

## LA HERRAMIENTA ARRASTRE EN FUNCIONES USANDO GEOGEBRA

### THE DRAG TOOL IN FUNCTIONS USING GEOGEBRA

Silva Muslera, A.<sup>1</sup>, De La Torre Fernández, E.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universidad Autónoma de Querétaro, México

<sup>2</sup>Universidade da Coruña

**Resumen.** *Este documento presenta algunos resultados del trabajo realizado con estudiantes de primer año universitario a los que se les pidió que resolvieran problemas abiertos de cálculo usando GeoGebra. Encontramos en el uso de GeoGebra que el arrastre en el trabajo con funciones, es una herramienta útil para los estudiantes a la hora de resolver problemas. Usando el enfoque instrumental hemos identificado algunas herramientas de arrastre, usadas en funciones que son fundamentales para la solución de problemas de cálculo. Presentamos dos casos que ilustran una clasificación de la herramienta arrastre al trabajar con funciones.*

**Palabras clave:** geometría dinámica, enfoque instrumental, modos de arrastre, GeoGebra.

**Abstract.** *This paper present some results of the task developed with first year university students using GeoGebra to solve open problems of calculus. Observing the students work with GeoGebra, we found out that they use the drag tool with mathematical functions as a useful resource to solve that kind of problems. From the instrumental approach we have identified different drag ways used by students when they manage functions. This is an essential way for solving calculus problems. We present two cases that illustrate different ways of using the drag tool to work with functions.*

**Keywords:** dynamic geometry, instrumental approach, drag tool, GeoGebra.

## INTRODUCCIÓN

En este documento presentamos algunos resultados de la integración de software de geometría dinámica (SGD) en la solución de problemas de cálculo por estudiantes de primer año universitario. En geometría dinámica, el arrastre es un elemento fundamental, permite pasar de una geometría estática, en la cual los objetos sobre los que se trabaja son configuraciones particulares, a una geometría dinámica en la cual las construcciones conservan sus propiedades geométricas durante el movimiento. En este trabajo usamos el SGD GeoGebra.

Desde el enfoque instrumental (Verillon y Rabadel 1995; Guin y Trouche 2002; Trouche 2005) identificamos el arrastre como una herramienta.

El objetivo de este documento es mostrar que los estudiantes usan la herramienta arrastre como un medio de resolución de un problema abierto de cálculo donde se involucra el concepto de recta tangente a una función.

## MARCO TEÓRICO

El marco teórico de nuestra investigación está basado en el enfoque instrumental. La primera idea es la distinción entre un artefacto y lo que se llama instrumento. Desde la ergonomía cognitiva, Verillon y Rabadel (1995) señalan la diferencia entre un artefacto, un objeto dado y un instrumento como un constructo psicológico: el instrumento no existe en sí mismo, el artefacto se hace instrumento cuando el sujeto ha sido capaz de apropiarse de él y lo ha integrado en su actividad.

El artefacto se hace un instrumento para un individuo a través de una génesis progresiva, llamada *génesis instrumental*. Trouche (2004) señala que es un proceso complejo, vinculado a las características de los artefactos (sus potencialidades y restricciones) y a la actividad del sujeto, a sus conocimientos y métodos de trabajo.

La génesis instrumental puede ser vista como la combinación de dos procesos. Un proceso de instrumentalización, orientado hacia el artefacto y un proceso de instrumentación, orientado hacia el sujeto.

A través del proceso de instrumentalización el usuario puede modificar el artefacto y éste se convierte en un medio para lograr un objetivo, resolver un problema, completar una tarea (da sentido a una situación de actividad, por lo que tiene que ser transformado en un instrumento). Esta transformación del artefacto está intrínsecamente vinculada a la transformación del usuario, a través del proceso de instrumentación el usuario desarrolla los esquemas de utilización y las técnicas mediante las cuales el artefacto puede ser implementado en la acción propuesta. Trouche (2004) señala que: *“la instrumentación es precisamente el proceso por el cual el artefacto imprime su marca en el sujeto, permite desarrollar una actividad dentro de algunas fronteras (las restricciones del artefacto)”*.

Las restricciones son vinculadas a la transposición informática, descrita por Balachef (en Trouche 2004) como el trabajo necesario en los conocimientos para permitir una representación simbólica. Para analizar esta transposición, Guin y Trouche (2002) distinguen tres tipos de restricciones: restricciones internas, vinculadas al hardware; restricciones de comando, vinculadas a la existencia y a la forma de los comandos y restricciones de organización, vinculadas a la organización de la interfaz ente el artefacto y el usuario.

En un entorno de SGD las restricciones de organización favorecen el estudio gráfico de funciones, elemento importante de nuestro estudio. En el trabajo con funciones los estudiantes, como primera acción, obtienen la gráfica de la función y, en algunos casos, infieren respuestas desde esta representación gráfica. En otros casos la gráfica de la función no les permite hacer inferencias y los conduce a usar las potencialidades del SGD, es aquí donde surge el *modo de arrastre* como una forma de hacer las inferencias. Lo que es particular al SGD es que cuando los elementos de una construcción se

arrastran, todas las propiedades geométricas empleadas en la construcción de la figura se conservan.

Diversos autores se han interesado en los usos del arrastre cuando los estudiantes están resolviendo problemas de geometría con un SGD (Olivero 1999; Arzarello et al.2002; Gutiérrez Rodríguez 2005; Iranzo y Fortuny 2008; Restepo 2009; Baccaglioni-Frank y Mariotti 2010). Como resultado de este interés han establecido clasificaciones de los diferentes modos de arrastre. La clasificación de Olivero (1999) y Arzarello et al. (2002), desde una perspectiva cognitiva, distingue siete modalidades de arrastre, que consideran fundamentales para que los estudiantes pasen de las conjeturas a las pruebas. Gutiérrez Rodríguez (2005) considera útiles sólo tres tipos de arrastre para analizar la actividad de los estudiantes. Restepo (2009), apoyándose en la teoría instrumental, propone una nueva clasificación de los *instrumentos de arrastre*, definiéndolos desde las características y las restricciones del artefacto y desde la finalidad matemática que se busca alcanzar con ellos. Estos estudios convergen en el hecho de que la apropiación del arrastre es un proceso largo y complejo, que debe ser acompañada por el profesor.

En nuestra investigación, para la clasificación de la herramienta de arrastre consideramos las características de los artefactos (sus potencialidades y restricciones) y la actividad del sujeto, sus conocimientos y métodos de trabajo. Así, hemos identificado las siguientes herramientas de arrastre:

*Arrastre errático de la Zona Gráfica:* el arrastre se hace sin un plan específico, de forma aleatoria, con la finalidad de modificar la Zona Gráfica pero sin que importe cómo es esa modificación.

*Arrastre guiado de la Zona Gráfica:* el arrastre se utiliza para dar a la Zona Gráfica una forma particular.

*Arrastre errático:* el arrastre se hace sin un plan específico, de forma aleatoria, con la finalidad de modificar el objeto pero sin que importe cómo es esa modificación.

*Arrastre guiado:* el arrastre se usa para dar al objeto una forma particular.

*Arrastre vinculado:* vincular uno o varios objetos y moverlos.

*Arrastre para validar/invalidar:* mover el objeto para validar algunas propiedades.

## CONTEXTO Y METODOLOGÍA

Trabajamos con los estudiantes del primer año de la licenciatura de Química de la Facultad de Ciencias de la Universidad de A Coruña. Participaron en el estudio 28 estudiantes, sus edades varían entre los 17 y los 20 años y todos son estudiantes que por primera vez están en este curso. Se destinó una clase semanal de 50 minutos a la resolución de ejercicios, en un aula con 16 ordenadores. Algunos estudiantes trabajaban en forma individual y otros lo hacían en parejas.

Los ejercicios usados en la investigación son parte integral del curso y se seleccionaron previo acuerdo con el profesor.

Empleamos el software GeoGebra, creado bajo el amparo de licencia GLP. Hohenwarter y Jones (2007) señalan que proporciona una conexión cercana entre la manipulación simbólica y las capacidades de visualización de un sistema de álgebra computacional (CAS) y la variabilidad dinámica de un SGD.

Realizamos una investigación cualitativa de corte interpretativa. Eisenhart (1988) afirma que el propósito de hacer investigación interpretativa es el de proporcionar información que permitirá al investigador ver la "manera de hacer" del mundo desde la perspectiva de los participantes, se trata de interpretar el significado de las acciones desde el punto de vista de los estudiantes.

El propósito de hacer una investigación cualitativa interpretativa es que es principalmente dentro de esta tradición donde se desarrollan y tienen sentido los métodos etnográficos. La etnografía permite una reflexión constante y profunda sobre la realidad, asignando significaciones a lo que se ve, se oye y se hace, desarrollando aproximaciones hipotéticas, redefiniendo continuamente, hasta llegar a construir e interpretar esa realidad sin anteponer el sistema de valores del investigador, lo cual conduce a la reconstrucción teórica.

Usamos la observación participante como una estrategia de obtención de información. Según Goetz y LeCompte (1988) "La observación participante sirve para obtener de los individuos sus definiciones de la realidad y los constructos que organiza su mundo". El investigador debe pasar el mayor tiempo posible con los estudiantes y observar lo que hacen en las sesiones.

Los datos obtenidos son video-grabaciones de la pantalla de los ordenadores de los estudiantes, durante las sesiones de trabajo. Se transforman en descripciones para un mejor manejo de datos. A estas descripciones se le suman las anotaciones y diálogos que el investigador obtiene durante cada una de las sesiones. Rodríguez Romero (1992) señala que los documentos permiten acceder a un campo de información "natural", en el sentido de no mediatizada por procedimientos de recogida de datos más intrusivos, que utilizan estrategias interactivas de obtención de información.

## ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Para el análisis usaremos el trabajo realizado en dos ordenadores. En el primer ordenador trabajan Luis y Cynthia y en el segundo Alberto. Los elegimos porque usan GeoGebra y la herramienta arrastre como medio de resolución del problema propuesto, sus trabajos en papel y lápiz no son significativos. Además, en ellos se identifica claramente la clasificación de la herramienta arrastre que hemos propuesto antes.

El problema que los estudiantes resuelven es:

*Encontrar la ecuación de una tangente a la curva  $f(x) = 3x^3 + 14x^2 + 3x + 8$  que pasa por el origen de coordenadas.*

### Luis y Cynthia (LC)

| Descripción de video  | Análisis  |
|---|---|
| Inician obteniendo la gráfica de la función, en la Zona Gráfica no se ve la gráfica.  | Se dan cuenta de que la gráfica de la función no aparece en pantalla. |
| Con el ratón generan el punto A=(0,0) y obtienen $f'(x) = 9x^2 + 28x + 3$ , que aparece en la Ventana de álgebra y en la Zona Gráfica | La gráfica de $f'(x)$ si se aprecia en pantalla.                      |

## La herramienta arrastre en funciones usando geogebra

|   |  |
|---|--|
| <p>se ve la gráfica y su rótulo.</p> <p>Ocultan la gráfica de <math>f'(x)</math> y rescriben, por medio del comando 'Función', la expresión de <math>f(x)</math>. Borran y la rescriben varias veces, sin que se vea en la Zona Gráfica la gráfica.</p> <p>Usan el comando 'Tangente' y no tienen claro los argumentos que usa, lleva a una sucesión de Ventanas de error.</p> <p>Generan un punto A sobre la gráfica de <math>f'(x)</math> y lo deslizan varias veces sobre la función.</p> <p>Usan comando 'Tangente' y generan la recta <math>y=3x+8</math>, que es una recta tangente a la función <math>f(x)</math> en <math>x=0</math>.</p> | <p>Centran su atención en la gráfica de <math>f(x)</math> que no se ve en pantalla.</p> <p>Error al escribir los argumentos del Comando. Restricciones de Comando.</p> <p>Arrastre del punto A sobre <math>f'(x)</math>.</p> <p>Pretenden que esta sea la recta que de solución al problema propuesto.</p> |
|---|--|

En el análisis anterior vemos que los alumnos tienen errores al escribir los argumentos que usa el Comando 'Tangente', los hemos identificado como *restricciones de comando*, Guin y Trouche (2002). Las ventanas de error que generan GeoGebra dan información acerca de la sintaxis de los comandos, sin embargo, los estudiantes las cierran sin leer estas informaciones.

El arrastre del punto A sobre  $f'(x)$  lo identificamos como un *arrastre vinculado* debido a que el punto A se desliza sólo sobre la función  $f'(x)$ . También lo identificamos como un *arrastre errático* porque el deslizamiento es aleatorio y no es usado para buscar la solución del problema propuesto. Sin embargo, lo podemos identificar como un *arrastre para validar/invalidar* ya que lo usan para comprobar que la gráfica es la de  $f'(x)$ . Consideramos que este arrastre es consecuencia de la búsqueda de la gráfica de la función y es una acción que no es necesaria pero que los estudiantes la llevan a cabo para ver si encuentran la gráfica, Artigue (1997) lo llama *comportamiento de pesca*.

Llaman a la Observadora (Ob) y mantienen el siguiente dialogo:

| Dialogo   | Análisis                             |
|---|--------------------------------------|
| LC: Borramos todo y lo hemos escrito de nuevo y no se ve. Está mal este programa.               | Suponen que el software tiene error. |
| LC: No sabemos que hacer!   |                                      |
| La Ob maneja el ratón, va a la Barra de herramientas, señala el modo Desplazar la Zona Gráfica. | Se hace evidente el arrastre.        |
| LC: Si está la gráfica!!  | Ven la gráfica.                      |

En este dialogo se hace evidente que para LC la herramienta arrastre era desconocida, fue necesario que la Ob les indicara la posibilidad de usarla.

| Descripción de video  | Análisis  |
|---|---|
| <p>Deslizan la Zona Gráfica de forma que ahora en la pantalla se pueden ver las funciones, la recta y el punto. Accionar el segundo modo del arrastre de la Zona Gráfica que permite cambiar de escala los ejes coordenados.</p> <p>Crean el punto B=(0,8) usando el Comando 'Punto' y la función f(x), usan el Comando 'Tangente' con B y f(x). Deslizan el punto B sobre la función f(x) hasta que en la pantalla se ve que la recta pasa por el origen de coordenadas.</p> | <p>Arrastre de la Zona Gráfica.</p> <p>Arrastre del punto B sobre f(x).</p> |

El arrastre de la Zona Gráfica lo hemos identificado como *arrastre guiado de la Zona Gráfica* debido a que el deslizamiento permite ver la construcción de las funciones. También es identificado como *arrastre para validar/invalidar* porque los estudiantes lo usan para verificar las gráficas de las funciones.

El arrastre del punto B lo hemos identificado como *arrastre vinculado*, porque el punto sólo se desliza en la función f(x). También lo identificamos como *arrastre guiado* porque los estudiantes pretenden que la recta pase por el origen de coordenadas y de esa forma se identifica también como *arrastre para validar/invalidar* ya que se usa para encontrar la solución al problema propuesto (ver Figura 1). Ellos usan una estrategia visual de resolución que los puede conducir a la solución del problema.

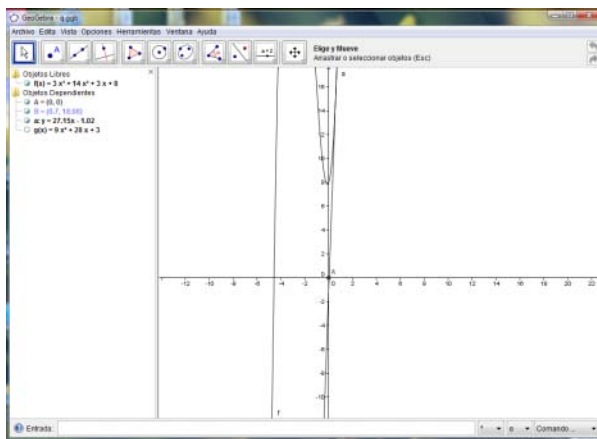


Figura 1. Trabajo final de LC. En la Zona Gráfica se aprecia que la recta pasa por el origen, sin embargo en la Ventana de álgebra no lo comprueba.

**Alberto (AL)**

| Descripción de video  | Análisis   |
|---|--|
| <p>Inicia obteniendo la gráfica de <math>f(x)</math>. Al no aparecer la gráfica de la función en pantalla va a la Zona Gráfica y la desliza usando el ratón, hasta que se ve la gráfica.</p> <p>Usa el Comando ‘Tangente’ y no tienen claro cuáles son los argumentos, por lo que genera una sucesión de Ventanas de Error.</p> <p>Con el ratón genera el punto <math>A=(0,8)</math> y lo desliza hasta el origen de coordenadas <math>A=(0,0)</math>. Este punto queda vinculado a la función por lo que es deslizada también. Repite varias veces este deslizamiento.</p> <p>Genera una recta con el Comando ‘Tangente’, usando el punto A y x. Desliza el punto A, la recta no se desliza, sólo lo hacen el punto y <math>f(x)</math>. Al ver esto borra la recta y desliza varias veces el punto y <math>f(x)</math>. Repite estas operaciones varias veces</p> | <p>Arrastre de la Zona Gráfica.</p> <p>Error al escribir los argumentos del Comando. Restricciones de Comando.</p> <p>Arrastre del punto A.</p> <p>Arrastre de <math>f(x)</math>.</p> <p>Arrastre del punto A.</p> <p>Arrastre de <math>f(x)</math>.</p> |

En el análisis anterior hemos identificado que el arrastre de la Zona Gráfica lo identificamos como *arrastre guiado de la Zona Gráfica* ya que el estudiante lo usa para ver en la pantalla la gráfica de la función.

Los errores al escribir los argumentos que usa el Comando ‘Tangente’ los hemos identificado como *restricciones de comando*, Guin y Trouche (2002). Las ventanas de error que se generan en GeoGebra dan información acerca de la sintaxis, sin embargo, este estudiante no las revisa originando que se repitan varias veces.

El arrastre del punto A y de la función  $f(x)$  los hemos identificados como *arrastre vinculado* porque el punto fue construido sobre la función  $f(x)$ . En algunos momentos los deslizamientos del punto A son identificados como *arrastres guiados*, por ejemplo cuando el punto se desliza hasta el origen de coordenadas y en otros momentos son identificados como *arrastres erráticos* porque se desliza de forma aleatoria. En el caso de la función  $f(x)$  los deslizamientos siempre los consideramos como *arrastres erráticos* porque la función no tiene motivo porque ser deslizada.

El maestro tutor (Mt) observa lo que aparece en la pantalla del alumno AL y llama la atención al observador (Ob), manteniendo entre los tres el siguiente diálogo:

| Dialogo  | Análisis  |
|--|---|
| <p>AL: La gráfica se mueve [se refiere a la gráfica de la función <math>f(x)</math>, la está trasladando]</p> <p>Mt: Eso no es posible, ¿qué es lo que pasa?</p> <p>Ob: Es verdad, si se puede mover la gráfica, pero al hacerlo debes observar [la indicación es para AL] que la función ya no es la misma [señala la expresión algebraica de <math>f(x)</math> en la Ventana de álgebra]</p> <p>Mt: Por supuesto! Nos interesa la función del ejercicio.</p> <p>El Mt abre la Ventana Redefine de <math>f(x)</math> y AL escribe la función propuesta en el ejercicio.</p> <p>AL va a la Zona Gráfica y arrastra la función <math>f(x)</math>, buscando que la recta pase por el origen, haciendo que la función <math>f(x)</math> y la ecuación de la recta sean trasladadas nuevamente.</p> <p>AL: A él también le pasa!! [se refiere a sus compañeros del ordenador de al lado]</p> | <p>Para el Ob y el Mt este arrastre no tenía posibilidad de ocurrir.</p> <p>Con esta acción, el Mt le señala al estudiante que debe trabajar con la función del problema propuesto.</p> <p>El estudiante insiste en trasladar la función <math>f(x)</math>.</p> <p>Justifica la traslación de la función <math>f(x)</math>.</p> |

En el dialogo anterior encontramos que la Ob y el Mt se sorprendieron al notar que el estudiante trasladaba la función, para ellos no era evidente este arrastre. Sin embargo, el estudiante lo usa pretendiendo así encontrar la solución al problema propuesto y justifica su uso porque otros estudiantes lo están usando.

En la Figura 2 mostramos el trabajo final de AL, donde se observa que el persistió en su intento de resolver el problema planteado arrastrando la función, ignorando la ventana algebraica. La estrategia visual de resolución, en este caso, no lo va a conducir a la solución del problema.



## La herramienta arrastre en funciones usando geogebra

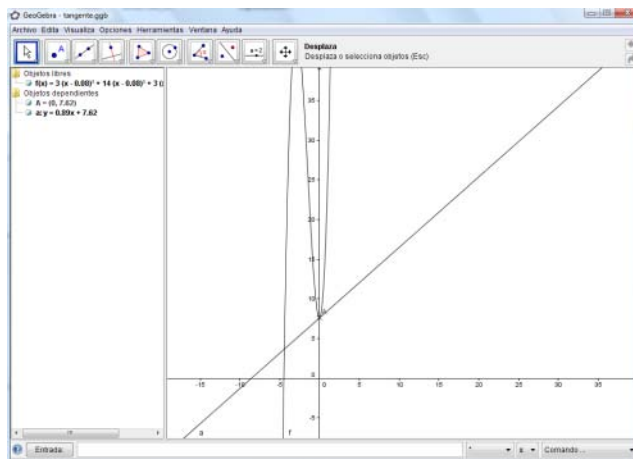


Figura 2. Trabajo final de AL.

### CONCLUSIONES

De acuerdo a nuestro análisis, una vez que la herramienta arrastre es identificada por los estudiantes la usan como un único medio para la resolución del problema. Los estudiantes buscan la solución al problema propuesto de forma empírica y la gestión del profesor es importante para alentar a los estudiantes a ir más allá de la percepción y la verificación empírica en contextos de SGD, Fortuny et al. (2010).

Hemos observado que el uso de la herramienta arrastre influye en la estrategia de resolución del problema. Los estudiantes han utilizado estrategias visuales para lograr obtener que la recta tangente pase por el origen. Originando que el uso de las diversas herramientas arrastre se combinen, en algunos casos y en otros se complementen.

La apropiación del arrastre no es ni evidente ni inmediata para los estudiantes, como se señala en el dialogo con LC, ni para los profesores, como se señala en el dialogo con AL. Es un proceso largo y complejo. Aún así, es posible identificar esquemas de uso (Restrepo 2009; Baccaglini-Frank y Mariotti 2010), que permitan transformar la herramienta en un instrumento.

Es necesario llevar a cabo una investigación más exhaustiva para entender el proceso de apropiación del arrastre y analizar la posible génesis instrumental.

### Referencias

- Artigue, M. (1997). Le logiciel DERIVE comme révélateur de phénomènes didactiques liés à l'utilisation d'environnements informatiques pour l'apprentissage. *Educational Studies in Mathematics* 33(2), pp. 133-169.
- Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D. y Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik*, 34 (3), pp. 66-72.
- Baccaglini-Frank, A y Mariotti, M.A. (2010). Generating conjectures in Dynamic Geometry: the maintaining dragging model. *Int. J. Comp. Math. Learning*, vol. 15, pp. 225-253.

- De la Torre Fernández, E. y Silva Muslera, A. (2009). Conceptualization of derivate using GeoGebra. *GeoGebra Conference 2009*. Hagenberg, Austria.
- Eisenhart, M. (1988). The ethnographic research tradition and mathematics education research. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 19(2), pp. 99-114.
- Fortuny, J.M., Iranzo, N, Morera, L. (2010). Geometría y tecnología. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV*, pp. 69-85.
- Goetz, J. y LeCompte, M. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Ediciones Morata. Madrid.
- Guin, D. y Trouche, L. (2002). Mastering by the teacher of the instrumental genesis in CAS environments: necessity of instrumental orchestrations. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik*. 34 (5)
- Gutiérrez Rodríguez, A. (2005). Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica. *Actas del IX Simposio de SEIEM*. Córdoba, pp. 27-44.
- Hohenwarter, M. y Jones, K. (2007) Ways of linking geometry and algebra: the case of geogebra. *Proceeding of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 27(3), pp. 126-131.
- Iranzo, N. y Fortuny, J. M. (2008). La influencia del SGD en las estrategias de resolución de problemas de geometría analítica. *Actas del XII Simposio de SEIEM*. Badajoz.
- Olivero, F. (1999). Cabri-Géomètre as a mediator in the process of transition to proofs in open geometric situations. *W.Maull & J.Sharp (eds), Proceedings of the 4th International Conference on Technology in Mathematics Teaching*. University of Plymouth, UK.
- Restrepo, A.M. (2009) *Genèse instrumentale du déplacement en géométrie dynamique chez des élèves de 6ème*. París: Edilivre.
- Rodríguez Romero, M.M. (1992). La identidad de la labor de asesoramiento y el proceso de construcción del rol de agente de apoyo. Un estudio de caso en educación tecnológica. PhPTesis. UNED. (sin publicar).
- Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9(3), pp. 281-307.
- Verillon, P. y Rabadel, P. (1995). Cognition and artifact: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology in Education*, 9(3), pp. 77-101.