Épsilon *- Revista de Educación Matemática* ***2012, Vol. 29(3), nº 82, 79-87, ISSN: 1131-9321***

Demostración de teoremas con GeoGebra ¿Es posible?

Agustín Carrillo de Albornoz Torres
Universidad de Córdoba
Instituto GeoGebra de Andalucía

RESUMEN: *GeoGebra constituye un excelente recurso para fomentar el uso de unas matemáticas distintas en el aula, sobre todo en niveles educativos de ESO y Bachillerato, sin olvidar Educación Primaria para los se dispone de una versión específica. Además, el uso de este software se está generalizando o al menos es conocido por la mayoría del profesorado interesado en incorporar las TIC a su trabajo diario. Este trabajo ofrece algunos ejemplos de aplicación de GeoGebra, en este caso para intentar demostrar teoremas, de los que se ofrecen cuatro ejemplos para justificar que con ayuda de las herramientas que el programa ofrece a las que añadimos el dinamismo, podemos considerar que nos ha permitido demostrarlos.*
PALABRAS CLAVE: *GeoGebra, ESO, Bachillerato, Teoremas*

Geogebra theorem proving is that possible?

INTRODUCCIÓN

Al utilizar GeoGebra como recurso para la enseñanza de las matemáticas destacamos todas las posibilidades que ofrece, entre ellas el dinamismo que facilita la manipulación de los objetos que intervienen en una construcción, lo que hace que nuestro alumnado pueda investigar qué ocurrirá al cambiar los objetos de posición y por tanto, podrá deducir relaciones y propiedades.

Cuando entre las actividades proponemos que se verifique o no un determinado teorema siempre recordamos que con GeoGebra no podemos demostrarlo, solo comprobarlo. Es evidente que la demostración de cualquier teorema requiere de un proceso analítico en el que se obtenga la certificación de la propiedad o relación que se desea demostrar.

No es menos cierto que en determinados niveles educativos, como puede ser el caso de Educación Secundaria o Bachillerato no es necesario el rigor que requiere una demostración y en ocasiones no es posible, ya requiere el uso de propiedades o relaciones que escapan del currículum de estos niveles educativos.

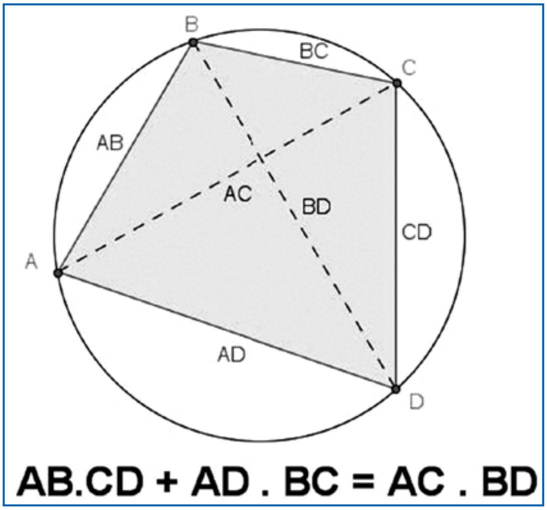
Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, sobre el rigor que requiere una demostración y las dificultades que podemos encontrar en estos niveles educativos, podemos alcanzar una posición intermedia en la que aprovechando las posibilidades que ofrece GeoGebra y las herramientas que está incorporando, sea posible estudiar determinados teoremas e incluso sea posible considerar que ha quedado demostrado atendiendo a la información facilitada por el programa.

Veamos algunos ejemplos en los que a partir de una construcción sea posible determinar que se cumple un teorema y en la que al manipular los objetos independientes, moviéndolos por todo el plano, nos permita afirmar que el teorema es cierto.

Comencemos con un teorema que requiere la comprobación de una relación numérica entre algunos elementos, como es el caso del teorema de Ptolomeo.

TEOREMA DE PTOLOMEO

Si un cuadrilátero está inscrito en una circunferencia, la suma de los productos de los pares de lados opuestos es igual al producto de las diagonales.



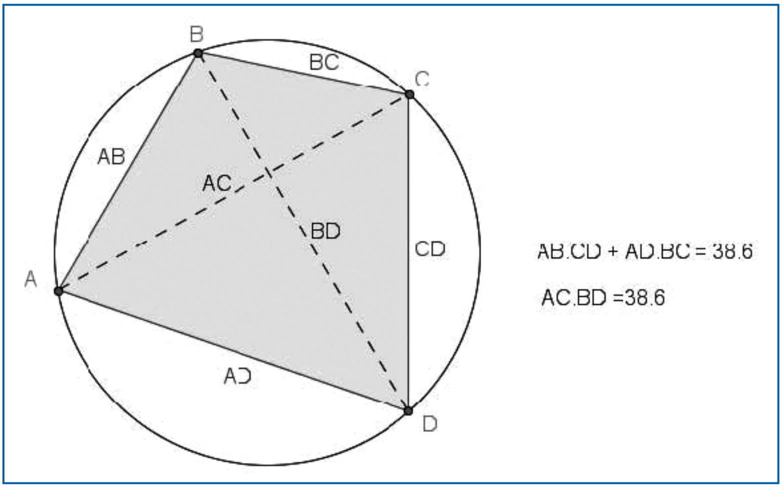
El primer paso que debemos realizar con GeoGebra será realizar la construcción de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia, dibujando a continuación las diagonales, tal y como aparece en la imagen anterior.

A continuación, dado que la medida de los lados y de las diagonales aparece directamente al construirlos, solo nos quedará obtener el valor de las dos expresiones que deseamos comprobar que son iguales.

Por un lado, calculamos el valor de AB·CD+AD·BC, para lo que bastará con introducir esta expresión en la línea de entrada (o los nombres de los correspondientes segmentos, si no hemos procedido a renombrarlos) para obtener su valor.

De manera análoga obtendremos el valor del producto de las dos expresiones, escribiendo AC·BD en la línea de entrada.

Observamos que los dos valores coinciden tal y como aparece en la imagen siguiente:



Como último paso, para poder considerar que hemos demostrado el teorema bastará con manipular la construcción moviendo los objetos para considerar que la igualdad entre las dos expresiones se cumple.

Podemos pensar que los dos valores anteriores corresponden a una aproximación con tantos decimales como se hayan indicado a través de la opción **Redondeo** del menú **Opciones**, por lo que solo nos quedaría obtener el valor de la diferencia entre las dos cantidades para comprobar que siempre se mantiene igual a 0.

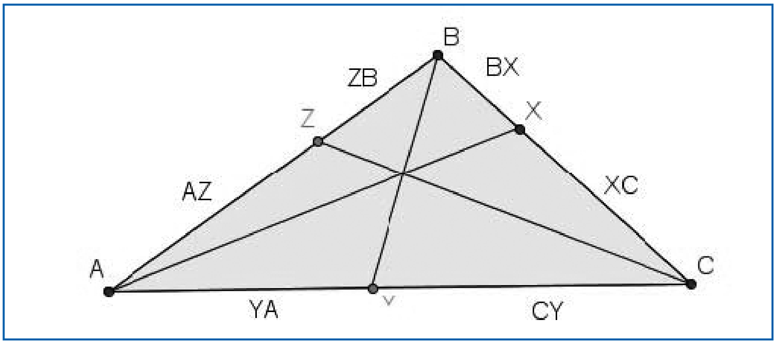
Un proceso similar servirá para considerar demostrado, aunque de manera gráfica el siguiente teorema, ya que se trata de comprobar una relación entre los valores de unas determinadas medidas obtenidas a partir de un triángulo.

TEOREMA DE CEVA

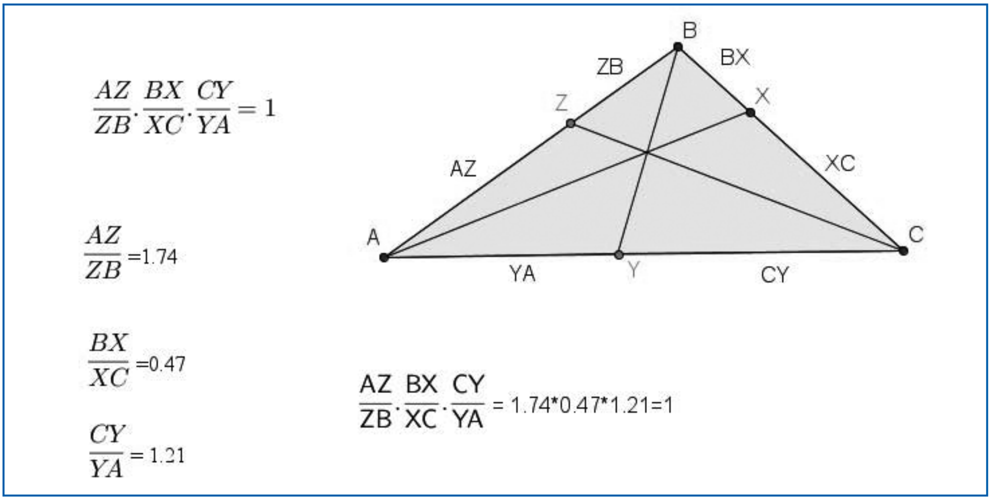
Si AX, BY y CZ son tres cevianas concurrentes de un triángulo ABC, entonces $\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=1$.

Recordemos que una ceviana es el segmento que une un vértice de un triángulo con un punto del lado opuesto.

Al igual que en ejemplo anterior, comenzaremos dibujando los objetos necesarios; en este caso, un triángulo y dos cevianas. A continuación construimos la tercera ceviana con la condición establecida en el enunciado, que las tres sean concurrentes. Para ello, bastará encontrar el punto de corte en el lado de la recta que pasa por el vértice opuesto y por el punto de intersección de las dos cevianas dibujadas previamente.



Ya solo queda obtener los valores de las dos expresiones que deseamos comprobar, utilizando para ello las opciones de cálculo que nos ofrece la línea de entrada.



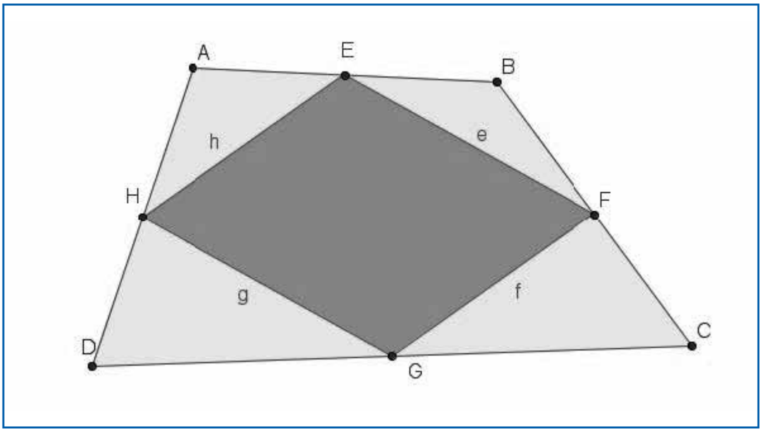
Y por último, para determinar que se cumple la igualdad, nos queda manipular la construcción.

Pasemos a un nuevo teorema que además de una comprobación numérica requiere que determinemos la relación existente entre unos elementos para deducir una cierta propiedad como ocurre en el siguiente teorema que es habitual en las actividades que habitualmente se realizan con GeoGebra, sobre todo en los cursos de formación para el profesorado.

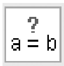
TEOREMA DE VARIGNON

Los puntos medios de un cuadrilátero determinan un paralelogramo cuya área es la mitad del área del cuadrilátero.

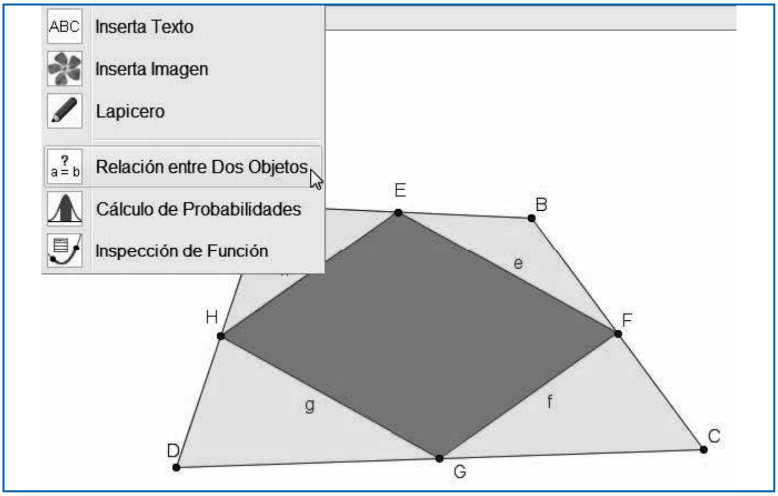
Una vez dibujado el cuadrilátero ABCD, dibujamos un nuevo polígono EFGH, uniendo los puntos medios de cada uno de los lados.



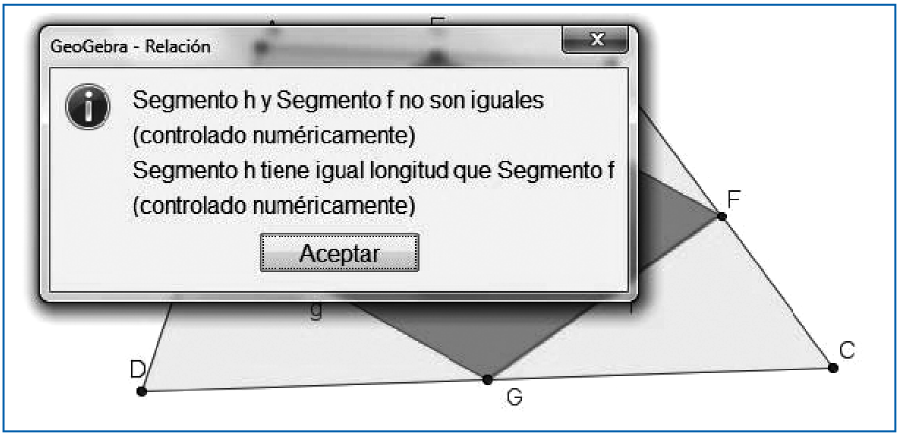
A continuación, tenemos que determinar la relación entre los lados h y f así como entre e y g, para deducir que se trata de un paralelogramo.

Para ello, utilizaremos la herramienta 

Relación entre dos objetos.

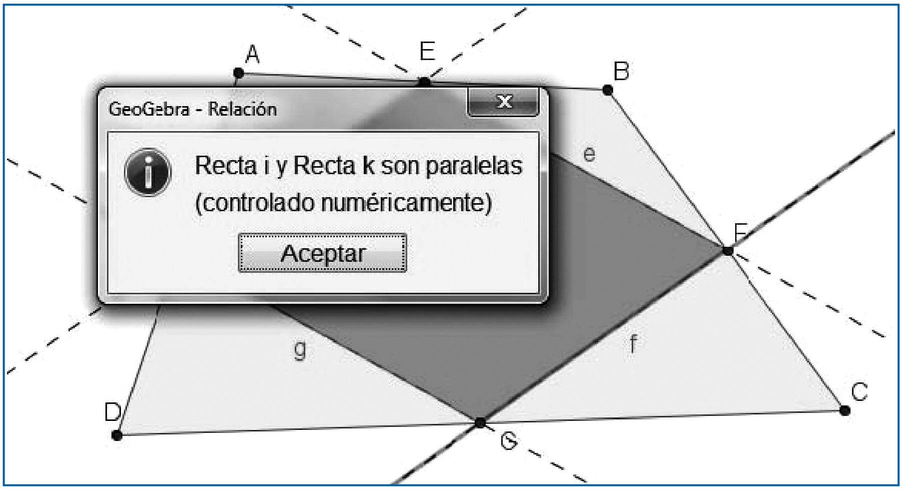


Una vez seleccionada esta herramienta marcamos los segmentos h y f, obteniendo que son segmentos distintos, lo cual es evidente pero que son del mismo tamaño, como podemos observar en la imagen siguiente:



La misma relación obtendremos entre los segmentos e y g.

Por tanto, solo nos queda determinar que los lados son paralelos para comprobar que se trata de un paralelogramo. Para ello, es necesario dibujar las rectas que contienen a cada uno de los lados de manera que con la ayuda de la herramienta **Relación entre dos objetos** preguntamos sobre las dos rectas, obteniendo el siguiente resultado:

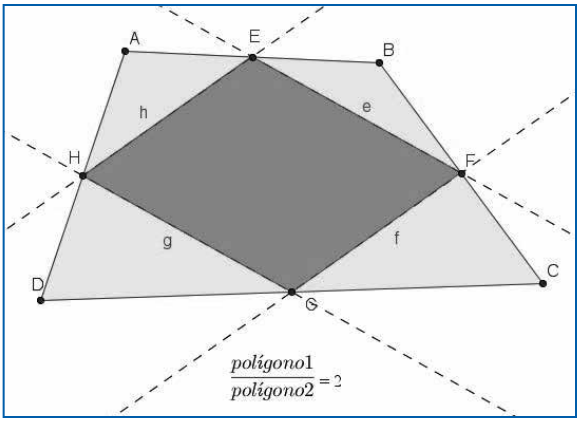


El mismo resultado nos dará el programa al preguntar por las otras dos rectas, por lo que al menos para este cuadrilátero podemos establecer que el polígono obtenido uniendo los puntos medios es un paralelogramo.

¿Y para otros casos? Solo hay que mover para comprobar que las relaciones se mantienen.

Por último, para establecer la relación entre las áreas bastará con calcular el valor del cociente entre las dos áreas, cuyos valores aparecen directamente en la vista algebraica y que en este caso serán polígono1 y polígono2.

Como el cociente es 2, podemos establecer que una es doble de la otra.



Por tanto, creo que podemos considerar demostrado o al menos decir que siempre se cumple el teorema de Varignon.

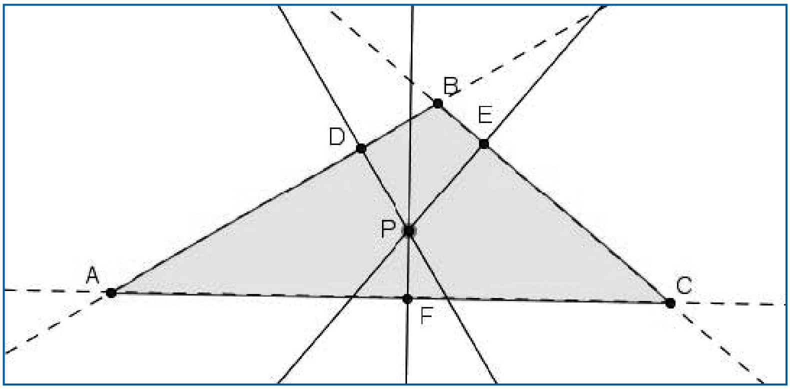
Veamos un teorema más relacionado con la recta de Simpson.

RECTA DE SIMPSON

Los pies de las perpendiculares desde un punto P a los lados de un triángulo están alineados si y solo si P pertenece a la circunferencia circunscrita al triángulo.

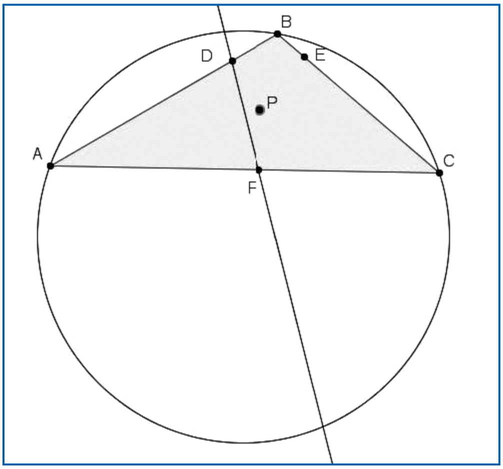
En este caso, la recta en la que se encuentran los tres puntos es la recta de Simpson.

Comenzaremos dibujando el triángulo ABC y un punto cualquiera P, obteniendo a continuación los pies de las perpendiculares desde este punto a los lados del triángulo, que llamamos D, E y F, tal y como muestra la siguiente figura:



Es evidente que los puntos no están alineados.

Para comprobar el teorema, dibujamos la circunferencia circunscrita utilizando la herramienta  **Circunferencia dados tres de sus puntos**. También, dibujamos la recta que pasa por dos de los pies de las perpendiculares, en este caso la recta que pasa por los puntos D y F.



Solo nos queda recurrir a las herramientas adecuadas que nos ofrece GeoGebra para comprobar que cuando P está sobre la circunferencia circunscrita, entonces el tercer punto E pertenece a la recta DF y por tanto E, D y F están alineados.

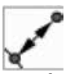
En un primer intento podemos acercar P a la circunferencia circunscrita de manera que visualmente comprobaremos que se dará la condición pedida, pero nos interesa aprovechar las opciones de GeoGebra para que nos ratifique esta relación.

Para ello, ya conocemos la herramienta **Relación entre dos objetos** que nos podrá decir, en este caso si E pertenece o no a la recta DF.

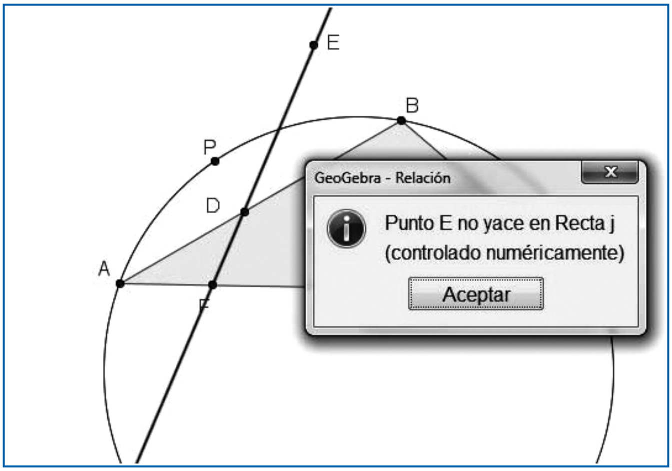
Si acercamos el punto P hasta situarlo sobre la circunferencia circunscrita y preguntamos la relación entre E y la recta, el resultado no es el esperado. (Ver figura página siguiente).

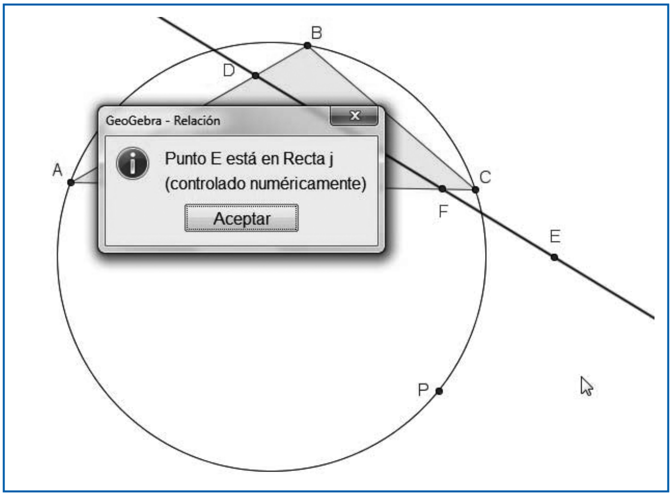
Es evidente, ya que P está sobre la circunferencia pero no pertenece a ella y por mucha precisión que tengamos, para el programa es imposible determinar una propiedad entre objetos que no están relacionados.

Acudimos a una nueva herramienta, en este caso la que nos permite redefinir un punto, de manera que podamos establecer que P no es un punto libre y si un punto de la circunferencia.

Esta herramienta es  **Adosa/Libera punto**, con la que al pulsar primero sobre P y después sobre la circunferencia hará que P deje de ser un objeto libre y esté creado sobre la circunferencia.

Si ahora volvemos a preguntar la relación entre el punto E y la recta DF el resultado será el que aparece en la imagen siguiente:





Por tanto, cuando P pertenece a la circunferencia circunscrita, los puntos E, D y F están alineados, con lo que podemos considerar, una vez que variemos las posiciones de todos los objetos que la relación se cumple.

Es evidente que de manera analítica no se ha demostrado ninguno de los teoremas anteriores, pero no es menos cierto que las posibilidades y las herramientas que hemos utilizado, a las que añadimos el dinamismo de GeoGebra, nos permiten decir que los teoremas se cumplen, por lo que podemos considerar que los hemos demostrado al menos de manera gráfica.