

LA ENSEÑANZA Y APLICACIÓN DE DISTRIBUCIONES PROBABILÍSTICAS PARA LA RESOLUCIÓN DE UN MODELO ESTOCÁSTICO REAL MEDIANTE LA SIMULACIÓN NUMÉRICA

María Valeria Calandra
mava@mate.unlp.edu.ar

Gamefi – Departamento de Ciencias Básicas – Facultad de Ingeniería – Universidad
Nacional de La Plata - Argentina

Tema: I.5 - Pensamiento relacionado con la Probabilidad.

Modalidad: P

Nivel educativo: Terciario - Universitario

Palabras clave: Distribuciones de probabilidad, problema integrador, simulaciones.

Resumen

Principalmente, este trabajo tiene como objetivo ayudar a los docentes a encarar ciertas problemáticas específicas en el dictado de la asignatura Probabilidades de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata, que corresponde al área de las ciencias básicas, y se dicta para los alumnos de segundo año de las carreras de Ingeniería, en el marco del proyecto de mejora continua de la enseñanza de grado. En este sentido se presenta un trabajo integrador que tiene como fin afianzar el conocimiento y enlazar las temáticas de la asignatura Probabilidades, aplicando sus conceptos a la solución de un problema complejo de la vida real, realizado mediante una simulación numérica. La propuesta pretende plasmar el análisis y aplicación de distribuciones de probabilidad vistas en el curso para mostrar como pueden ser aplicadas para la resolución de modelos estocásticos que simulan un proceso real, basado en las problemáticas de las teorías de colas.

1. Introducción

Dentro de los programas de las carreras de Ingeniería siempre se presenta la asignatura Probabilidades en los primeros años, en particular en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata se corresponde con el segundo año para todas las carreras que se cursan. En virtud de la mejora continua de la enseñanza de grado se buscan alternativas con el objeto de que los alumnos logren de una mejor manera adquirir los conocimientos, reduciendo el grado de desgranamiento observado en la evolución de las distintas cohortes a lo largo de la carrera. La enseñanza de la asignatura Probabilidades resulta difícil pues su contenido como todo contenido matemático se basa en ideas abstractas que mayormente resultan engorrosas para el alumno. La forma clásica de las explicaciones en dicha asignatura siempre se basan en problemas, como ser: “lanzo un dado, que probabilidad tengo de sacar el número 2”, “arrojo una moneda,...”, o se utilizan ejemplos de juegos de azar, etc. En general, no se le presenta al alumno un problema real en el cual tenga que integrar o relacionar varios conceptos de probabilidades para su resolución. Muchas veces el alumno comprende los temas que

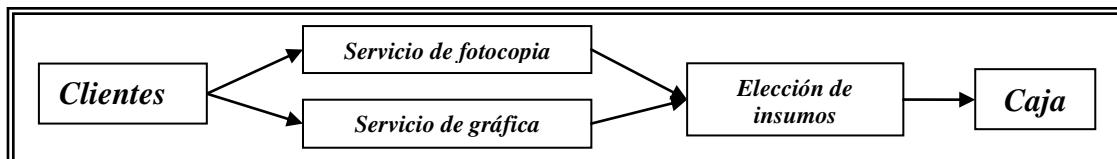
se le han planteado pero no le es suficiente para resolver situaciones complejas que relacionen todo lo estudiado, o no es capaz de discernir en que situaciones le es útil lo aprendido. Para buscar soluciones a estos problemas es necesario actuar sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje. Una de las estrategias para lograr un conocimiento significativo en los alumnos es promover procesos que en lugar de partir de los abstracto, de la teoría, del teorema, para llegar a lo concreto... se hace lo contrario: se enfatiza la participación activa de los estudiantes en la resolución de problemas asociados a su propio entorno físico, social, cultural... o problemas que puedan ser fácilmente imaginados por los estudiantes. Se pretende la construcción de capacidades para la manipulación de objetos matemáticos cuya naturaleza es abstracta. Siempre se habla de la aplicación de los recursos informáticos al aula. La computadora resulta muy útil cuando el problema a resolver requiere de muchos cálculos complejos. Para resolver estas problemáticas propongo el planteo de un problema integrador, para sintetizar y conceptualizar los contenidos de la asignatura, utilizando recursos informáticos. Se buscan estudiar dentro de los procesos estocásticos que dependen del tiempo, las problemáticas de las líneas de espera y los tiempos de servicio. Se trata de introducir un problema de la vida cotidiana en el cual se produzcan colas o líneas de espera. Estos fenómenos ocurren, cuando la demanda de algún servicio supera la capacidad de atención del mismo. Hay innumerables casos en los que se presenta este problema, como por ejemplo el servicio de atención de un cliente en una caja de un banco, el sistema de peaje en una autopista, la atención de clientes en un comercio, etc. Un análisis y estudio de estos fenómenos mediante la teoría de colas daría una respuesta adecuada. Aquí no se busca realizar una explicación de los diversos modelos de la teoría de colas, sino establecer una manera de realizar un análisis para un caso particular. La temática de la teoría de colas resulta un problema complejo de analizar, comprender y sobre todo explicar al alumno y en los cursos de grado de probabilidades no está dentro del programa. En este trabajo se presenta una forma de encarar el problema utilizando solamente simulación, el concepto de generación de muestras aleatorias de distintas distribuciones y la relación entre algunas de ellas, en este caso hemos utilizado las distribuciones: Poisson, Exponencial, Uniforme y Normal.

2. Problema integrador a resolver

Es conocida la problemática que se presenta cuando una persona ingresa a un comercio en horas pico, y los tiempos que se demora en realizar las compras que pretende. Aquí presentaremos el caso de un comercio de venta insumos de oficina y servicios de

papelería. Supongamos que se quiere analizar el sistema de atención al cliente en un determinado horario, entre las 11:30 y las 13 hs (hora de cierre). En estas condiciones impondremos una probabilidad de la llegada de los clientes en grupos de 1 y 2 personas a la vez, con sus probabilidades asociadas 0,6 y 0,4 respectivamente. Las llegadas de los grupos siguen un proceso de Poisson con tasa de arribos de un grupo cada 60 segundos por lo tanto los tiempos entre llegadas de los grupos están distribuidos exponencialmente con una media de 60 segundos debido a la relación conocida entre ambas distribuciones. Inicialmente el sistema está ocioso, es decir que no hay clientes, y que comienzan a llegar en dicho momento y por un período de una hora y media. Los clientes que llegan pueden dividirse para realizar distintas compras, unos se acercan para sacar fotocopias y comprar algún insumo, otros solicitan algún trabajo gráfico y además compran algún insumo de oficina. Se considera que los insumos se obtienen mediante un sistema de autoservicio en el local. Si cada cliente que llega, sea individualmente o en grupo, realiza una de las operaciones indicadas y que en todos los casos los clientes deben realizar un pago por su compra de insumos y el servicio, podemos considerar que para cada cliente se puede definir una especie de "ruta", a saber: servicio de fotocopias+compra de insumos+pago en cajero y servicio de gráfica+compra de insumos+pago en cajero. Cada una tiene una probabilidad de ocurrencia 0,7 y 0,3 respectivamente. Los clientes son atendidos de a uno por vez. En la compra de insumos los clientes retiran los mismos sin necesidad de hacer una cola, es decir que se puede considerar como si estuvieran atendiendo infinitos empleados. En el local se considera que hay una sola caja de pago con un cajero y tiene su propia cola. En todos los casos el modelo considera que en todas las colas se atiende primero al primero que llega. Para el caso del servicio de fotocopias en el mostrador la atención está uniformemente distribuida entre 50 y 120 segundos, la atención para el servicio de gráfica está normalmente distribuida con media 120 segundos y desviación típica de 30 segundos, y el tiempo que tarda en seleccionar los insumos está uniformemente distribuido entre 5 y 20 segundos. El cajero emplea un tiempo uniformemente distribuido entre 20 y 40 segundos para facturar el servicio de fotocopias, un tiempo normalmente distribuido con media 10 segundos y desviación típica de 2 segundos para el caso del servicio de gráfica, y un tiempo uniformemente distribuido entre 5 y 10 segundos para las compras de insumos. En todos los casos se deben sumar los tiempos de cajero para conocer el tiempo en el cajero para las distintas rutas. Con estas condiciones se plantea la necesidad de conocer la espera media y máxima en la ruta de

servicio de fotocopia, servicio de gráfica y cajero. El número medio y máximo de personas en la cola de servicio de fotocopia, servicio de gráfica y en cajero. Además, la espera media y máxima en todas las colas para los clientes de las dos rutas. Por último el tiempo medio total de espera para todos los clientes y el tiempo medio y máximo número total de clientes en el sistema simulado.



Esquema del proceso del servicio

3. Desarrollo y solución del problema

A partir del problema planteado se buscará, con las herramientas probabilísticas conocidas, establecer su solución. Para ello se propone ir planteando el problema, paso a paso, implementando la simulación que nos de las respuestas a estos interrogantes.

Para modelar la situación de las llegadas de los clientes se consideró la siguiente situación: los mismos pueden llegar en grupos de 1 y 2 personas con probabilidades: 0,6 y 0,4 respectivamente, los tiempos entre llegadas de los grupos siguen una distribución exponencial, y se dividen a la llegada (además cada persona toma su propia decisión en cada grupo) tomando una de las siguientes dos rutas a través del local:

- a) Servicio de fotocopia, elección de los insumos y luego el cajero (probabilidad 0,7).
- b) Servicio de gráfica, elección de los insumos y luego el cajero (probabilidad 0,3).

Se consideró que los arribos siguen una distribución de tipo Poisson, modificando la tasa de arribos de acuerdo al tipo servicio seleccionado y considerando si la persona llega sola o acompañada. Mostramos el caso del servicio de fotocopia:

a1) Para el arribo de una persona sola dentro de un grupo individual la tasa de arribos Poisson considerada fue $R1=90*0,6*0,7$. (Dado que 90 es la tasa de arribo de los grupos durante la hora y media motivo del trabajo, 0,6 es la probabilidad de arribo de una persona sola y 0,7 es la probabilidad de elegir el servicio de fotocopia). Para considerar la hora de arribo se consideró una exponencial con media $1,5/R1$ (que es el tiempo medio de este tipo de arribos por hora) (código, ver Anexo I 1)).

a2) Para el arribo de una persona sola dentro de un grupo de dos personas la tasa de arribos Poisson considerada fue $R2= 90*0,4*\binom{2}{1}0,7*0,3$. (Ídem anterior). De igual

manera para la hora de arribo se usó una exponencial con media $1,5/R2$ (igual al caso anterior).

a3) Para el arribo de dos personas dentro de un grupo de dos personas la tasa de arribos Poisson considerada fue $R3 = 90 * 0,4 * \binom{2}{2} 0,7^2 * 0,3^0$. (Ídem). Hora de arribo: exponencial con media $1,5 / R3$ (igual al caso anterior). De igual forma se realizó para el servicio de gráfica. Luego se establecen los tiempos de servicio para cada tipo de cliente. Daremos como ejemplo el caso de la atención en el servicio de fotocopia. En ese caso el tiempo de servicio μ_i fue obtenido por una generación de números al azar correspondiente a un distribución uniforme entre 0,0138 hs. y 0,0333 hs. (función tss(i) en el Anexo I 2)). Para los demás se estableció la misma metodología, considerando el tipo de distribución indicado. (ver código en Anexo I 2)). Para contabilizar el tiempo de espera en la cola del servicio de fotocopia se ordenó el vector de tiempos de llegadas de los clientes a este servicio y luego se comparó para cada individuo (cada componente del vector) su tiempo de llegada con el tiempo de llegada más el de servicio del cliente predecesor; en caso de ser este último mayor que el primero, se considera que el sistema se haya demorado y se contabiliza dicha demora simplemente por la diferencia entre estos tiempos. (como se observa en el script 2) Anexo I, tecc(i)). Calculado este tiempo de espera se establece un nuevo vector que contabiliza, por un lado los mencionados tiempos de espera para cada cliente, y a estos se les suma el tiempo de servicio, obteniéndose finalmente el momento exacto de salida de dicho servicio. Se eliminan aquellos clientes que demoran más de una hora y media en salir del servicio. Seguidamente se computan los nuevos tiempos de servicio, para estos clientes, ya que hay que adicionarle la demora en el autoservicio de insumos (el tiempo que tarda el cliente en elegir los insumos sigue una distribución uniforme en el intervalo de 5 a 20 segundos (tsbcc(i) en el código del Anexo I 3)). Al salir de estos servicios, cualquiera de los clientes se dirige a la caja donde se enfrenta a una nueva cola, aquí encontramos la problemática de concatenar colas entre sí, además de unificar los clientes que provienen de colas diferentes, el cual es un problema normalmente dificultoso de analizar y modelar. El tiempo de atención en la caja de los clientes que provienen del servicio de fotocopia, siguen una distribución uniforme (Punto 2.), pero los del servicio de gráfica son atendidos en la caja con un tiempo que surge de una distribución normal (Punto 2); en ambos casos se debe sumar un tiempo uniformemente distribuido entre 5 y 10 segundos para facturar los insumos elegidos. Se deben diferenciar a los clientes en la cola según el servicio, el tiempo de facturación depende del producto facturado. Debido a la complejidad de esta situación se establece una matriz de tiempos para cada servicio,

en la cual en la primera columna se indican los tiempos de llegada a la caja y en la segunda columna su tiempo correspondiente de atención en la misma. Luego se unen estas matrices en una nueva y única matriz, la cual se ordena considerando los tiempos de llegada a la caja desde los distintos servicios. De igual manera se establecen los tiempos de espera en la caja para la nueva cola. Esto se realiza también para las otras colas, se comparan el tiempo de llegada de un cliente con el tiempo de llegada más el de atención en la caja de su predecesor. La simulación se ejecuta 100 veces.

4. Resultados obtenidos de la simulación.

En la Tabla 1 se muestra el rendimiento del sistema propuesto (caso testigo). Y luego una modificación al caso original en la cual se cambia la fotocopiadora por una más rápida, reduciendo a la mitad el tiempo del servicio de fotocopia. Esta modificación surge de la observación del caso original en el cual se aprecia una gran demora en el servicio de fotocopia (marcas de la Tabla 1).

Tabla 1. Resultados de la simulación

Resultados de los casos propuestos	Caso testigo 3 personas	Caso propuesto 3 personas	
1 empleado en el servicio de fotocopia, 1 empleado en el servicio de gráfica y 1 cajero	Nueva fotocopiadora que reduce a la mitad el tiempo en el servicio de fotocopia		
Espera media en el servicio de fotocopia en el total de corridas	0,4138	0,0251	
Espera media en el servicio de gráfica en el total de corridas	0,0566	0,0498	
Espera media en cajero en el total de corridas	0,0010	0,0044	
Espera máxima en cola del servicio de fotocopia en el total de corridas	0,7671	0,0859	
Espera máxima en cola del servicio de gráfica en el total de corridas	0,1531	0,1456	
Espera máxima en el cajero en el total de corridas	0,0109	0,0210	
Número medio de personas en cola del servicio de fotocopia.	16,0800	0,7200	
Número medio de personas en cola del servicio de gráfica.	0,7200	0,0200	
Número medio de personas en cola de caja.	0,4000	0,4400	
Número máximo de personas en cola del servicio de fotocopia.		44	6
Número máximo de personas en cola del servicio de gráfica.		5	6
Número máximo de personas en cola de caja.		1	3
Tiempo de espera media para cliente del servicio de fotocopia e insumos.		0,4418	0,0447
Tiempo de espera media para cliente del servicio de gráfica e insumos.		0,0935	0,0907
Tiempo de espera máximo para cliente del servicio de fotocopia e insumos.		0,8065	0,1231
Tiempo de espera máximo para cliente del servicio de gráfica e insumos.		0,2049	0,2085
Tiempo total de espera para todos los clientes.		0,2677	0,0677
Número medio de personas que están en el sistema en una hora y media.		108,92	111,04
Número máximo de personas que están en el sistema en una hora y media.		147,00	149,00
Observación: todos los valores de espera corresponden a fracciones de hora.			

5. Conclusiones de la simulación

De la primera simulación se obtuvo un resultado que muestra un rendimiento poco aceptable del sistema. En la Tabla 1, caso testigo, existe un problema importante en la cola del servicio de fotocopia, causante de importantes demoras en el tiempo de atención, con valores de cantidad de personas en la cola muy importantes, y excesivos. Al realizar un cambio por una fotocopiadora más rápida, se obtuvieron resultados más aceptables que en la condición inicial. Se podrían testear diversas variantes al sistema con el objeto de analizar y estudiar una optimización del proceso.



La enseñanza y aplicación de distribuciones de probabilidad para la resolución de un modelo estocástico real mediante simulación numérica

Calandra, María Valeria


 Grupo de Aplicaciones Matemáticas y Estadísticas de la Facultad de Ingeniería (GAMEFI),
 Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata, Argentina.
 e-mail: mava@mate.unlp.edu.ar

RESUMEN

Principalmente, este trabajo tiene como objetivo ayudar a los docentes a encarar ciertas problemáticas específicas en el dictado de la asignatura *Probabilidades de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata*, que corresponde al área de las ciencias básicas, y se dicta para los alumnos de segundo año de las carreras de Ingeniería, en el marco del proyecto de mejora continua de la enseñanza de grado. En este sentido se presenta un trabajo integrador que tiene como fin afianzar el conocimiento y enlazar las temáticas de la asignatura *Probabilidades*, aplicando sus conceptos a la solución de un problema complejo de la vida real, realizado mediante una simulación numérica. La propuesta pretende plasmar el análisis y aplicación de distribuciones de probabilidad vistas en el curso para mostrar como pueden ser aplicadas para la resolución de modelos estocásticos que simulan un proceso real, basado en las problemáticas de las teorías de colas.

INTRODUCCIÓN

Problema integrador a resolver: es conocida la problemática que se presenta cuando una persona ingresa a un comercio en horas pico, y los tiempos que se demora en realizar las compras que pretende. Aquí presentaremos el problema específico del caso de un comercio de venta de insumos de oficina y servicios de papelería, al cual los clientes concurren para realizar compras de variado tipo. Supongamos, además, que se quiere analizar el sistema de atención al cliente de un comercio de este rubro en un determinado horario de atención, como ser horarios pico, este sería entre las 11:30 y las 13 hs (hora de cierre).

Impondremos una probabilidad de la llegada de los clientes en grupos de 1 y 2 personas a la vez, con sus probabilidades asociadas 0,6 y 0,4 respectivamente. Las llegadas de los grupos siguen un proceso de Poisson con tasa de arribos de un grupo cada 60 segundos por lo tanto los tiempos entre llegadas de los grupos están distribuidos exponencialmente con una media de 60 segundos debido a la relación conocida entre ambas distribuciones. Inicialmente, se considera que el sistema está ocioso, es decir que no hay clientes, y que comienzan a llegar en dicho momento y por un período de una hora y media. Se considera que los clientes que llegan pueden dividirse para realizar distintas compras, unos se acercan para sacar fotocopias y comprar algún insumo, otros solicitan algún trabajo gráfico y además compran algún insumo de oficina. Se considera que los insumos se obtienen mediante un sistema de autoservicio en el local. Considerando como condición inicial que cada cliente que llega, sea individualmente o en grupo, realiza una de las operaciones indicadas y que en todos los casos los clientes deben realizar un pago por su compra de insumos y el servicio, podemos considerar que para cada cliente se puede definir una especie de "ruta", siendo para este caso dos posibles, a saber: servicio de fotocopias + compra de insumos + pago en cajero y servicio de gráfica + compra de insumos + pago en cajero.



Para cada una de dichas rutas se define una probabilidad de ocurrencia, 0,7 y 0,3 respectivamente. En los servicios los clientes son atendidos de a uno por vez. En la compra de insumos los clientes retiran los mismos sin necesidad de hacer una cola, es decir que se puede considerar como si estuvieran atendiendo infinitos empleados. En el local se considera que hay una sola caja de pago con un cajero y tiene su propia cola. En todos los casos el modelo considera que en todas las colas se atienda primero al primero que llega.

Para el caso del servicio de fotocopias en el mostrador la atención está uniformemente distribuida entre 50 y 120 segundos, la atención para el servicio de gráfica está normalmente distribuida con media 120 segundos y desviación típica de 30 segundos, y el tiempo que tarda en seleccionar los insumos está uniformemente distribuido entre 5 y 20 segundos. El cajero emplea un tiempo uniformemente distribuido entre 20 y 40 segundos para facturar el servicio de fotocopias, un tiempo normalmente distribuido con media 10 segundos y desviación típica de 2 segundos para el caso del servicio de gráfica, y un tiempo uniformemente distribuido entre 5 y 10 segundos para las compras de insumos. En todos los casos se deben sumar los tiempos de cajero para conocer el tiempo en el cajero para las distintas rutas.

Con estas condiciones se plantea la necesidad de conocer la espera media y máxima en la ruta de servicio de fotocopias, servicio de gráfica y cajero. El número medio y máximo de personas en la cola de servicio de fotocopias, servicio de gráfica y en cajero. Además, la espera media y máxima en todas las colas para los clientes de las dos rutas. Por último el tiempo medio total de espera para todos los clientes y el tiempo medio y máximo número total de clientes en el sistema simulado.

IMPLEMENTACIÓN DEL PROBLEMA

Mostramos aquí ejemplos de la implementación del programa para la resolución del problema.

Los primero que sucede es la llegada de los clientes al local, debemos analizar como podemos establecer la forma en que arriban. Para modelar la situación de las llegadas de los clientes se consideró la siguiente situación: los mismos pueden llegar en grupos de 1 y 2 personas con probabilidades: 0,6 y 0,4 respectivamente, los tiempos entre llegadas de los grupos siguen una distribución exponencial, y se dividen a la llegada (además cada persona toma su propia decisión en cada grupo) tomando una de las rutas a través del local:

Para el arribo al servicio de fotocopia de una persona sola dentro de un grupo individual la tasa de arribos Poisson considerada fue $R1=0.08070.7$. (Dado que 90 es la tasa de arribo de los grupos durante la hora y media motivo del trabajo, 0,6 es la probabilidad de arribo de una persona sola y 0,7 es la probabilidad de elegir el servicio de fotocopia). Para considerar la hora de arribo se consideró una exponencial con media 1,5/R1 (que es el tiempo medio de este tipo de arribos por hora).

```

    *Tiempo de 1 persona grupo de 1.
    R1 = poisson(0.7*0.7);
    N=0;
    I=0;
    for i=1:N;
        x10=exprnd(0.0138,0.033);
        x11=exprnd(0.0138,0.033);
        x12=exprnd(0.0138,0.033);
        x13=exprnd(0.0138,0.033);
        x14=exprnd(0.0138,0.033);
        x15=exprnd(0.0138,0.033);
        x16=exprnd(0.0138,0.033);
        x17=exprnd(0.0138,0.033);
        x18=exprnd(0.0138,0.033);
        x19=exprnd(0.0138,0.033);
        x20=exprnd(0.0138,0.033);
        x21=exprnd(0.0138,0.033);
        x22=exprnd(0.0138,0.033);
        x23=exprnd(0.0138,0.033);
        x24=exprnd(0.0138,0.033);
        x25=exprnd(0.0138,0.033);
        x26=exprnd(0.0138,0.033);
        x27=exprnd(0.0138,0.033);
        x28=exprnd(0.0138,0.033);
        x29=exprnd(0.0138,0.033);
        x30=exprnd(0.0138,0.033);
        x31=exprnd(0.0138,0.033);
        x32=exprnd(0.0138,0.033);
        x33=exprnd(0.0138,0.033);
        x34=exprnd(0.0138,0.033);
        x35=exprnd(0.0138,0.033);
        x36=exprnd(0.0138,0.033);
        x37=exprnd(0.0138,0.033);
        x38=exprnd(0.0138,0.033);
        x39=exprnd(0.0138,0.033);
        x40=exprnd(0.0138,0.033);
        x41=exprnd(0.0138,0.033);
        x42=exprnd(0.0138,0.033);
        x43=exprnd(0.0138,0.033);
        x44=exprnd(0.0138,0.033);
        x45=exprnd(0.0138,0.033);
        x46=exprnd(0.0138,0.033);
        x47=exprnd(0.0138,0.033);
        x48=exprnd(0.0138,0.033);
        x49=exprnd(0.0138,0.033);
        x50=exprnd(0.0138,0.033);
        x51=exprnd(0.0138,0.033);
        x52=exprnd(0.0138,0.033);
        x53=exprnd(0.0138,0.033);
        x54=exprnd(0.0138,0.033);
        x55=exprnd(0.0138,0.033);
        x56=exprnd(0.0138,0.033);
        x57=exprnd(0.0138,0.033);
        x58=exprnd(0.0138,0.033);
        x59=exprnd(0.0138,0.033);
        x60=exprnd(0.0138,0.033);
        x61=exprnd(0.0138,0.033);
        x62=exprnd(0.0138,0.033);
        x63=exprnd(0.0138,0.033);
        x64=exprnd(0.0138,0.033);
        x65=exprnd(0.0138,0.033);
        x66=exprnd(0.0138,0.033);
        x67=exprnd(0.0138,0.033);
        x68=exprnd(0.0138,0.033);
        x69=exprnd(0.0138,0.033);
        x70=exprnd(0.0138,0.033);
        x71=exprnd(0.0138,0.033);
        x72=exprnd(0.0138,0.033);
        x73=exprnd(0.0138,0.033);
        x74=exprnd(0.0138,0.033);
        x75=exprnd(0.0138,0.033);
        x76=exprnd(0.0138,0.033);
        x77=exprnd(0.0138,0.033);
        x78=exprnd(0.0138,0.033);
        x79=exprnd(0.0138,0.033);
        x80=exprnd(0.0138,0.033);
        x81=exprnd(0.0138,0.033);
        x82=exprnd(0.0138,0.033);
        x83=exprnd(0.0138,0.033);
        x84=exprnd(0.0138,0.033);
        x85=exprnd(0.0138,0.033);
        x86=exprnd(0.0138,0.033);
        x87=exprnd(0.0138,0.033);
        x88=exprnd(0.0138,0.033);
        x89=exprnd(0.0138,0.033);
        x90=exprnd(0.0138,0.033);
        x91=exprnd(0.0138,0.033);
        x92=exprnd(0.0138,0.033);
        x93=exprnd(0.0138,0.033);
        x94=exprnd(0.0138,0.033);
        x95=exprnd(0.0138,0.033);
        x96=exprnd(0.0138,0.033);
        x97=exprnd(0.0138,0.033);
        x98=exprnd(0.0138,0.033);
        x99=exprnd(0.0138,0.033);
        x100=exprnd(0.0138,0.033);
        x101=exprnd(0.0138,0.033);
        x102=exprnd(0.0138,0.033);
        x103=exprnd(0.0138,0.033);
        x104=exprnd(0.0138,0.033);
        x105=exprnd(0.0138,0.033);
        x106=exprnd(0.0138,0.033);
        x107=exprnd(0.0138,0.033);
        x108=exprnd(0.0138,0.033);
        x109=exprnd(0.0138,0.033);
        x110=exprnd(0.0138,0.033);
        x111=exprnd(0.0138,0.033);
        x112=exprnd(0.0138,0.033);
        x113=exprnd(0.0138,0.033);
        x114=exprnd(0.0138,0.033);
        x115=exprnd(0.0138,0.033);
        x116=exprnd(0.0138,0.033);
        x117=exprnd(0.0138,0.033);
        x118=exprnd(0.0138,0.033);
        x119=exprnd(0.0138,0.033);
        x120=exprnd(0.0138,0.033);
        x121=exprnd(0.0138,0.033);
        x122=exprnd(0.0138,0.033);
        x123=exprnd(0.0138,0.033);
        x124=exprnd(0.0138,0.033);
        x125=exprnd(0.0138,0.033);
        x126=exprnd(0.0138,0.033);
        x127=exprnd(0.0138,0.033);
        x128=exprnd(0.0138,0.033);
        x129=exprnd(0.0138,0.033);
        x130=exprnd(0.0138,0.033);
        x131=exprnd(0.0138,0.033);
        x132=exprnd(0.0138,0.033);
        x133=exprnd(0.0138,0.033);
        x134=exprnd(0.0138,0.033);
        x135=exprnd(0.0138,0.033);
        x136=exprnd(0.0138,0.033);
        x137=exprnd(0.0138,0.033);
        x138=exprnd(0.0138,0.033);
        x139=exprnd(0.0138,0.033);
        x140=exprnd(0.0138,0.033);
        x141=exprnd(0.0138,0.033);
        x142=exprnd(0.0138,0.033);
        x143=exprnd(0.0138,0.033);
        x144=exprnd(0.0138,0.033);
        x145=exprnd(0.0138,0.033);
        x146=exprnd(0.0138,0.033);
        x147=exprnd(0.0138,0.033);
        x148=exprnd(0.0138,0.033);
        x149=exprnd(0.0138,0.033);
        x150=exprnd(0.0138,0.033);
        x151=exprnd(0.0138,0.033);
        x152=exprnd(0.0138,0.033);
        x153=exprnd(0.0138,0.033);
        x154=exprnd(0.0138,0.033);
        x155=exprnd(0.0138,0.033);
        x156=exprnd(0.0138,0.033);
        x157=exprnd(0.0138,0.033);
        x158=exprnd(0.0138,0.033);
        x159=exprnd(0.0138,0.033);
        x160=exprnd(0.0138,0.033);
        x161=exprnd(0.0138,0.033);
        x162=exprnd(0.0138,0.033);
        x163=exprnd(0.0138,0.033);
        x164=exprnd(0.0138,0.033);
        x165=exprnd(0.0138,0.033);
        x166=exprnd(0.0138,0.033);
        x167=exprnd(0.0138,0.033);
        x168=exprnd(0.0138,0.033);
        x169=exprnd(0.0138,0.033);
        x170=exprnd(0.0138,0.033);
        x171=exprnd(0.0138,0.033);
        x172=exprnd(0.0138,0.033);
        x173=exprnd(0.0138,0.033);
        x174=exprnd(0.0138,0.033);
        x175=exprnd(0.0138,0.033);
        x176=exprnd(0.0138,0.033);
        x177=exprnd(0.0138,0.033);
        x178=exprnd(0.0138,0.033);
        x179=exprnd(0.0138,0.033);
        x180=exprnd(0.0138,0.033);
        x181=exprnd(0.0138,0.033);
        x182=exprnd(0.0138,0.033);
        x183=exprnd(0.0138,0.033);
        x184=exprnd(0.0138,0.033);
        x185=exprnd(0.0138,0.033);
        x186=exprnd(0.0138,0.033);
        x187=exprnd(0.0138,0.033);
        x188=exprnd(0.0138,0.033);
        x189=exprnd(0.0138,0.033);
        x190=exprnd(0.0138,0.033);
        x191=exprnd(0.0138,0.033);
        x192=exprnd(0.0138,0.033);
        x193=exprnd(0.0138,0.033);
        x194=exprnd(0.0138,0.033);
        x195=exprnd(0.0138,0.033);
        x196=exprnd(0.0138,0.033);
        x197=exprnd(0.0138,0.033);
        x198=exprnd(0.0138,0.033);
        x199=exprnd(0.0138,0.033);
        x200=exprnd(0.0138,0.033);
        x201=exprnd(0.0138,0.033);
        x202=exprnd(0.0138,0.033);
        x203=exprnd(0.0138,0.033);
        x204=exprnd(0.0138,0.033);
        x205=exprnd(0.0138,0.033);
        x206=exprnd(0.0138,0.033);
        x207=exprnd(0.0138,0.033);
        x208=exprnd(0.0138,0.033);
        x209=exprnd(0.0138,0.033);
        x210=exprnd(0.0138,0.033);
        x211=exprnd(0.0138,0.033);
        x212=exprnd(0.0138,0.033);
        x213=exprnd(0.0138,0.033);
        x214=exprnd(0.0138,0.033);
        x215=exprnd(0.0138,0.033);
        x216=exprnd(0.0138,0.033);
        x217=exprnd(0.0138,0.033);
        x218=exprnd(0.0138,0.033);
        x219=exprnd(0.0138,0.033);
        x220=exprnd(0.0138,0.033);
        x221=exprnd(0.0138,0.033);
        x222=exprnd(0.0138,0.033);
        x223=exprnd(0.0138,0.033);
        x224=exprnd(0.0138,0.033);
        x225=exprnd(0.0138,0.033);
        x226=exprnd(0.0138,0.033);
        x227=exprnd(0.0138,0.033);
        x228=exprnd(0.0138,0.033);
        x229=exprnd(0.0138,0.033);
        x230=exprnd(0.0138,0.033);
        x231=exprnd(0.0138,0.033);
        x232=exprnd(0.0138,0.033);
        x233=exprnd(0.0138,0.033);
        x234=exprnd(0.0138,0.033);
        x235=exprnd(0.0138,0.033);
        x236=exprnd(0.0138,0.033);
        x237=exprnd(0.0138,0.033);
        x238=exprnd(0.0138,0.033);
        x239=exprnd(0.0138,0.033);
        x240=exprnd(0.0138,0.033);
        x241=exprnd(0.0138,0.033);
        x242=exprnd(0.0138,0.033);
        x243=exprnd(0.0138,0.033);
        x244=exprnd(0.0138,0.033);
        x245=exprnd(0.0138,0.033);
        x246=exprnd(0.0138,0.033);
        x247=exprnd(0.0138,0.033);
        x248=exprnd(0.0138,0.033);
        x249=exprnd(0.0138,0.033);
        x250=exprnd(0.0138,0.033);
        x251=exprnd(0.0138,0.033);
        x252=exprnd(0.0138,0.033);
        x253=exprnd(0.0138,0.033);
        x254=exprnd(0.0138,0.033);
        x255=exprnd(0.0138,0.033);
        x256=exprnd(0.0138,0.033);
        x257=exprnd(0.0138,0.033);
        x258=exprnd(0.0138,0.033);
        x259=exprnd(0.0138,0.033);
        x260=exprnd(0.0138,0.033);
        x261=exprnd(0.0138,0.033);
        x262=exprnd(0.0138,0.033);
        x263=exprnd(0.0138,0.033);
        x264=exprnd(0.0138,0.033);
        x265=exprnd(0.0138,0.033);
        x266=exprnd(0.0138,0.033);
        x267=exprnd(0.0138,0.033);
        x268=exprnd(0.0138,0.033);
        x269=exprnd(0.0138,0.033);
        x270=exprnd(0.0138,0.033);
        x271=exprnd(0.0138,0.033);
        x272=exprnd(0.0138,0.033);
        x273=exprnd(0.0138,0.033);
        x274=exprnd(0.0138,0.033);
        x275=exprnd(0.0138,0.033);
        x276=exprnd(0.0138,0.033);
        x277=exprnd(0.0138,0.033);
        x278=exprnd(0.0138,0.033);
        x279=exprnd(0.0138,0.033);
        x280=exprnd(0.0138,0.033);
        x281=exprnd(0.0138,0.033);
        x282=exprnd(0.0138,0.033);
        x283=exprnd(0.0138,0.033);
        x284=exprnd(0.0138,0.033);
        x285=exprnd(0.0138,0.033);
        x286=exprnd(0.0138,0.033);
        x287=exprnd(0.0138,0.033);
        x288=exprnd(0.0138,0.033);
        x289=exprnd(0.0138,0.033);
        x290=exprnd(0.0138,0.033);
        x291=exprnd(0.0138,0.033);
        x292=exprnd(0.0138,0.033);
        x293=exprnd(0.0138,0.033);
        x294=exprnd(0.0138,0.033);
        x295=exprnd(0.0138,0.033);
        x296=exprnd(0.0138,0.033);
        x297=exprnd(0.0138,0.033);
        x298=exprnd(0.0138,0.033);
        x299=exprnd(0.0138,0.033);
        x300=exprnd(0.0138,0.033);
        x301=exprnd(0.0138,0.033);
        x302=exprnd(0.0138,0.033);
        x303=exprnd(0.0138,0.033);
        x304=exprnd(0.0138,0.033);
        x305=exprnd(0.0138,0.033);
        x306=exprnd(0.0138,0.033);
        x307=exprnd(0.0138,0.033);
        x308=exprnd(0.0138,0.033);
        x309=exprnd(0.0138,0.033);
        x310=exprnd(0.0138,0.033);
        x311=exprnd(0.0138,0.033);
        x312=exprnd(0.0138,0.033);
        x313=exprnd(0.0138,0.033);
        x314=exprnd(0.0138,0.033);
        x315=exprnd(0.0138,0.033);
        x316=exprnd(0.0138,0.033);
        x317=exprnd(0.0138,0.033);
        x318=exprnd(0.0138,0.033);
        x319=exprnd(0.0138,0.033);
        x320=exprnd(0.0138,0.033);
        x321=exprnd(0.0138,0.033);
        x322=exprnd(0.0138,0.033);
        x323=exprnd(0.0138,0.033);
        x324=exprnd(0.0138,0.033);
        x325=exprnd(0.0138,0.033);
        x326=exprnd(0.0138,0.033);
        x327=exprnd(0.0138,0.033);
        x328=exprnd(0.0138,0.033);
        x329=exprnd(0.0138,0.033);
        x330=exprnd(0.0138,0.033);
        x331=exprnd(0.0138,0.033);
        x332=exprnd(0.0138,0.033);
        x333=exprnd(0.0138,0.033);
        x334=exprnd(0.0138,0.033);
        x335=exprnd(0.0138,0.033);
        x336=exprnd(0.0138,0.033);
        x337=exprnd(0.0138,0.033);
        x338=exprnd(0.0138,0.033);
        x339=exprnd(0.0138,0.033);
        x340=exprnd(0.0138,0.033);
        x341=exprnd(0.0138,0.033);
        x342=exprnd(0.0138,0.033);
        x343=exprnd(0.0138,0.033);
        x344=exprnd(0.0138,0.033);
        x345=exprnd(0.0138,0.033);
        x346=exprnd(0.0138,0.033);
        x347=exprnd(0.0138,0.033);
        x348=exprnd(0.0138,0.033);
        x349=exprnd(0.0138,0.033);
        x350=exprnd(0.0138,0.033);
        x351=exprnd(0.0138,0.033);
        x352=exprnd(0.0138,0.033);
        x353=exprnd(0.0138,0.033);
        x354=exprnd(0.0138,0.033);
        x355=exprnd(0.0138,0.033);
        x356=exprnd(0.0138,0.033);
        x357=exprnd(0.0138,0.033);
        x358=exprnd(0.0138,0.033);
        x359=exprnd(0.0138,0.033);
        x360=exprnd(0.0138,0.033);
        x361=exprnd(0.0138,0.033);
        x362=exprnd(0.0138,0.033);
        x363=exprnd(0.0138,0.033);
        x364=exprnd(0.0138,0.033);
        x365=exprnd(0.0138,0.033);
        x366=exprnd(0.0138,0.033);
        x367=exprnd(0.0138,0.033);
        x368=exprnd(0.0138,0.033);
        x369=exprnd(0.0138,0.033);
        x370=exprnd(0.0138,0.033);
        x371=exprnd(0.0138,0.033);
        x372=exprnd(0.0138,0.033);
        x373=exprnd(0.0138,0.033);
        x374=exprnd(0.0138,0.033);
        x375=exprnd(0.0138,0.033);
        x376=exprnd(0.0138,0.033);
        x377=exprnd(0.0138,0.033);
        x378=exprnd(0.0138,0.033);
        x379=exprnd(0.0138,0.033);
        x380=exprnd(0.0138,0.033);
        x381=exprnd(0.0138,0.033);
        x382=exprnd(0.0138,0.033);
        x383=exprnd(0.0138,0.033);
        x384=exprnd(0.0138,0.033);
        x385=exprnd(0.0138,0.033);
        x386=exprnd(0.0138,0.033);
        x387=exprnd(0.0138,0.033);
        x388=exprnd(0.0138,0.033);
        x389=exprnd(0.0138,0.033);
        x390=exprnd(0.0138,0.033);
        x391=exprnd(0.0138,0.033);
        x392=exprnd(0.0138,0.033);
        x393=exprnd(0.0138,0.033);
        x394=exprnd(0.0138,0.033);
        x395=exprnd(0.0138,0.033);
        x396=exprnd(0.0138,0.033);
        x397=exprnd(0.0138,0.033);
        x398=exprnd(0.0138,0.033);
        x399=exprnd(0.0138,0.033);
        x400=exprnd(0.0138,0.033);
        x401=exprnd(0.0138,0.033);
        x402=exprnd(0.0138,0.033);
        x403=exprnd(0.0138,0.033);
        x404=exprnd(0.0138,0.033);
        x405=exprnd(0.0138
```

Referencias bibliográficas

- Barry, L. N. (1995). *Stochastic Modeling: Analysis & Simulation*. Singapore: McGraw-Hill Book Co.
- Feller, W. (1991). *Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones*. México: Ed. Limusa.
- Gross, D., Shortle, J. F., Thompson, J. M. & Harris, C. M. (2008). *Fundamentals of queueing theory*. Hoboken, NJ.: John Wiley & Sons, Inc.
- Kao, E.P.C. (1997). *An Introduction to Stochastic Processes*. Belmont, EE.UU.: Duxbury Press.
- Ripley, B. D. (1987). *Stochastic Simulation*. New York: John Wiley & Sons, Inc

Anexo I

Algunos códigos del programa utilizado para la simulación. El lenguaje empleado es Matlab.

1)

```
%=====
% Tiempos de 1 persona grupo de 1.
R1 = poissrnd(37.8);
N=R1;
if N>0;
  for i=1:N;
    x1(i)= exprnd(1/25.2);
  end;
  x11(1)=x1(1);
  for j=2:N;
    x11(j)=x11(j-1)+x1(j);
  end;
  else;
    x11=10000;
  end;
%=====
```

2)

```
%=====
% Servicio de fotocopia
%tecc: tiempo de espera en el servicio de fotocopia
tecc(1)=0;
%tss: tiempo de servicio
tss(1)=unifrnd(0.01388,0.0333);
%tscc: tiempo de salida del servicio de fotocopia
tscc(1)=ttf(1)+tecc(1)+tss(1);
for i=2:cci;
  tecc(i)=tscc(i-1)-ttf(i);
  tss(i)=unifrnd(0.0138833,0.0333);
  if tecc(i)>0;
    tecc(i)=tecc(i);
    tscc(i)=ttf(i)+tecc(i)+tss(i);
  else;
    tecc(i)=0;
    tscc(i)=ttf(i)+tecc(i)+tss(i);
  end;
end;
%=====
```

3)

```
%=====
% Tiempo de elección de insumos para los clientes que salen del servicio de fotocopia
for i=1:cci1;
  tsbcc(i)=unifrnd(0.0013889,5.5e-03);
  tsbccf(i)=tsbcc(i)+tsccf(i);
end;
% Ordenamiento del vector tiempo del servicio de fotocopia e insumos
tsbcc1=sort(tsbccf);
```

%=====