Actividades interdisciplinares Universidad-Institutos de Enseñanza Secundaria

Mª Antonia Cejas-Molina
Departamento de Matemáticas
José Luis Olivares-Olmedilla
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Antonio Blanca-Pancorbo
Departamento de Física Aplicada
Lorenzo Salas-Morera
Departamento de Proyectos de Ingeniería
Escuela Politécnica Superior de Córdoba, Universidad de Córdoba

Resumen: *Durante los cursos académicos 2009/2011 profesores universitarios y de enseñanza secundaria, hemos desarrollado una serie de proyectos destinados a mejorar el nivel académico de los alumnos que ingresan en la Universidad, concretamente en los estudios de ingeniería. En el presente artículo se describe una experiencia interdisciplinar basa en el Aprendizaje Basado en Problemas, que se enmarca dentro de un proyecto más amplio que comenzó a desarrollarse en el curso 2009-2010 y continuará en el curso 2012-13.*

Palabras clave: *Actividades Interdisciplinares, Universidad, Institutos de Enseñanza Secundaria, Estudios de Ingeniería.*

Activities interdisciplinary University-Secondary Schools

Abstract: *During the academic years 2009/2011 university professors and secondary school teachers, developed a series of projects to improve the academic level of students entering the University, specifically in engineering studies. This article describes an interdisciplinary experience based on problem-based learning, which is part of a much larger project that began in 2009-2010 and will continue during 2012-13.*

Key Words: *Interdisciplinary Activities, University, High school, Engineering Studies.*

INTRODUCCION

Si se analiza el plan de Estudios de la Enseñanza Secundaria Obligatoria y Bachillerato, puede comprobarse que son muchas y muy numerosas las asignaturas que un alumno a corta edad tiene que aprender. Si bien los conceptos llegan a ser asimilados por los estudiantes, no suelen establecer una relación entre ellos y menos aún encuentran una aplicación de lo estudiado en el mundo físico que les rodea. Posiblemente éste hecho contribuya a que el nivel académico de nuestros alumnos se aleje bastante de la media deseada, no hay más que remitirse al informe del Programa Internacional de Evaluación del Estudiante Pisa (2009) para ver el nivel de conocimientos de nuestros estudiantes. La escasa motivación del alumnado es otro de los factores, pues no hay nada más desmotivador para un alumno que no entender para qué sirve lo que se le está enseñando.

Generalmente dentro del proceso educativo el docente explica una parte de la materia y seguidamente, propone a los alumnos una actividad de aplicación de dichos contenidos. En los últimos años el Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) plantea una metodología (en la que el docente no utiliza la lección magistral) para que los estudiantes adquieran conocimientos y los apliquen para solucionar un problema real o ficticio, implicando activamente al alumno en su aprendizaje, con la consiguiente motivación ya que se ve participe del mismo.

Barrows (1986) define al ABP como “un método de aprendizaje basado en el principio de usar problemas como punto de partida para la adquisición e integración de los nuevos conocimientos”. En esta metodología los protagonistas del aprendizaje son los propios alumnos, que asumen la responsabilidad de ser parte activa en el proceso.

Prieto (2006) defendiendo el enfoque de aprendizaje activo señala que “el aprendizaje basado en problemas representa una estrategia eficaz y flexible que, a partir de *lo que hacen los estudiantes,* puede mejorar la calidad de su aprendizaje universitario en aspectos muy diversos”. Así, el ABP ayuda al alumno a desarrollar y a trabajar diversas competencias. Entre ellas, de Miguel (2005) destaca: resolución de problemas, toma de decisiones, trabajo en equipo, habilidades de comunicación, etc.

En esta línea Salas, Cejas y Olivares (2009-2010) hemos planteado proyectos interdisciplinares desarrollados por profesorado universitario y de enseñanzas medias, para tratar de potenciar aquellos conocimientos necesarios para afrontar con éxito un primer curso de ingeniería. Las actividades programadas se están desarrollando en la asignatura de Proyecto Integrado en primer y segundo curso de bachillerato, se han diseñado de forma que se trabajen gran variedad de competencias tales como: uso de hojas de cálculo, clases de comunicación virtual mediante el software Skype y Yugma, etc.

OBJETIVOS

En general, los estudiantes encuentran los conceptos explicados en clase excesivamente teóricos y abstractos, por ejemplo, no alcanzan a relacionar una ecuación con su gráfica, o un problema de química con lo que han visto en el laboratorio, y menos aún saben utilizar los conceptos aprendidos para formular un modelo matemático que dé respuesta a aquellos problemas que frecuentemente se mencionan en los medios de comunicación. Será por tanto nuestro principal objetivo situar en un contexto real aquellos conceptos que se han ido estudiando en las diferentes asignaturas que conforman los estudios de Bachillerato.

En el planteamiento y resolución de la actividad, realizada con los alumnos de segundo curso de bachillerato, se van a trabajar, entre otros, los siguientes conceptos y técnicas matemáticas:

- Variable dependiente.
- Variable independiente.
- Proporcionalidad.
- Función continua.
- Función definida a trozos.
- Concepto de derivada como tasa de cambio.
- Técnicas de integración.
- Solución analítica del problema.
- Ecuación logística.
- Relación entre una ecuación con su gráfica.
- Extraer información de la solución gráfica.
- Uso de hojas de cálculo.

METODOLOGÍA

Si bien los programas de matemáticas a nivel de bachillerato no contemplan el estudio de las ecuaciones diferenciales, el alumno está trabajando con ellas cuando resuelve problemas de dinámica, mecánica, etc. en las asignaturas de física. Basta con entender el concepto de derivada y conocer mínimamente las técnicas de integración para poder encontrar la solución general de la ecuación planteada, incluso sabe trabajar con las condiciones iniciales del problema para hallar la solución particular del mismo. Partimos de que el concepto de "*ecuación diferencial*" así como el de *"problema de valores iniciales"* no es conocido por el alumno, pero sí sabe trabajar con ellos. Planteamos entonces un problema de fácil comprensión para el alumnado, que versará sobre la población de un determinado hábitat, éste es de actualidad, tiene difusión en los medios de comunicación y su resolución conlleva consecuencias sociales, económicas, demográficas, etc.

Previamente a la resolución del problema el alumno, individualmente o en grupos de dos, llevará a cabo una labor de investigación a través de los medios de comunicación: prensa, radio, televisión, internet, etc. Con la información recabada, se procede a la formulación matemática del mismo, la resolución y posterior debate de los resultados tiene lugar en clase con el profesor actuando como tutor.

Planificación temporal del trabajo

El trabajo se ha desarrollado con los alumnos de la asignatura de Proyecto Integrado, durante el segundo cuatrimestre del curso académico 2010-11 y 2011-12, una vez que se ha avanzado lo suficiente en el programa de matemáticas para que tengan los conocimientos necesarios que le permitan desarrollar las competencias indicadas.

Formulación del problema

En clase de la asignatura de Proyecto Integrado se plantea la siguiente cuestión:

– "*Imaginemos que vivimos en una zona pesquera y quisiéramos saber: ¿Cuántas toneladas de pescado pueden recogerse al año sin exterminar la población de peces?*".

El problema planteado permitirá analizar, entre otras, las siguientes cuestiones.

Una pesca incontrolada:

- *¿Podría afectar a la industria pesquera de la región?.*
- *¿Y a la economía en general?.*
- *¿Aumentaría el paro de la zona pesquera?.*
- *¿Tendría consecuencias demográficas?.*
- *¿Se vería afectado el medioambiente de alguna manera?.*

Cabe entonces preguntarse:

- *¿Qué tasa de pesca conserva en cantidades aceptables la población de peces y la industria pesquera?.*

Formulado el problema y analizadas las posibles consecuencias que de él se derivan, el alumno debe recabar información al respecto, debiendo tener la documentación encontrada para la próxima clase de la asignatura indicada.

RESOLUCIÓN

Para formular un modelo matemático que responda a las cuestiones planteadas, habrá que tener en cuenta los datos obtenidos en la investigación realizada por los alumnos y los conocimientos matemáticos aprendidos. La palabra clave en la pregunta formulada es *tasa*. En el lenguaje matemático las *tasas* son una derivada con respecto del tiempo, vamos a plantear una ecuación cuya incógnita es una función $y(t)$ (toneladas de peces en *t* años), en dicha ecuación estableceremos una relación entre la función *y(t)* y su derivada *y'(t)*. La tasa de cambio neta de la población expresada en toneladas de pescado por año es $\frac{dy(t)}{dt}$, que se escribe *y'(t)* o simplemente *y'*.

A través del trabajo de investigación desarrollado por los alumnos sobre dinámica de poblaciones, han aprendido que si *y(t)* denota el tamaño de una población en un tiempo *t*, el modelo para el crecimiento exponencial, Zill, D.G. (2006), comienza con la suposición de que

$$\frac{dy}{dt} = Ky \quad [1]$$

con $K>0$. Los casos reales de crecimiento exponencial en periodos largos de tiempo son difíciles de encontrar debido a que los recursos limitados del ambiente y la existencia de predadores ejercen, en algún momento, restricciones sobre el crecimiento de una población. Es de esperar que la ecuación [1] disminuya a medida que aumenta el tamaño de la población *y,* lo que nos obliga a modificar el modelo.

En condiciones normales la tasa de crecimiento será constante o aproximadamente constante, ahora bien, dicha tasa debe reflejar el hecho de que un aumento considerable de la población inhibe el crecimiento reduciéndose la población, de modo que la nueva tasa de crecimiento será de la forma

$$\frac{dy}{dt} = y(a-by) \quad a>0, \quad b>0 \quad [2]$$

La ecuación diferencial [1] no proporciona un modelo muy preciso para la población cuando ésta es muy grande. Las condiciones de superpoblación, con los efectos nocivos resultantes en el ambiente, como contaminación y demandas excesivas como competencia por alimento, pueden tener un efecto inhibitorio en el crecimiento de la población.

Reescribiendo [2] como $\frac{dy}{dt} = ya - by^2$, el término no lineal $-b\,y^2$, $b > 0$ se puede interpretar como un término de inhibición o competencia (superpoblación). Asimismo en la mayor parte de las aplicaciones la constante positiva *a* es mayor que la constante positiva *b*.

Si se tiene en cuenta la actividad pesquera en la zona, el modelo debe modificarse para tener en cuenta este hecho. Suponiendo que la captura se realiza a un ritmo H (tasa de captura), la ecuación diferencial que representa al modelo queda

$$\frac{dy}{dt} = y(a-by) - H \quad [3]$$

Se ha encontrado una ecuación donde se establece una relación entre una función, su derivada y la tasa de captura, pudiéndose formular matemáticamente el problema propuesto.

La ecuación planteada es difícil de resolver por los alumnos de Bachillerato, lo que nos lleva a simplificar el modelo admitiendo para ello varias situaciones, cuya viabilidad habrá que determinar posteriormente. Supongamos entonces los siguientes casos:

Captura sin superpoblación

Admitamos que inicialmente, en un tiempo $t = 0$ la población de peces existente es y_0. Al no existir superpoblación, la ecuación [3] se transforma en:

$$y' = a\,y - H \qquad [4]$$

Separando las variables en la ecuación [4], integrando y sustituyendo las condiciones iniciales en la solución general, encontraría la solución:

$$y(t) = \frac{H}{a} + \left(y_0 - \frac{H}{a} \right) e^{at}, \ \ t \geq 0 \qquad [5]$$

En esta fase del trabajo, y dentro de las actividades programadas en Salas, L., Cejas, M. A. y Olivares, J. L. (2009) el alumno ha aprendido a trabajar con la hoja de cálculo de OpenOffice, pudiendo representar gráficamente la solución [5]. La figura 1 muestra el resultado obtenido para el valor de la constante $a = 1, H = 0$ en el rango $0 < y_0 < 20$.

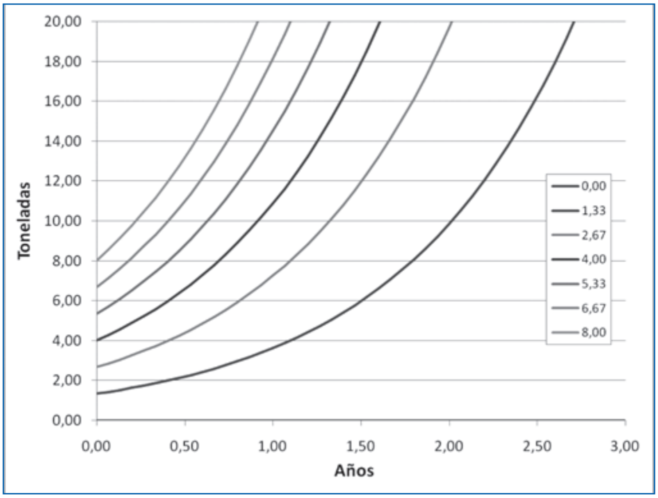

Figura 1. Crecimiento exponencial sin captura.

En la figura 2 se representa la solución [5] para , $0 < y_0 < 20$ y $H = \frac{5}{3}$ toneladas anuales. Si $y_o < \frac{H}{a}$ pronto se extinguirá la población, pero si $y_o > \frac{H}{a}$ entonces crece sin límites, lo cual nunca sucede en la realidad.

Por tanto, necesitamos un modelo mejor. Quizás haya que tener en cuenta el término de superpoblación descartado.

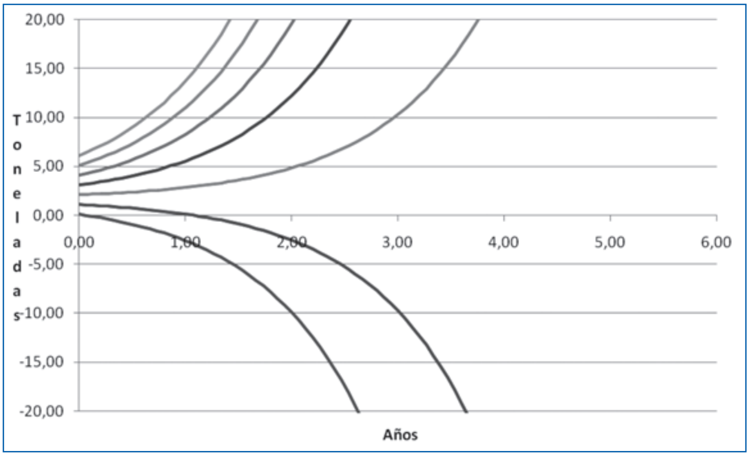

Figura 2. Crecimiento exponencial con captura

¿Qué habrá aprendido el alumno en esta fase?

- Fundamentalmente a aplicar los conceptos matemáticos estudiados a problemas reales, aparentemente sin ninguna conexión con lo que estudia.
- Llevar a cabo un proceso de investigación a través de internet, prensa, etc. sobre problemas reales.
- Construir un modelo matemático donde se relacionan las variables.
- Diferenciar entre variable independiente y dependiente.
- Dar significado al concepto de derivada.
- Encontrar la solución de un problema usando técnicas de integración.
- Relacionar una función con su gráfica.
- Extraer información de los datos encontrados.
- Validar el modelo construido.

Las conclusiones obtenidas ponen de manifiesto que hay que retomar las variables descartadas. La solución analítica se obtendrá separando las variables e integrando.

Superpoblación sin captura de peces

Omitamos por el momento el término de la captura de la ecuación [3] y usemos el término de la superpoblación para obtener la ecuación: $y' = ay - cy^2, y(0) = y_0, t \geq 0$. La solución gráfica obtenida para $H=0,\ a = 1,\ c = 1/12$ para $0 < y_0 < 20$ se muestra en la figura 3.

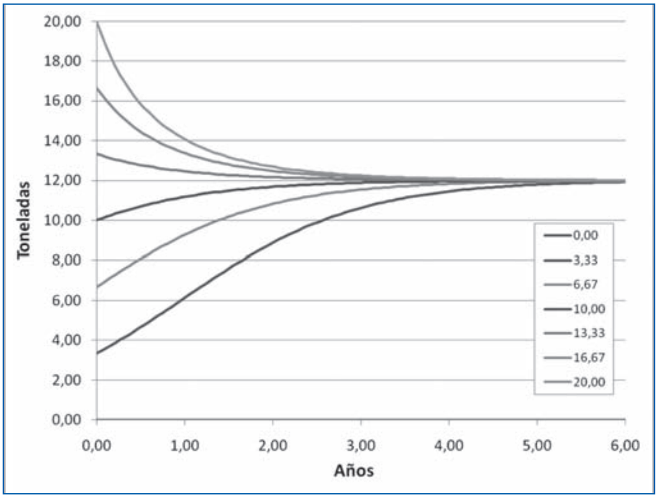

Figura 3. Superpoblación sin captura de peces H=0, a = 1, c = 1/12

Se obtienen dos soluciones de equilibrio, $y=0$ e $y=12$. Algo interesante es que al parecer el equilibrio superior atrae a las demás curvas solución no constantes en el cuadrante de población $y \geq 0$, $t \geq 0$ .Por sí sola, la población de peces tiende al equilibrio sin importar cuál sea la población inicial.

Superpoblación y captura de peces

Empecemos por incluir una pesca moderada $H = \frac{5}{3}$ toneladas por año. Gráficamente la solución de la ecuación [3] para $H = 5/3,\ a = 1,\ c = 1/12$ en el rango $0 < y_0 < 20$ se representa en la figura 4.

Puede observarse como en la recta de equilibrio superior convergen las curvas solución, pero no todas, las que comienzan debajo de la solución constante convergen hacia la extinción. La pesca moderada no parece ser muy dañina, al menos si el tonelaje inicial es lo suficientemente alto; sin embargo, incluso una tasa de captura moderada podría causar la extinción si el nivel inicial de población es bajo. No obstante, éste es un escenario en el que tanto la población de peces como la industria pesquera sobreviven bien.

Supongamos que no hay restricción para los pescadores y que la tasa de captura es mucho más alta, digamos que aumenta a 4 toneladas por año. En la figura 5 se representa la solución de la ecuación [3] para $a=1,\ c=1/12$ en el rango $0 < y_0 < 20$.

Es fácil observar que se produciría la extinción total de la especie.

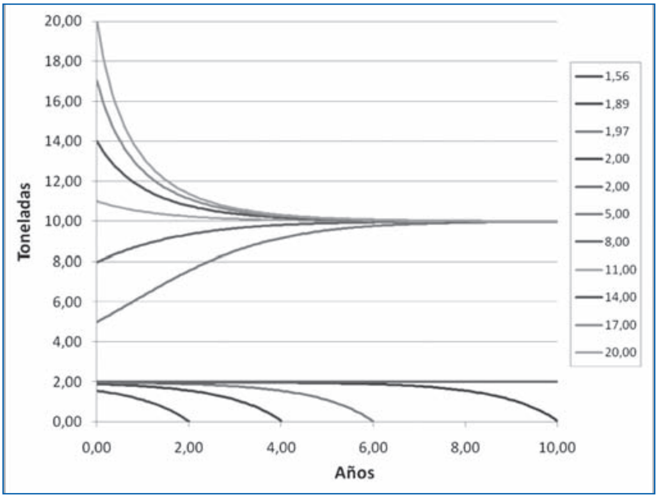

Figura 4. Superpoblación y captura de peces con H = 5/3, a = 1, c = 1/12

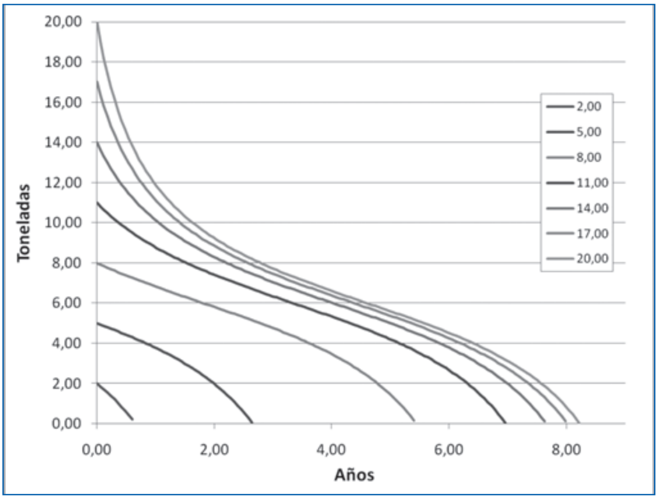

Figura 5. No hay restricción de pesca

Prohibición de pesca

Al no poder permitir que se extinga la población de peces, veamos qué sucede con el modelo si después de cinco años de pesca a una tasa de 4 toneladas por año, se prohíbe esa actividad durante cinco años. Ahora la tasa de captura está dada por:

$$H(t)=\begin{cases}4, & 0\leq t<5\\ 0, & 5\leq t\leq 10\end{cases}$$

La complejidad de la ecuación [3] en este caso no hace viable su resolución, no obstante esta situación se mostró resuelta en clase, Borrelli (2002), donde se puso de manifiesto que después de cinco años de pesca intensa la población sobreviviente se dirige al nivel $y=12$. Hemos salvado la pesca pero a costa de la industria pesquera.

CONCLUSIONES Y CONSIDERACIONES FINALES

El problema propuesto es complejo, pero nos ha parecido de interés por las implicaciones sociales que pueden tener las distintas opciones que se adopten en la captura de peces. Frecuentemente noticias sobre la moratoria en la captura de determinadas especies ocupan las portadas de los medios de comunicación, sin que el alumno pueda pensar que los conceptos matemáticos que estudia son necesarios para dar solución al problema.

Además al alumno se le ha mostrado aspectos como:

- A partir de una determinada realidad, parcialmente asequible al nivel educativo de los estudiantes, se ha construido un modelo analizando los pasos que conducen al mismo, con las habituales etapas de validación, análisis crítico, refinamiento, etc.
- Se han obtenido fórmulas para las soluciones del modelo matemático propuesto.
- El alumno ha interpretado las soluciones en términos de lo que sucede con la población de peces.
- El proceso de modelado nos ha permitido examinar las consecuencias de varias suposiciones acerca de la tasa de captura de la población de peces.
- Al alumno no le ha resultado sencilla la actividad desarrollada, en parte porque es la primera vez que analiza un problema en los términos llevados a cabo.
- En la formulación matemática del modelo la participación del profesor fue fundamental, hecha la primera simplificación, el alumno no tuvo dificultad para resolverlo y representarlo gráficamente.
- Terminada esta actividad, se planearon problemas de menor complejidad, siendo necesario para su modelado matemático hacer uso de las correspondientes leyes físicas, químicas, etc. En esta línea se han propuesto problemas de mezclas químicas, circuitos eléctricos, mecánicos, descomposición de sustancias radiactivas, etc.
- Los alumnos participaron activamente en todo el proceso de resolución, sobre todo no dejó de resultarles sorprendente que problemas, cuyo enunciado de partida no parecía tener ninguna relación con las matemáticas, éstas fueran fundamentales para dar respuesta a los mismos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barrows, H. S. (1986). A Taxonomy of problem-based learning methods. *Medical Education, 20*(6), 481–486.

Borrelli, R., Coleman C. (2002). *Ecuaciones Diferenciales. Una perspectiva de modelación*. Madrid: Oxford.

De Miguel, M. (2005). *Metodologías de enseñanza para el desarrollo de competencias. Orientaciones para el profesorado universitario ante el Espacio Europeo de Educación Superior.* Madrid: Alianza.

PISA (2009). *Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos. Informe español.* Obtenido de www.educacion.es/.../20101207-pisa2009-informe-espanol.pdf?

Prieto, L. (2006). Aprendizaje activo en el aula universitaria: el caso del aprendizaje basado en problemas. *Miscelánea Comillas. Revista de Ciencias Humanas y Sociales, 64*(124), 173-196.

Salas, L., Cejas, M. A. y Olivares, J. L. (2009). Programación de actividades interdisciplinares en colaboración Universidad-IES para mejorar el nivel de acceso de los estudiantes a las titulaciones de la EPS. *Proyecto de Mejora de la Calidad Docente nº 094012*. Universidad de Córdoba.

Salas, L., Cejas, M. A. y Olivares, J. L. (2010). Programación conjunta de actividades interdisciplinares en la asignatura de Proyecto Integrado de secundaria y bachillerato en colaboración Universidad-IES para mejorar el nivel de acceso de los estudiantes a las titulaciones de Ingeniería. *Proyecto de Mejora de la Calidad Docente nº 106013*. Universidad de Córdoba.

Zill, D.G. (2006). *Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la frontera*. Ed. Thompson.