

LA DIMENSIÓN “DINÁMICA” DEL PROBLEMA DE LA DETERMINACIÓN DE LOS LUGARES GEOMÉTRICOS EN LA GEOMETRÍA

Luis Augusto Campistrous

Universidad Autónoma de Guerrero

Omar Hernández Rodríguez

*Departamento de Estudios Graduados,
Universidad de Puerto Rico, Río Piedras*

Jorge M. López Fernández

*Departamento de Matemática,
Universidad de Puerto Rico, Río Piedras*

Resumen: *En este trabajo se trata el tema general de la generación de argumentos plausibles y demostraciones a partir de la simulación y la exploración geométrica que proporcionan programas como “The Geometer’s Sketchpad”, Cabri y GeoGebra. Se presentan argumentos obtenidos de tal manera para la demostración del Teorema de Euler de los nueve puntos y la descripción de los lugares geométricos de cevianas concurrentes en un triángulo inscrito en una circunferencia, uno de cuyos vértices asume posiciones variables sobre tal circunferencia.*

Nuestro análisis del problema de las cevianas concurrentes parte de una demostración del teorema de Ceva que se presta para la descripción de condiciones necesarias que llevan a lugares geométricos que son imágenes homotéticas de la circunferencia que contiene los vértices del triángulo. Un caso especial es del baricentro de un triángulo inscrito en una circunferencia. Además, se describen los lugares geométricos de otros puntos notables que también son puntos de intersección de cevianas concurrentes de triángulos inscritos en circunferencias pero que no son circunferencias. Entre tales puntos se encuentran el incentro, el ortocentro y el punto de Gergonne.

Palabras clave: *Geometría, Geometría dinámica, Resolución de problemas, Lugares geométricos.*

INTRODUCCIÓN

Todos sabemos que a partir desde la década que se inicia en el 1980, año en que se comienzan a popularizar los programas de exploración geométrica como el “Geometer’s Sketchpad” y el Cabri, la didáctica de la geometría no ha sido la misma. Algunos docentes han sido extremadamente optimistas con las posibilidades de estos programas de exploración geométrica, a los cuales, hoy se suman alrededor de una veintena de otros programas del mismo tipo. Con el transcurrir del tiempo hemos visto que tales programas se emplean de forma más “agresiva” en la didáctica de la Geometría. Entre tales recursos figura de forma prominente, claro está, el programa de nueva generación “GeoGebra”.

Es de imaginar que el entusiasmo que hoy día compartimos muchos docentes con las posibilidades didácticas de estos programas, a veces descritos como ejemplos de *ambientes artificiales para la exploración geométrica*, también fue característico de otras tecnologías que en su momento fueron de avanzada, e igualmente prometedoras. Algunas de tales tecnologías son las asociadas a la televisión, y a la producción y reproducción de casetes y discos ópticos, y claro está, la computadora. Muchas de estas tecnologías han desaparecido o se han transformado dramáticamente, y aunque hoy no descartamos del todo las posibilidades didácticas de las tecnologías mencionadas, sí abrigamos, si acaso, esperanzas un tanto más solapadas y conservadoras respecto a sus posibles aplicaciones didácticas.

A pesar de lo que ya se ha planteado, los autores de este escrito opinamos que los programas de exploración geométrica incorporan un elemento didáctico nuevo e importante, que consiste en las posibilidades que ofrecen para que los alumnos puedan proponer conjeturas, afirmaciones y propuestas de demostraciones plausibles aplicables a la descripción de una situación geométrica dada. No hay que olvidar que a tenor con (Polya, 1954), se podría argumentar que este es, a fin de cuentas, el elemento más importante de la creación matemática. Así pues, los programas de exploración geométrica, sin lugar a dudas, agregan una nueva dimensión a la didáctica de la matemática en general y de la geometría en particular. No podemos exagerar la importancia de poder “ver” antes de intentar cimentar y justificar formalmente los argumentos lógicos plausibles y las demostraciones de enunciados geométricos. En tal perspectiva, es posible apreciar mejor las virtudes que tiene una didáctica fundamentada en actividades de exploración, las cuales, de alguna manera, amplían las posibilidades de exploración de la mente humana para descubrir nuevas relaciones matemáticas. Pocos docentes somos capaces de sustraernos de la gran emoción que se siente al observar cómo estudiantes de tercer grado de primaria “descubren” mediante programas de exploración geométrica el teorema de Varignon¹, o cómo los niños proponen resultados propios que enarbolan en las paredes y los tablores de edictos de las aulas (el teorema de Juan, la conjetura de María, etc.).

Sin embargo, el estudio de la geometría no se puede limitar al aspecto “fenomenológico” descrito, consistente en el descubrimiento de patrones observables en los programas de exploración geométrica. La geometría es, al igual que la matemática en general materia de pensamiento, es decir, una disciplina formal y lógica, y la meta del conocimiento geométrico no es ni más ni menos que la justificación última de los resultados geométricos en sistemas formales de deducción lógica. Hemos visto con frecuencia que

muchos docentes de la geometría se limitan en ocasiones a esta actividad de “descubrimiento” y raramente la trascienden, siguiéndola con actividades más formales de deducción lógica a modo de justificación de los resultados observados. Creemos que tal práctica desaprovecha la valiosa oportunidad que proporcionan los programas de exploración geométrica para seguir la exploración inicial con demostraciones o argumentos justificantes que parten de la exploración dinámica de situaciones geométricas. Es menester matizar este último comentario señalando que en muchas ocasiones no resulta nada evidente la formulación de argumentos formales a partir del aspecto “dinámico” de las experiencias de exploración aludidas.

A pesar de que muchas de las concepciones geométricas más primitivas y básicas del ser humano están basadas en el movimiento y la cinestesia, no hay una presentación de la geometría que se fundamente o parta de esta sensibilidad básica del ser humano. La formalización de ciertas nociones geométricas básicas, tales como la perspectiva y la paralaxia, debe mucho a nuestro sentido cenestésico. Sin embargo, el estudio tradicional de la geometría es, por decirlo de algún modo, notoriamente “estático”. Aún así, es innegable que el advenimiento de los programas de exploración geométrica ha contribuido significativamente a crear un interés renovado por ciertas áreas de la geometría relacionadas con el movimiento de puntos definidos por configuraciones geométricas cambiantes, específicamente los problemas de la determinación de lugares geométricos. El gran reto del docente de la geometría dinámica es, precisamente, el promover el descubrimiento de argumentos justificantes o demostraciones geométricas que sean germanas a las experiencias de exploración fundamentadas en los programas mencionados anteriormente. En otras palabras, la existencia de los programas de simulación geométrica, de algún modo, no sólo han logrado despertar la sensibilidad por este tipo de problema geométrico sino que también han presentado un reto de respetable proporción relativo al empleo de la experiencia misma de simulación geométrica proporcionada por tales programas para generar los elementos primordiales de tales demostraciones lógicas. Algo similar ocurrió con la disciplina matemática del análisis numérico, la cual, sin duda, tiene una historia que se remonta a tiempos anteriores a la aparición de las calculadoras y las computadoras, pero su florecimiento y auge surgió a raíz del advenimiento de tales instrumentos de cálculo, y estos últimos proporcionaron además una fuente prolífica de nuevas ideas y posibilidades para alcanzar aproximaciones numéricas de mayor precisión.

Los autores de este artículo colaboraron durante el primer semestre del año académico 2008-2009 en la Universidad de Puerto Rico en Río Piedras, en la confección y la ejecución de un curso para futuros docentes en el cual se mantuvo el “blog” <http://geometrygate.com/>, en el cual se puede apreciar en retrospectiva el progreso del curso y algunas de las reflexiones de los alumnos. Como parte del trabajo realizado se comenzó la redacción de ciertos diálogos al estilo “Sócrates-Menón” (realmente, se tiene sólo la mitad de los diálogos, la otra mitad la proporciona el alumno en su mente) para ofrecer argumentos “evidentes” que partían precisamente de las exploraciones realizadas en clase con los programas de exploración mencionados anteriormente, y que terminaban por convertirse en demostraciones formales de resultados centrales de la geometría sintética. En este artículo presentamos una muestra de este esfuerzo. La palabra “conversación” se referirá a cada uno de tales intentos por “llevar” al estudiante de forma natural

al descubrimiento de enunciados geométricos. Desde luego, las conversaciones propuestas, en nuestro caso, están basadas en experiencias de simulación geométrica.

Terminamos esta introducción con algunas palabras de advertencia. En la historia de la matemática abundan ejemplos de resultados que se re-descubren en múltiples ocasiones, y la geometría no es excepción a esta regla empírica. La geometría ha sido terreno de exploración para matemáticos y aficionados a matemáticos, de modo que es improbable que algún resultado de los que surgen en los ambientes de exploración geométrica sea uno verdaderamente nuevo. Como comentaba en cierta ocasión Gene Klotz, el afamado director del “Geometry Forum”, dada la cantidad inmensa de matemáticos y aficionados que han hecho de la geometría euclídea su pasión de vida, los resultados verdaderamente novedosos son muy improbables en esta disciplina. Sin embargo, hay muchísimos resultados geométricos interesantes que se les escaparon a Euclides y que no figuran, por tanto, en los trece volúmenes de *Los Elementos*. El conocido y lúcido escrito (Coxeter y Greitzer, 1967) trata precisamente de esos resultados que no figuran en los trece volúmenes de la magna obra de Euclides. La gran abundancia de los teoremas geométricos post-euclídeos, como el Teorema de Ceva (Weisstein, nd; Campistrous, López y Velázquez, 2003), o el Teorema sobre la circunferencia de Euler (o de Feuerbach) y la línea de Euler (Weisstein, nd) fueron resultados de observaciones más agudas de matemáticos que vivieron con posterioridad a Euclides y quienes alcanzaron a ver con renovada perspicacia figuras examinadas en múltiples ocasiones por geómetras de épocas anteriores. Así pues, a pesar de la sabia advertencia de Klotz sobre la naturaleza de lo “novedoso” en la geometría, debemos admitir que la sorpresa siempre es posible. En este artículo relataremos algunas de las “sorpresas” recibidas en el curso mencionado anteriormente. Presentamos, a modo de ejemplo, un par de “conversaciones encaminadas a culminar una exploración sobre la circunferencia de los nueve puntos y luego discutiremos algunos problemas relativos a ciertos lugares geométricos de algunos puntos notables del triángulo que con menos frecuencia se ven en los textos de geometría actuales.

LA CIRCUNFERENCIA DE LOS NUEVE PUNTOS

Las tres conversaciones que siguen están encaminadas a descubrir la existencia una circunferencia muy especial, la cual se asocia a un triángulo arbitrario y que se conoce como la *circunferencia de los nueve puntos*².

En la Figura 1 se muestra el una gráfica producto de la exploración con el programa “The Geometer’s Sketchpad”. En tal figura se puede observar un triángulo ABC inscrito en una circunferencia con centro O. Los puntos A', B' y C' son los puntos medios de los lados opuestos a los vértices A, B y C respectivamente. La circunferencia con centro C circunscribe al triángulo medial (el cual no se ha dibujado) con vértices A', B' y C'. En la Figura también se ha construido el triángulo con centro C' y a través de los puntos A y B, es decir una circunferencia cuyo diámetro es AB y cuyo centro es el punto medio C' de AB. Las intersecciones de la circunferencia C' con la circunferencia C son los puntos B'' y A'', y como AB es un diámetro, es fácil ver que B'' es el pie de la altura del triángulo ABC desde B y que A'' es el pie de la altura del triángulo ABC desde A (siendo los

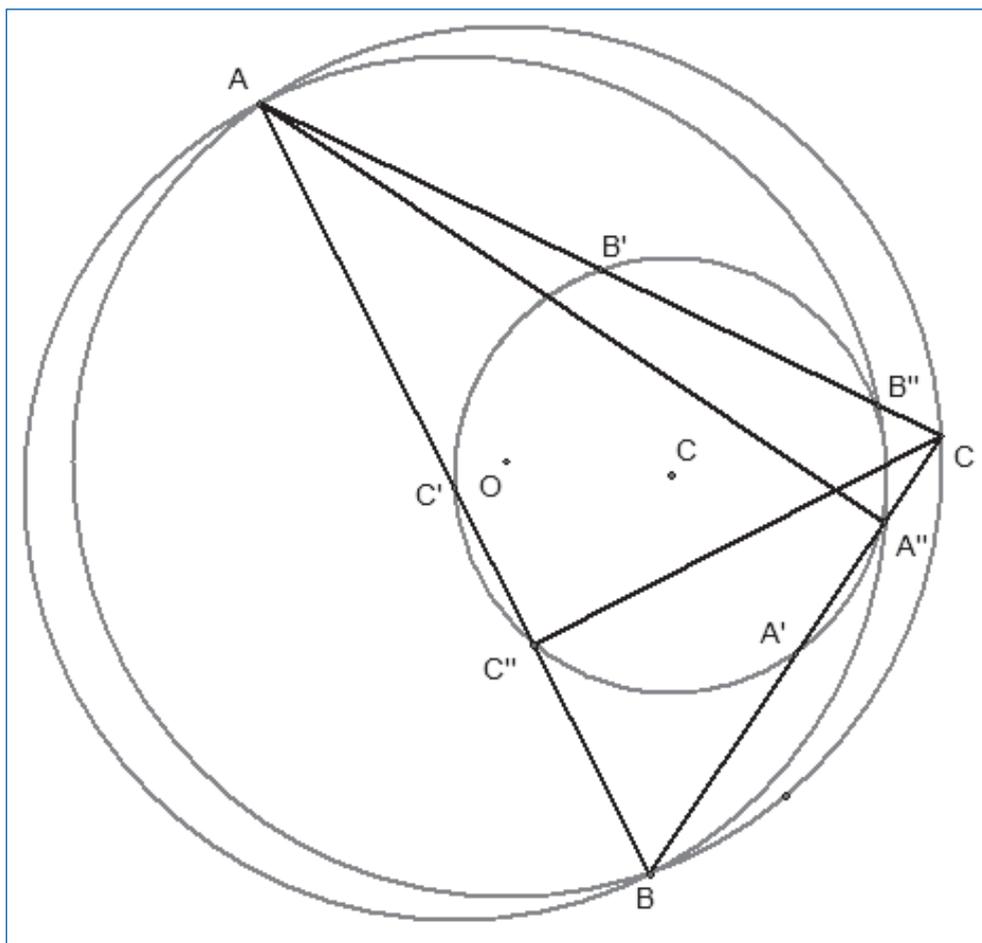


Figura 1.

vértices de ángulos inscritos en semicircunferencias). Desplazando el punto A a lo largo de la circunferencia original O se aprecia que los puntos medios A' , B' y C' de los lados del triángulo original y los pies de las alturas A'' y B'' y todos pertenecen a la circunferencia C.

La simulación descrita motiva un razonamiento muy claro que puede convertirse en una demostración muy clara y relativamente sencilla del Teorema de la circunferencia de los nueve puntos. A continuación desglosamos el argumento en dos “conversaciones” relacionadas, ambas inspiradas por la exploración descrita:

Conversación 1

Sean A, B y C puntos no alineados. ¿Porqué las bisectrices perpendiculares de los segmentos AB y BC tienen necesariamente un punto de intersección, digamos O? ¿Porqué la circunferencia con centro O a través de uno de los tres puntos A, B o C tiene que

contener a los otros dos? Explica por qué la circunferencia O es la circunferencia circunscrita del triángulo ABC y argumenta cómo se puede concluir además que la circunferencia obtenida es única (Si hubiese otra, ¿cuál sería su centro? ¿Cuál sería su radio? Por qué puedes concluir también que los tres puntos medios de los lados de un triángulo pertenecen a una misma circunferencia y que lo mismo es cierto para los tres pies de las alturas de un triángulo cualquiera. Nota, dicho sea de paso, que el pie de una altura de un triángulo arbitrario podría estar ubicado en el exterior del triángulo, es decir, en la extensión del lado opuesto al vértice desde donde se traza la altura.

Conversación 2

Considera un triángulo ABC y cualquier circunferencia con diámetro AB como en la Figura 2. Nota que a la izquierda de la figura aparece un triángulo acutángulo (todos sus ángulos son agudos) y a la derecha se puede apreciar el caso de un triángulo obtusángulo, es decir, un triángulo que posee un ángulo obtuso (el ángulo B); nota, además, que en este último caso hemos extendido el lado BC de modo que corte la circunferencia dada. ¿Por qué el ángulo AEB y el ángulo BDA son rectos? ¿Que puedes concluir sobre los pies de las alturas desde los vértices A y B del triángulo?

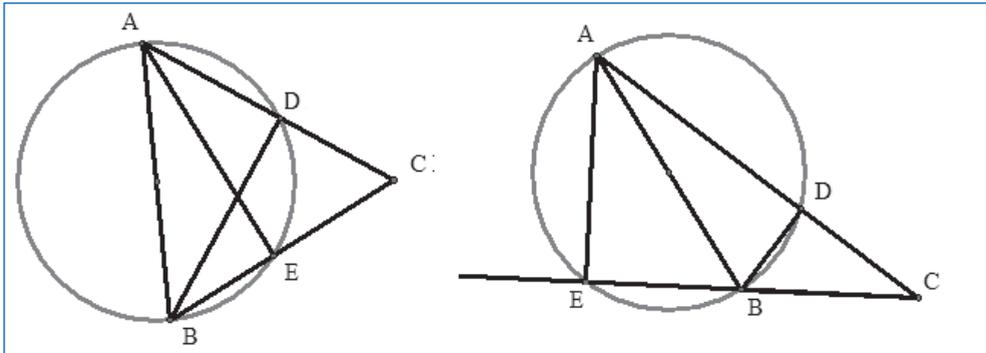


Figura 2.

Completa la siguiente

Proposición: Si el lado AB del triángulo ABC es el diámetro de una circunferencia, entonces los pies de las alturas del triángulo desde los vértices A y B quedan en la circunferencia...

Conversación 3 [Circunferencia de los nueve puntos]

El triángulo ABC con los puntos medios de los lados opuestos a los vértices, A , B y C rotulados como A' , B' y C' respectivamente; véase la Figura 3.

El segmento AF es la altura desde el vértice A . Explica por qué existe una circunferencia con centro C' que contiene los puntos A y B . Observando que F es el pie de una altura desde A , emplea la Conversación 2 para concluir que los puntos A , B y F están en

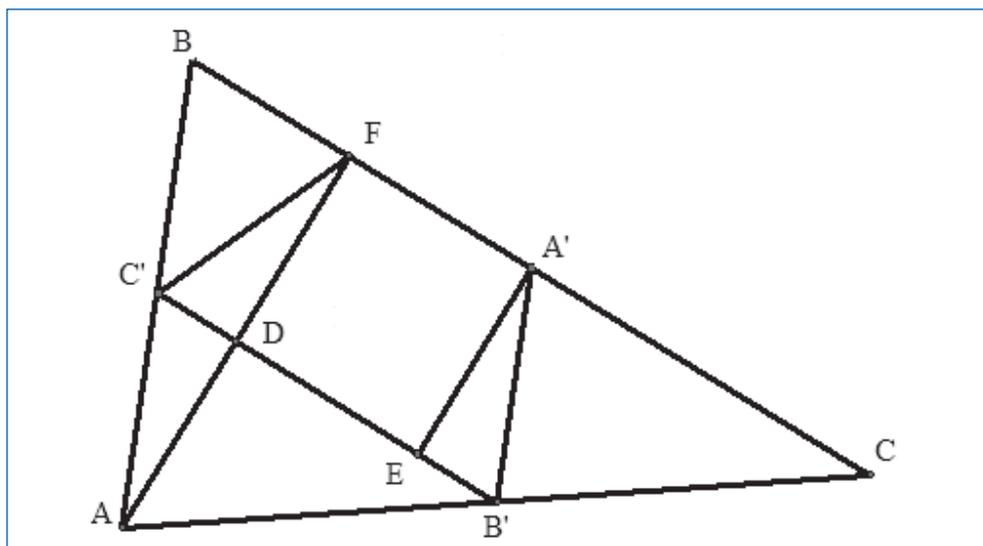


Figura 3.

una misma circunferencia, al igual que el pie de la altura desde B (la cual no se ha dibujado). Nota que $A'B'$ es un segmento medial (es decir, que une los puntos medios de dos de los lados del triángulo) del triángulo ABC . ¿Cómo puedes concluir de este dato que AC' , $C'B$, CF y $B'A'$ son todos congruentes a cualquier radio de la circunferencia mencionada? Desde A' traza un segmento $A'E$ perpendicular al segmento medial $C'B'$ y explica por qué los triángulos DFC' y $EA'B'$ son congruentes. ¿Por qué son los ángulos $FC'D$ y $C'FD$ complementarios? ¿Por qué también lo son los ángulos $EB'A'$ y $B'A'E$? ¿Por qué son los ángulos $DC'F$ y $B'A'F$ suplementarios al igual que los ángulos $C'B'A'$ y $C'FA'$? Por qué sabemos entonces que el cuadrilátero (en efecto, el trapecio) $C'FA'B'$ es cíclico³ y que hay una circunferencia que contiene los puntos medios de los lados del triángulo ABC así como el pie de la altura de triángulo desde el vértice A . Repite el argumento con las otras alturas del triángulo y concluye que los pies de las tres alturas del triángulo desde los vértices A , B y C están en la circunferencia que contiene a los puntos medios A' , B' y C' . Así pues, los puntos medios de los lados de un triángulo ABC así como los pies de las alturas del mismo triángulo son puntos de una misma circunferencia (que podríamos llamar la circunferencia de los seis puntos).

Para el resto de la conversación emplearemos la Figura 4

En el triángulo ABC se ha construido el ortocentro O . Los puntos D , E y F son los pies de las alturas desde C , A y B respectivamente, y D' , E' y F' son los puntos medios de los segmentos desde los vértices C , A y B hasta el ortocentro O respectivamente. Considera ahora el triángulo AOC . ¿Cuáles son los puntos medios de los lados del triángulo AOC ? ¿Cuáles son los pies de sus tres alturas? Concluye que los puntos E' , D' , B' , D , E y F están todos en una misma circunferencia. Explica por qué esa circunferencia también contiene a los puntos A' y C' . Aplicando el mismo argumento al triángulo COB concluye que esta circunferencia también contiene a D' . Concluye entonces que hay una

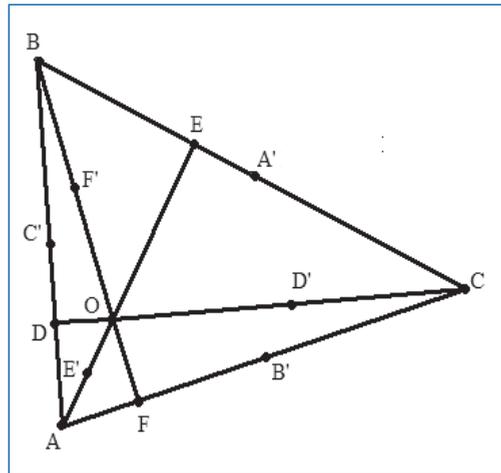


Figura 4.

circunferencia que contiene los nueve puntos A' , B' , C' , D , E , F , D' , E' y F' . Enuncia este resultado en la forma de un teorema.

Cevianas concurrentes de un triángulo

En (Campistrous y López, 2001) se presenta una exploración interesante relativa al lugar geométrico del incentro de un triángulo inscrito en una circunferencia. Suponga que se tiene un triángulo ABC inscrito en una circunferencia O como se muestra en la Figura 5, y que la cuerda AB de la circunferencia O permanece fija mientras el punto C está libre para moverse a lo largo de la circunferencia.

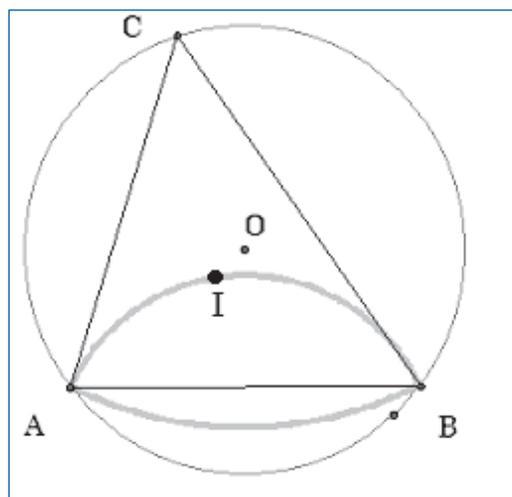


Figura 5.

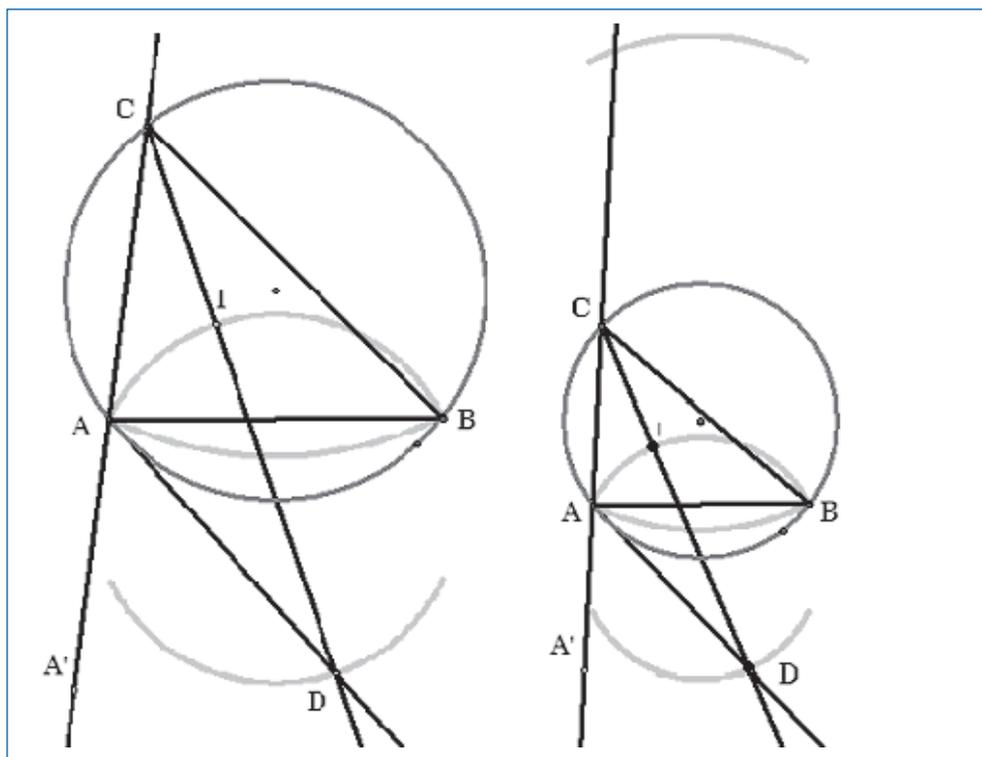


Figura 6.

Construimos el incentro I del triángulo ABC y nos preguntamos cuál es el lugar geométrico de I cuando C se mueve a lo largo de la circunferencia O . Empleando cualquier programa de exploración geométrica capaz de representar lugares geométricos (como el “SketchPad” o el GeoGebra), se obtiene un gráfico como el de la Figura 5, en el que se muestra el lugar geométrico del incentro I para posiciones arbitrarias del punto C en la circunferencia O . Como se observa, en el gráfico de la izquierda de la Figura 6, el lugar geométrico es una figura cerrada y puntiaguda, que se asemeja a los arcos de dos circunferencias distintas unidos en sus extremos. Luego de una buena dosis de exploración, los alumnos pasan a construir el excentro del triángulo ABC opuesto a C , el cual se define como la intersección de las bisectrices angulares de los ángulos externos del triángulo ABC , obtenidos en A y en B mediante la prolongación de los lados CA y CB del triángulo ABC en A y C respectivamente.

Si se traza el lugar geométrico del incentro y de este excentro, se obtiene el gráfico de la derecha de la Figura 6; en este último caso hemos cambiado la escala de la figura para poder apreciar las partes de la circunferencia de menor curvatura. El resto de la exploración es ahora evidente. Parecería que el lugar geométrico del incentro del triángulo ABC y del excentro opuesto a C del mismo triángulo consiste de los puntos de dos circunferencias que quedan entre las dos rectas perpendiculares al segmento AB en los puntos A y B . Si completamos la exploración veremos que el lugar geométrico del excentro

del triángulo ABC opuesto al vértice A nos habrá de proporcionar los puntos de las dos circunferencias aludidas anteriormente que quedan en el lado opuesto al vértice A y a la derecha de la recta perpendicular al segmento AB en el punto B . Una conjetura similar puede formularse respecto al lugar geométrico del excentro opuesto a B y las circunferencias mencionadas. Dejaremos al lector interesado los detalles de esta interesante exploración.

No es muy difícil conjeturar la naturaleza de las dos circunferencias que parecen describir la unión de los lugares geométricos del incentro y de los excentros de un triángulo inscrito en una circunferencia, uno de cuyos vértices asume posiciones arbitrarias en la misma. En efecto, si construimos la bisectriz perpendicular del segmento AB , el mismo corta la circunferencia O en dos puntos P y Q , los cuales llamaremos los *puntos nodales* de la circunferencia O ; véase la

En el gráfico de la izquierda de la Figura 6 hemos trazado, además, el segmento CP extendiéndolo en P hasta que interseca en el punto G a la circunferencia con centro P que pasa a través de los puntos A y B y el segmento AF extendiéndolo en F para que interseque la circunferencia original en D y la circunferencia Q en E . Demostraremos el siguiente

1. Teorema: El punto F es el incentro del triángulo ABC , el punto G es el excentro del triángulo ABC opuesto al vértice C y el punto E es el excentro del triángulo ABC opuesto al vértice A .

Antes de demostrar el Teorema 1 presentamos algunos comentarios

- a) Si trazamos el segmento BF y lo extendemos en F para intersecar la circunferencia Q , obtendremos en tal punto de intersección el excentro del triángulo ABC opuesto a B . No lo hemos hecho para no complicar innecesariamente la Figura 7.
- b) Si el vértice C del triángulo ABC se ubicase en el semiplano de la recta AB que contiene al punto nodal P , entonces los roles de las circunferencias P y Q se intercambiarán en los argumentos. Presentaremos la demostración del Teorema 1 suponiendo que el punto C está donde se muestra en la figura (es decir, en el semiplano determinado por AB en el que se encuentra el punto nodal Q).
- c) Una vez demostrado el Teorema 1. Podremos entonces concluir que la unión de los lugares geométricos de los incentros y los excentros de un triángulo ABC inscrito en una circunferencia O cuando el vértice C ocupa posiciones arbitrarias de la circunferencia, es la unión de las dos circunferencias cuyos centros son los puntos nodales P y Q y que contienen los puntos A y B^A . Claramente, dada una posición del vértice C del triángulo ABC inscrito en la circunferencia O , todos los puntos y segmentos definidos en la Figura 6 quedan determinados, de manera que por el Teorema 1, el incentro y los excentros del triángulo ABC quedan en una de las dos circunferencias nodales. Inversamente, si se toma un punto cualquiera en una de las circunferencias modales, es fácil ver que el punto define una posición única del vértice C de manera que el punto es uno del incentro o los excentros del triángulo.

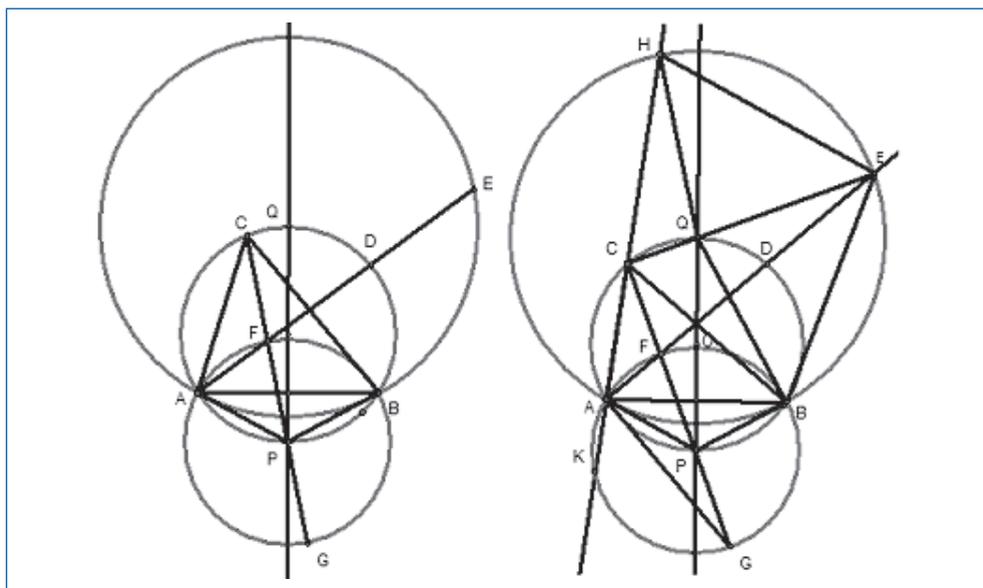


Figura 7.

En la discusión que sigue emplearemos el gráfico de la derecha en la Figura 7 el cual contiene algunos segmentos y puntos auxiliares que no se incluyen en el gráfico de la izquierda de la misma figura, el cual ya se ha explicado. Resumiendo, tenemos una circunferencia O con una cuerda AB como se muestra. El punto C en la circunferencia conforma un triángulo inscrito en O , el triángulo ABC . Los puntos nodales P y Q , hemos visto, se definen como la intersección de la recta perpendicular al segmento AB con la circunferencia O . Se han trazado las circunferencias con centros Q y P a través de A . Note que estas circunferencias también contienen al punto B ya que P y Q , por estar en la bisectriz perpendicular de AB , equidistan de los puntos A y B . Suponemos que el punto C está en el mismo lado (semiplano) de AB que Q ; el argumento en el caso que C quedase en el lado opuesto, es decir en el mismo semiplano de AB que P , se trata de manera totalmente análoga.

El segmento CP que interseca la circunferencia P en F se extiende en P para intersecar la circunferencia P en G , en el lado opuesto de donde se encuentra F respecto a la recta AB . Se construye el segmento AF y se extiende en F de manera que corta la circunferencia O en D y la circunferencia Q en E , como se muestra. Finalmente, para manejar los ángulos externos del triángulo ABC en A y en C , extendemos el lado AC en ambos lados para intersecar la circunferencia Q en H y la circunferencia O en K como se muestra. Demostraremos:

- i. CF es la bisectriz del ángulo C del triángulo ABC ;
- ii. AG es la bisectriz del ángulo externo del triángulo ABC en A desde C , de modo que G es el excentro del triángulo ABC opuesto a C ;
- iii. E es el excentro del triángulo ABC opuesto al punto A .

Como los arcos AP y PB son congruentes ya que subtienden cuerdas congruentes (AP y PB), vemos que los ángulos ACP , PCB , PAB y PBA son todos congruentes y tienen una medida común, digamos b . Esta observación, dicho sea de paso, demuestra i. Si el ángulo DAB mide c , como PF y PA son radios de la circunferencia P , el ángulo AFP mide $b+c$, al igual que el ángulo opuesto por el vértice CFD . Por lo tanto la suma de los ángulos internos del triángulo AFC en sus vértices A y C es $b+c$, la medida de su ángulo externo CFD . Como el ángulo ACP mide b , está claro que el ángulo CAD mide c , de manera que AD (o AE) biseca el ángulo CAB . Como FAG es un ángulo recto (ya que subtiende un diámetro de la circunferencia P), vemos que el ángulo PAG mide $90-b-c$. Además, como CAK es un ángulo rectilíneo, vemos que el ángulo KAG mide $90-c$. Por lo tanto el ángulo BAG mide $b+(90-b-c)=90-c$, de manera que AG biseca el ángulo externo KAB del triángulo ABC , lo cual completa la demostración de ii y muestra que G es el excentro opuesto a C del triángulo ABC .

Finalmente, como QH , QE y QB son radios de la circunferencia Q , estos segmentos son congruentes. Recordando que el segmento AE biseca al ángulo A del triángulo ABC , vemos los arcos HE y EB son congruentes, ya que los ángulos HAE y EAB , inscritos en la circunferencia Q , son congruentes. Las cuerdas sustentadas por estos arcos, HE y EB son también congruentes y los triángulos HQE y EQB son a su vez congruentes. Por lo tanto los ángulos EQH y BQE son congruentes y lo mismo ocurre con los ángulos HQC y BQC . Como hemos visto que QH y QB son congruentes, los triángulos CQH y CQB son congruentes, de manera que los ángulos HCQ y BCQ son congruentes. Esto muestra que CE es la bisectriz del ángulo externo BCH del triángulo ABC , de suerte que E es el excentro del triángulo ABC opuesto a A . Con este argumento se completa la demostración del iii y del Teorema 1.

CONCLUSIÓN

En su escrito, Polya (1954) muestra el rol que juega el pensamiento plausible y el acto de proponer conjeturas en la creación matemática. Polya emplea la frase “*deus ex machina*” (frase latina que significa literalmente “dios surgido de la máquina”) para referirse a argumentos matemáticos que surgen de recursos en nada relacionados con la lógica del problema bajo consideración. La frase parece provenir de algunas representaciones del teatro griego antiguo en las que se requería que una “máquina” (grúa) trajera a una deidad al escenario para resolver alguna situación problemática entre los protagonistas de la obra teatral.

En la matemática, Polya emplea la frase para referirse a elementos ajenos que podrían introducirse en un problema matemático para resolverlo de manera poco evidente y oscura, al menos, sin que el método de solución guarde relación directa con las consideraciones que el problema despierta en nuestra mente. Los matemáticos y los estudiantes serios de la matemática sentimos pavor los argumentos *deus ex machina*, ya que ellos en poco contribuyen a la comprensión de una materia por un estudiante que está tratando de aprender. En Polya (1954, p. 146) se presenta un argumento con un ejemplo del recurso lógico del que hablamos. El fin del discurso matemático es alcanzar una exposición en la

que todos los razonamientos sean “naturales” y que surjan de consideraciones, a priori, germanas con el problema bajo consideración. De acuerdo a Polya (1954), los argumentos *deus ex machina* que con frecuencia se observan en las demostraciones formales de enunciados matemáticos parecen, de alguna manera, oponerse al desarrollo de argumentos plausibles en el estudio de la matemática, los cuales, sin duda, son extremadamente útiles en la didáctica de esta materia. Haciendo una reflexión retrospectiva sobre nuestro curso de geometría dinámica (el cual mencionamos al comienzo del artículo), podemos afirmar que hemos puesto todo nuestro empeño en promover en los alumnos el desarrollo de argumentos, de alguna manera germanos, a la exploraciones realizadas para sustentar conjeturas descubiertas mediante el empleo de programas de exploración geométrica.

En este escrito el lector podrá juzgar con estos dos ejemplos sencillos que siguen y el ejemplo del la circunferencia de Feuerbach ya discutido, si de alguna manera hemos tenido éxito en nuestro empeño. Si embargo, a nuestro juicio, es casi imposible exagerar el estímulo que tales programas suponen para desarrollar en los alumnos la creatividad y la búsqueda del enunciado plausible que describe adecuadamente una situación geométrica.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Campistrous, L. A., López, J. M. y Velázquez, W. (2003). *La heurística en la enseñanza de la geometría: el teorema de Ceva. Epsilon*, N° 55., 77-92
- Campistrous, L. A. y López, J. M. (2001). *La calculadora como una herramienta heurística. Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, (28), 84-99.
- Coxeter, H. S. M. y Greitzer, S. L. (1967). *Geometry Revisited*. Washington, DC: MAA
- Polya, G. (1957). *How to solve it*. Garden City, NY: Doubleday..
- Polya, G. (1054). *Mathematics and Plausible Reasoning*. Vols. I and II. New Jersey: Princeton University Press,
- Weisstein, Eric W. (n. d.) “Varignon’s Theorem.” From MathWorld-A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/VarignonsTheorem.html>
- Weisstein, Eric W. (n. d.) “Nine-Point Circle.” From MathWorld-A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/Nine-PointCircle.html>
- Weisstein, Eric W. “Ceva’s Theorem.” From MathWorld-A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/CevasTheorem.html>

NOTAS

1. El teorema de Varignon asevera que si se unen en forma ciclida los puntos medios de los lados de un cuadrilátero convexo se obtiene un paralelogramo; véase [Coxeter y Greitzer, 1967, Quadrangles; Varignon’s Theorem.” §3.1].
2. También conocida como la circunferencia de Euler o de Feuerbach.

3. Es decir, los ángulos opuestos de cuadrilátero son suplementarios y de acuerdo a una conversación previa del curso, todo cuadrilátero cíclico se puede inscribir en alguna circunferencia.
4. Estrictamente hablando, el lugar geométrico no existe cuando el vértice C coincide con uno de los puntos A o B ya que el triángulo es ABC uno degenerado.