. Didáctica da Matemática y CE (Memoria Inédita).

Silva, J. S. y Paulo, S. (1958). *Compêndio de Álgebra, 6º e 7º Ano, 3ºCiclo -Ensino Liceal*, Livraria Rodrigues.

Silva, J. S. y Paulo, S. (1960). *Compêndio de Álgebra, 6º e 7º Ano, 3ºCiclo - Ensino Liceal*, Livraria Rodrigues.

Silva, J. S. y Paulo, S. (1963). *Compêndio de Álgebra, 6º e 7º Ano, 3ºCiclo - Ensino Liceal*, Lisboa: Bertrand (Irmãos).

Silva, J. S. y Paulo, S. (1968). *Compêndio de Álgebra, 6º e 7º Ano, 3ºCiclo - Ensino Liceal*, Braga: Livraria Cruz.