CB-54

VISUALIZACIÓN DE LA DERIVADA PARCIAL DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES POR MEDIO DE UNA SITUACIÓN DIDÁCTICA CON ESTUDIANTES DE INGENIERÍA

Katia Vigo Ingar – María José Ferreira da Silva
kvigo@pucp.pe – zeze@pucsp.br
Pontificia Universidad Católica del Perú- Pontificia Universidade Católica de São Paulo, Brasil

Núcleo temático: Investigación en Educación Matemática
Modalidad: CB
Nivel educativo: Terciario o Bachillerato (16 a 18 años)
Palabras clave: Visualización, Derivadas Parciales, Ingeniería Didáctica.

Resumen
En las últimas dos décadas, el estudio de las funciones de dos variables, en particular, las derivadas parciales de este tipo de funciones y su aplicación a problemas de optimización está teniendo un desarrollo progresivo. Sin embargo, son escasos los estudios sobre visualización de este tipo de funciones. Estos autores coinciden al afirmar que, respecto a las derivadas parciales de primer orden, los estudiantes tienen problemas en su representación simbólica y gráfica. En esta investigación extendemos el trabajo de Duval al estudio de la visualización en el registro gráfico. Así, el objetivo del artículo es analizar el proceso de visualización de la derivada parcial en el aprendizaje del punto de silla por medio de una situación didáctica. Utilizamos como metodología la Ingeniería Didáctica y los análisis nos permiten afirmar que la situación didáctica propuesta provocó en los estudiantes un desequilibrio cognitivo, porque creían que la anulación de las derivadas parciales en un punto de una función de dos variables, indicaba siempre la presencia de valor máximo o valor mínimo. Y, además, los estudiantes desarrollaron su proceso de visualización pues, transitaron por las diferentes aprehensiones, lo que permitió que los estudiantes relacionen los valores visuales pertinentes del gráfico con los valores significantes del registro algebraico.

Introducción

El cálculo en varias variables es, en algunos aspectos, un curso de geometría diferencial clásica en tres dimensiones, porque es el estudio de propiedades locales de superficies, que entendemos son aquellas que dependen únicamente del comportamiento de la superficie en el entorno de un punto. Los métodos que han demostrado por sí mismos adecuados para el estudio de esas propiedades son los del cálculo infinitesimal; por este motivo, las superficies estudiadas en geometría diferencial están representadas por funciones que

ISBN 978-84-945722-3-4

pueden diferenciarse un cierto número de veces. Dicho lo anterior, estamos de acuerdo con Zimmerman y Cunningham (1991) cuando afirman que las derivadas parciales, las derivadas direccionales, el gradiente, los planos tangentes, las curvas de nivel y las técnicas para formular integrales iteradas están motivados geométricamente.

Con respecto a la enseñanza y el aprendizaje de la derivada parcial y su uso en el estudio de los valores extremos locales y punto de silla, la representación de este objeto, el tratamiento y la conversión entre registros, el algebraico y el gráfico, son frecuentes en las prácticas del profesor de matemática, cuando por medio de tratamientos en el registro algebraico soluciona un problema o cuando pretende hacer que el estudiante comprenda esa noción de difícil entendimiento, por medio de una ilustración (una representación icónica). En el momento en que el profesor realiza esa conversión, no significa que él logre que el estudiante visualice una relación entre los dos registros que movilizó.

Más aún, en la mayoría de libros didácticos que analizamos (Ingar, 2014), la conversión de la representación algebraica de la derivada parcial para su representación en el registro gráfico a fin de estudiar los valores extremos locales y el punto de silla, no es explorada a menudo; sino que es realizada sólo para ilustrar esos valores y para que el estudiante vea una representación icónica de esos valores y del punto silla, sin explicar el proceso que permite la visualización de esos valores.

Así, el propósito del artículo es analizar el proceso de visualización de la derivada parcial en el aprendizaje del punto de silla por medio de una situación didáctica, con la que interactuó un grupo de estudiantes de ingeniería del segundo año de estudios.

Para tal los estudiantes utilizaron la versión 8 del software *CAS Mathematica*, dado que, estaba instalado en los computadores del laboratorio de cómputo, escenario donde se realizó la experimentación, porque permite la manipulación en el registro gráfico en tres dimensiones lo que facilita el proceso que lleva a la visualización de un representante de la función de dos variables en el registro gráfico.

1. Fundamentación teórica

Para Duval (1999), la visualización es una actividad cognitiva intrínsecamente semiótica, siendo esta actividad de representación y no solo de percepción. El investigador afirma que la visualización se basa en la producción de una representación semiótica, dado que muestra una organización de relaciones entre unidades significantes de representación. Del

ISBN 978-84-945722-3-4

mismo modo Duval (2004) señala que los gráficos se prestan para verlos de dos maneras: una puntual y otra icónica; sin embargo, ninguna de las dos maneras de ver corresponden con la manera de ver que permita visualizar una relación entre dos conjuntos de valores. "En matemáticas, los gráficos cartesianos se utilizan siempre en articulación con otro registro de representación; además deben permitir tratamientos cualitativos propios a este modo de visualización [...] Llamaremos a esta tercera manera de ver "aprehensión global cualitativa" (Duval, 2004, p.66).

Para el autor, uno de los problemas específicos del aprendizaje, es hacer transitar a los estudiantes de una aprehensión local e icónica a una aprehensión global cualitativa. Este tránsito exige un cambio absoluto del funcionamiento cognitivo del acto de "ver". Lo fundamental en la comparación de estas tres maneras de ver un gráfico cartesiano, particularmente, un gráfico cartesiano en R^3, está en el hecho que no discriminan las mismas variables visuales. Más aún, la discriminación de las variables visuales cualitativas de un gráfico cartesiano en R^3 no ocurre de manera inmediata (Ingar y Silva, 2015).

Estas tres maneras de ver están estrechamente relacionadas conforme las aprehensiones sean exigidas al resolver un problema del cálculo diferencial, en particular, cuando queremos estudiar valores extremos y puntos de silla de funciones de dos variables. En la manera de ver puntual se exige la aprehensión perceptiva, en la tercera manera de ver participan todas las aprehensiones.

En relación a la identificación de un valor mínimo de una función de dos variables en su registro gráfico, esta asociación se da entre puntos y ternas ordenadas, es decir, de la representación de la función en el registro algebraico, por ejemplo como se muestra en la figura 1, $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$ hacia el gráfico de su valor mínimo $\left(0,0,f(0,0)\right) = (0,0,1)$.

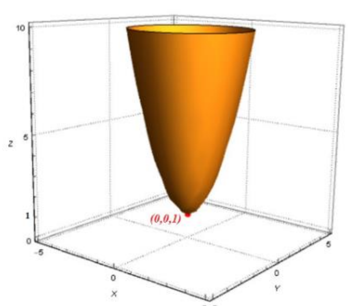


Figura 1. Aprehensión local del valor mínimo local.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Por ello, la aprehensión local se limita a operaciones locales y sucesivas de codificación y decodificación, que es equivalente a una lectura del gráfico de la función. Aquí predomina la aprehensión perceptiva.

En cuanto a la identificación de un valor máximo de una función de dos variables en su registro gráfico, Ingar y Silva (2015) afirman que la variable visual pertinente es el valor del eje *z*, conforme se muestra en la figura 2, esta variable se fusiona con una segunda variable visual no conveniente: la altura, dado que comparan algunos valores del eje z hasta obtener el mayor posible.

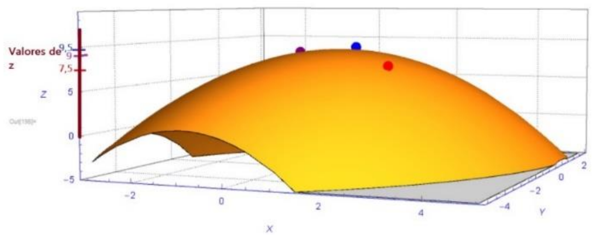


Figura 2. Aprehensión icónica del valor máximo.

Resaltamos que para discriminar la variable visual pertinente, por la aprehensión operatoria realizamos modificaciones posicionales en el registro gráfico (Ingar y Silva, 2017). En esta segunda manera de ver existe conexión entre la aprehensión perceptiva y operatoria.

Respecto a la identificación del valor mínimo de una función de dos variables en su registro gráfico, discriminamos los diferentes valores visuales pertinentes y los asociamos con valores significantes del registro algebraico, sólo así efectuamos la coordinación de registros (Ingar, 2014; Ingar y Silva, 2015). Además, conforme muestra la figura 3, observamos que el plano representado por *z=0* es tangente a la función, es decir, $f_x(1,-1) = 0$ y $f_y(1,-1) = 0$. Entonces (1,-1) es un punto crítico de la función.

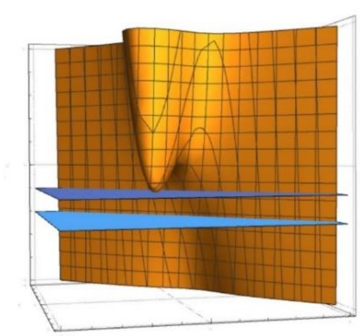


Figura 3. Representación de la función y su plano tangente en

ISBN 978-84-945722-3-4

(1,-1) en el registro gráfico.

En esta manera de ver, transitamos por las diferentes aprehensiones: perceptiva, operatoria, discursiva y secuencial, esta última por medio de los comandos implementados en el *Mathematica* (Ingar y Silva, 2017).

2. Metodología

Según Artigue (1988), la Ingeniería Didáctica vista como metodología de investigación, se caracteriza en primer lugar por ser un esquema experimental basado en realizaciones didácticas en la clase, es decir, en la concepción, en la realización, en la observación y en el análisis de secuencias de enseñanza. Para la autora, esta metodología se caracteriza también, respecto a otros tipos de investigaciones basados en las experimentaciones en clase, por el registro en la cual se sitúan y por los modos que le están asociados.

La Ingeniería Didáctica se sitúa en el registro de estudios de casos, cuya validación es esencialmente interna y fundamentada en la comparación entre el análisis a *priori* y el análisis a *posteriori*. Así, esta metodología es singular, no por los objetivos de las investigaciones llevadas a cabo, sino por las características de su funcionamiento.

En este artículo presentamos la cuarta situación didáctica correspondiente al cuarto encuentro con los estudiantes del grupo 4, la cual tuvo como objetivo hacer conjeturas sobre el hecho de que no todo punto crítico es un valor extremo local. En las situaciones didácticas anteriores los estudiantes desarrollaron el proceso de visualización del valor máximo y mínimo local, lo que les permitió construir los conocimientos relacionados al teorema de extremos relativos.

3. Situación Didáctica

En la actualidad, observamos muchas construcciones con diseños arquitectónicos modernos, por ejemplo, el edificio Copam, en São Paulo, cuya arquitectura en forma de “S” es un símbolo de la ciudad y la Capilla Lomas de Cuernavaca, en México, mostrada en la figura 4.

(1) (2)

Figura 4. Figuras de la Capilla

ISBN 978-84-945722-3-4

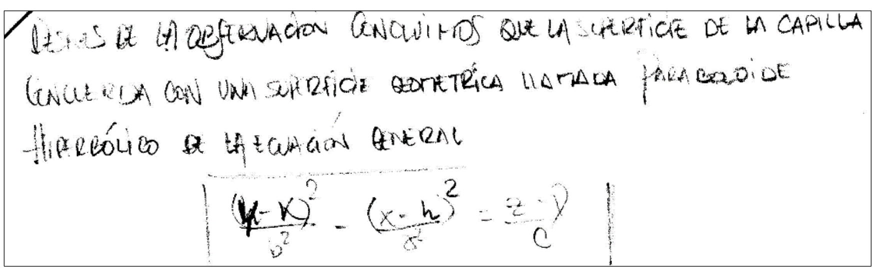
La doble curvatura de esta Capilla es óptima para soportar las tensiones, presión y flexión de la construcción, que tiene resistencia de carga y costo de construcción barato. Considerando las situaciones anteriores, ¿qué observa en este diseño particular? Justifica tu respuesta.

Análisis a *priori*

Esperamos que los grupos a partir de las representaciones figurales reconozcan y formulen que esas representaciones, en el registro gráfico, son semejantes al objeto matemático llamado paraboloide hiperbólico. Asimismo, los grupos podrían representarlo, en el registro algebraico y realizar la conversión de dicha representación para el registro gráfico. Ya en el registro gráfico, esperamos que los estudiantes por su aprehensión operatoria discriminen las variables visuales y realicen la interpretación discursiva de los elementos significantes del registro algebraico, es decir, esperamos que los estudiantes desarrollen su aprehensión global cualitativa. Luego los estudiantes formularían que la función que simula la capilla, no tiene ni valor máximo ni valor mínimo, y que las derivadas parciales de primer orden no son suficientes para conocer la naturaleza de los valores extremos locales. Más aún, esperamos que formulen la necesidad de usar las segundas derivadas parciales.

Análisis a *posteriori*

El grupo 4, en un primer momento, realiza la conversión del paraboloide hiperbólico en el registro figural (figura 4) para el registro algebraico, conforme muestra la figura 5.


DESPUES DE LA OBSERVACION CONCLUIMOS QUE LA SUPERFICIE DE LA CAPILLA CONCUERDA CON UNA SUPERFICIE GEOMÉTRICA LLAMADA PARABOLOIDE HIPERBÓLICO DE ECUACIÓN GENERAL

$$\frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(x-h)^2}{a^2} = \frac{z-l}{c}$$

Figura 5. Conversión de la representación en el registro algebraico

Luego, basándose en su aprehensión perceptiva, identifica los valores extremos locales de manera icónica, como estamos considerando en la figura 6. Hecho que no habíamos supuesto en el análisis a *priori*.

ISBN 978-84-945722-3-4

Figura 6. Manera de ver icónica

A continuación el grupo realiza la conversión del paraboloide hiperbólico del registro algebraico al registro gráfico como lo habíamos supuesto en el análisis a *priori*.

En un cuarto momento, movilizando sus conocimientos previos sobre la derivada parcial (obtenidos en tres situaciones didácticas previas) y por medio de su aprehensión operatoria, es decir, realizaron modificaciones ópticas, posicionales y mereológicas en el registro gráfico, el grupo discrimina las variables visuales y comienza a asociar con los valores significantes en el registro algebraico, aprehensión discursiva. Hecho que habíamos supuesto en el análisis a priori y significa que la manera de ver del grupo pasa del icónico a la aprehensión global cualitativa, como muestra la figura 7.

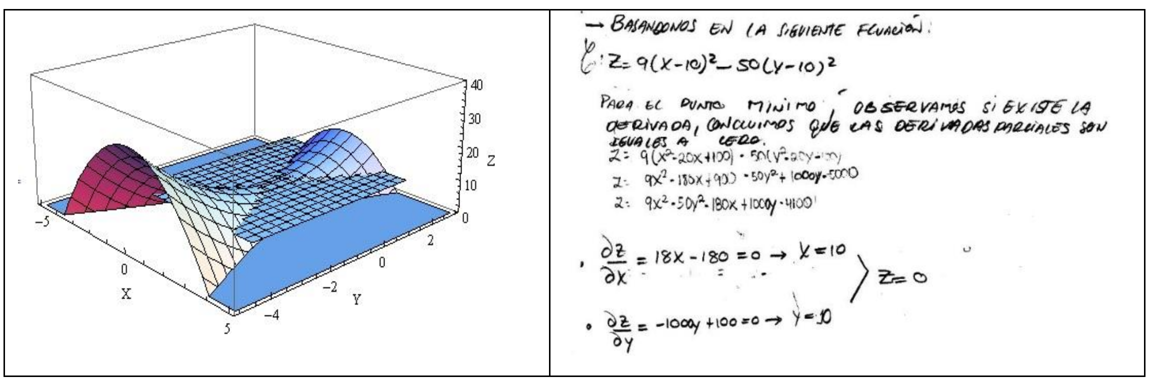


Figura 7. Interpretación discursiva de las variables visuales

Sin embargo, el grupo percibe que no existe plano horizontal tangente a la superficie en el punto (0,0) y contradice lo que habían supuesto al inicio de que el punto (0,0) era mínimo local (ver figura 8).

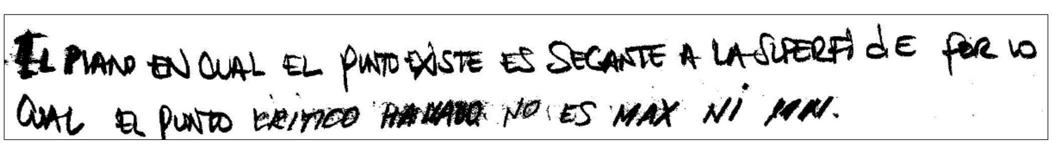


Figura 8. Consecuencia de su aprehensión global cualitativa.

ISBN 978-84-945722-3-4

Después de diversas discusiones entre los miembros del grupo, llegan a conjeturar que el punto (0,0) no es ni máximo ni mínimo local y que una función no necesariamente tiene valor máximo o valor mínimo en un punto crítico, como se muestra en la figura 9.

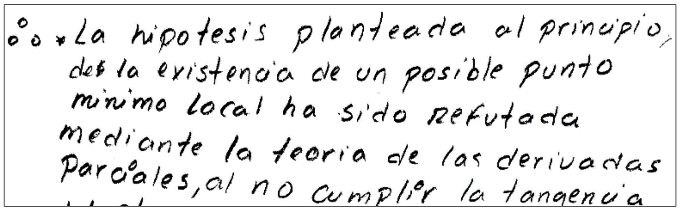

La hipotesis planteada al principio, del la existencia de un posible punto minimo local ha sido refutada mediante la teoria de las derivadas parciales, al no cumplir la tangencia

Figura 9. Conclusión del grupo en el registro de lengua natural.

4. Consideraciones Finales

Los análisis nos permiten afirmar que la situación didáctica propuesta provocó en los estudiantes un desequilibrio cognitivo, porque creían que la anulación de las derivadas parciales en un punto de una función de dos variables, indicaba siempre la presencia de valor máximo o valor mínimo. Lo que motivó a buscar un nuevo saber: el uso de las segundas derivadas parciales.

La manera de ver los gráficos, en particular los gráficos tridimensionales, por parte de los estudiantes dependió de la comprensión del funcionamiento del sistema de representación y de la transición por las diferentes aprehensiones, predominando la aprehensión perceptiva, lo que permitió que los estudiantes relacionen los valores visuales pertinentes del gráfico con los valores significantes del registro algebraico. Hecho que nos permite afirmar que los estudiantes desarrollaron su proceso de visualización.

Los estudiantes desarrollaron su proceso de visualización pues, transitaron por las diferentes aprehensiones, lo que permitió que los estudiantes relacionen los valores visuales pertinentes del gráfico con los valores significantes del registro algebraico, lo que corresponde a la tercera manera de ver, la aprehensión global cualitativa.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1988). Ingénierie Didactique. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 9(3), pp. 281-308.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. En F. Hitt y M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st North American PME Conference*, *1*, pp. 3-26.

ISBN 978-84-945722-3-4

Duval, R. (2004). *Los problemas Fundamentales en el Aprendizaje de la Matemáticas y las Formas Superiores en el Desarrollo Cognitivo*. Traducción de Myriam Vega Restrepo. Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.

Ingar, K. (2014). *A visualização na Aprendizagem dos Valores Máximos e Mínimos Locais da Função de Duas Variáveis Reais*. (Tesis doctoral en Educación Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, Brasil.

Ingar, K. y Silva, M. (2015). A visualização de valores máximos e mínimos de funções de duas variáveis. 12th International Conference on Technology in Mathematics Teaching, pp.687-695.

Ingar, K y Silva, M. (2017). Apprehensions in the graphic register of two variable functions. *Mathematics and Statistics, 5*(2), 57-61. doi: 10.13189/ms.2017.050201.

Zimmermann, W. y Cunningham, S. (Eds) (1991). Visualization in Teaching and Learning Mathematics, MAA Notes n. 19.

ISBN 978-84-945722-3-4