

**UNA MIRADA COGNITIVA A LAS TRANSFORMACIONES
LINEALES. ARTICULACIÓN ENTRE SUS TRES INTERPRETACIONES:
FUNCIONAL-MATRICIAL-GEOMETRICA**

Isabel Maturana Peña – Marcela Parraguez González
isamatup@hotmail.com – marcela.parraguez@ucv.cl.
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile

Tema: Pensamiento Matemático Avanzado

Modalidad: CB

Nivel educativo: Terciario

Palabras clave: Transformaciones Lineales, Interpretaciones, APOE

Resumen

Fundamentamos nuestro estudio en la teoría APOE (Acciones, Procesos y Esquemas) (Dubinsky, 1996), como marco teórico referencial y una propuesta de investigación, en la que reconocemos diferentes interpretaciones del concepto de transformación lineal, las que hemos denominado interpretación funcional, matricial y geométrica, todas ellas articuladas por la combinación lineal. Nos propusimos documentar las construcciones y mecanismos mentales que los estudiantes ponen en práctica en la articulación de las interpretaciones del concepto transformación lineal. Haciendo uso de la metodología propia de APOE y el grupo RUMEC (Asiala et al., 1996), diseñamos descomposiciones genéticas para cada interpretación. En su dimensión metodológica es un estudio de caso, dicho estudio se realizó en una universidad del país. Este reporte documenta las primeras evidencias sobre las problemáticas de enseñanza-aprendizaje en las transformaciones lineales. Estas evidencias proveen información sobre los estudiantes que están próximos a construir como objeto, existe una prevalencia en el conocimiento residual para la interpretación matricial, lo que resulta contradictorio, pues este es la resultante de una simplificación de la interpretación funcional. Por otra parte otro resultado que hemos podido documentar está relacionado con el desmedro de la interpretación geométrica en los estudiantes del caso.

Nos propusimos, como objetivo de investigación, indagar las construcciones mentales que los estudiantes ponen en juego para la construcción y o reconstrucción del concepto transformación lineal; reconoceremos, en el concepto, componentes de origen geométrico, funcional y matricial, entendiendo cada uno de estos componentes como diferentes interpretaciones de una misma definición.

La enseñanza del álgebra lineal es un tema que se encuentra presente en la mayoría de los programas de matemática para carreras como ingeniería, licenciatura y pedagogía en ciencias; por otra parte existen numerosas investigaciones que ofrecen evidencias sobre las dificultades que poseen los estudiantes para comprender los conceptos relativos al álgebra lineal, por ejemplo Dorier y su equipo de investigadores han logrado establecer un tipo de fenómeno propio del álgebra lineal a través de la descripción del obstáculo del formalismo (Dorier, J., et al., 1997). Según Dubinsky y otros (Dubinsky, E., Dauterman, J., Leron, U. y Zazkis, R., 1994) el problema central radica en que, en esta

materia, el estudiante debe hacer uso de conceptos abstractos, pero su tendencia es a trabajar con procedimientos mecánicos, limitando su comprensión sobre los conceptos involucrados. En particular sobre el concepto de transformación lineal la documentación hasta ahora obtenida da cuenta que representa un obstáculo mayor; son diversas las investigaciones en didáctica de la matemática que han abordado su problemática de aprendizaje, por ejemplo, citaremos el trabajo de Roa y Oktaç (Roa y Oktaç, 2010) “Construcción de una Descomposición Genética: Análisis Teórico del Concepto Transformación Lineal”, la investigación proporcionó como resultado una descomposición genética del concepto, que consideró dos formas de construcción, uno donde el concepto de función asimila al concepto de espacio vectorial y otro donde el concepto transformación lineal es un caso particular del concepto de función.

Teoría APOE

Dubinsky (Dubinsky, 1996) se basa en la abstracción reflexiva de Piaget para describir la construcción de objetos mentales, y distingue varios tipos: interiorización, coordinación, encapsulación, generalización, reversión. Estos originan diferentes construcciones mentales: acciones, procesos, objetos, esquemas (APOE).

Consideremos un fragmento F de conocimiento matemático. Un individuo posee una concepción acción de F si las transformaciones que hace sobre él se realizan paso a paso, obedeciendo a estímulos que son y percibe como externos. Él interioriza la acción en una concepción proceso de F si puede realizar una operación interna que hace esencialmente la misma transformación enteramente en su mente, sin necesariamente recorrer todos los pasos específicos. Si piensa en un proceso como un todo, y realiza y construye transformaciones sobre su totalidad ha encapsulado el proceso en una concepción objeto de F . Un esquema de aquel trozo es una colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente del individuo en una estructura cognitiva coherente. Una descomposición genética, describe en detalle los aspectos constructivos de F para explicitar un camino factible de su aprendizaje en términos de construcciones y mecanismos mentales.

Diseño metodológico de la investigación

Incorporaremos a la metodología propia de la teoría APOE el estudio de caso, pues son particularmente apropiados para realizar investigaciones en un determinado periodo de tiempo, identificando los distintos procesos interactivos que conforman la realidad de su enseñanza-aprendizaje (Arnal, J., Del Rincón, D., y Latorre, A., 1992), permitiendo una

aproximación conceptual apropiada para examinar las particularidades al interior de un contexto global de suyo múltiple y complejo (Goetz y Le Compte, 1988, p. 69). Sin embargo, es preciso dejar en claro que nuestras conclusiones provendrán de la teoría APOE y de su metodología.

Las unidades de estudio son alumnos chilenos de una universidad del país, estudiantes de la carrera de pedagogía en matemática. La selección de los estudiantes de esta unidad de estudio trabajada como “caso”, se vinculan con las siguientes categorías e indicadores: estudiantes exitosos académicamente, experiencias previas, avance curricular, género, ejercitan ampliamente en matemática, estudiantes voluntarios, heterogeneidad en los procesos de formación de los estudiantes, accesibilidad de los investigadores. Al caso de estudio se aplicará el ciclo de investigación previsto en la teoría APOE, el cual establece: un análisis teórico, conocido como descomposición genética; un diseño, basado en la descomposición genética teórica, y aplicación de instrumentos; seguido de un análisis y verificación de datos (Asiala et al., 1996).

En búsqueda de evidencias empíricas

Diseñamos un cuestionario por interpretación (matricial –funcional y geométrica), con cinco preguntas cada uno. Realizamos un análisis a priori y uno a posteriori para cada pregunta, con la intención de documentar las construcciones y mecanismos mentales dispuestos en las descomposiciones genéticas.

Análisis a priori del cuestionario

Hemos seleccionado tres preguntas una por cada interpretación que a continuación analizaremos a la luz de la descomposición genética correspondiente.

Pregunta seleccionada correspondiente a la interpretación funcional

Pregunta 4.- Encuentre la transformación lineal $f : R^2 \rightarrow R^2$ talque $f(1,1)=(-5,3)$ y $f(-1,1)=(5,2)$. Para esta transformación lineal ¿Es posible determinar $f(1,2)$?

La pregunta da cuenta del tramo que aparece en la figura 1 de la descomposición genética, sobre las construcciones mentales que un estudiante pone en juego al coordinar los procesos provenientes de la preservación de la estructura algebraica del dominio en el recorrido, por medio de la combinación lineal. La construcción mental que da cuenta este tramo es proceso para la construcción de la igualdad en las imágenes en la transformación lineal.

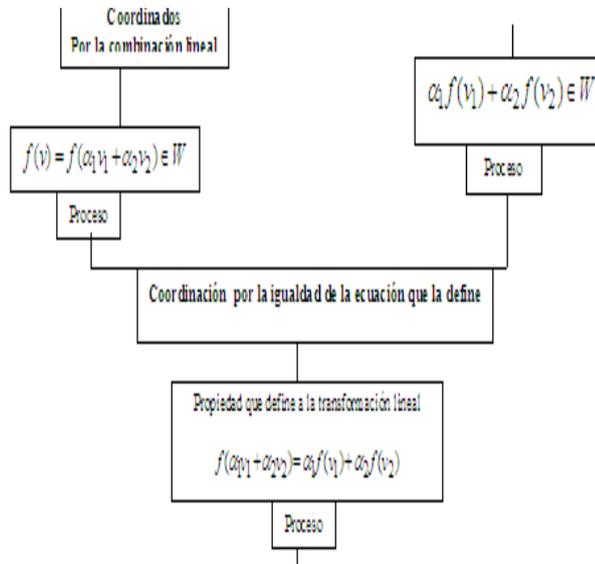
Como el vector (1,2) es combinación lineal de los vectores (1,1) y (-1,1), y la función es una transformación lineal se

tiene: $f(1,2) = \frac{3}{2}f(1,1) + \frac{1}{2}f(-1,1)$,

por lo que se obtiene:

$$f(1,2) = \frac{3}{2}(-5,3) + \frac{1}{2}(5,2) = (-5, \frac{11}{2}).$$

Figura 1. Tramo de la descomposición genética considerado



Pregunta seleccionada correspondiente a la interpretación matricial

PREGUNTA 3:

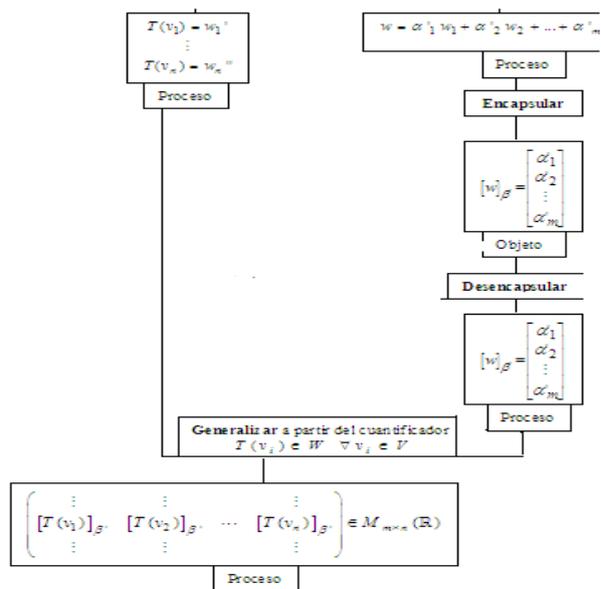
Sea $T: M_2(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}^2$ transformación lineal definida por

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a + b - c, d). \text{ Considere } B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ base de } \mathbf{R}^3 \text{ y}$$

$$B_2 = \{(1,1), (0,1)\} \text{ base de } \mathbf{R}^2. \text{ Determine } [T \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right)]_{B_2}.$$

La pregunta da cuenta de la necesidad del poner en juego el mecanismo mental de la generalización, para lograr la construcción objeto de la imagen de un vector específico, el cual es una construcción ya encapsulada. En esta pregunta, como muestra la figura 2, establece los mecanismos mentales y construcciones mentales necesarios en la fabricación de los elementos coordenadas de manera general.

Figura 1. Tramo de la descomposición genética



Pretendemos despojar de la dimensión del cálculo numérico la respuesta, y por lo tanto incluimos un elemento genérico (general). Consideramos que es un paso a la

generalización necesario para la construcción de la matriz asociada a la transformación

lineal. Se sabe que $T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b-c, d)$, para encontrar las coordenadas pedidas,

debemos escribir el vector imagen como combinación lineal de la base B_2 . Es decir:

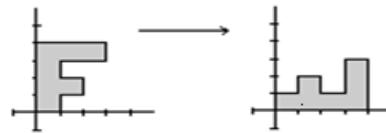
$(a+b-c, d) = \alpha(1,1) + \beta(0,1)$, de donde $\alpha = a+b-c$ y $\beta = d-a-b+c$. Por lo que se

$$\text{tiene } \left[T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right]_{B_2} = \begin{bmatrix} a+b-c \\ d-a-b+c \end{bmatrix}$$

Pregunta seleccionada correspondiente a la interpretación geométrica

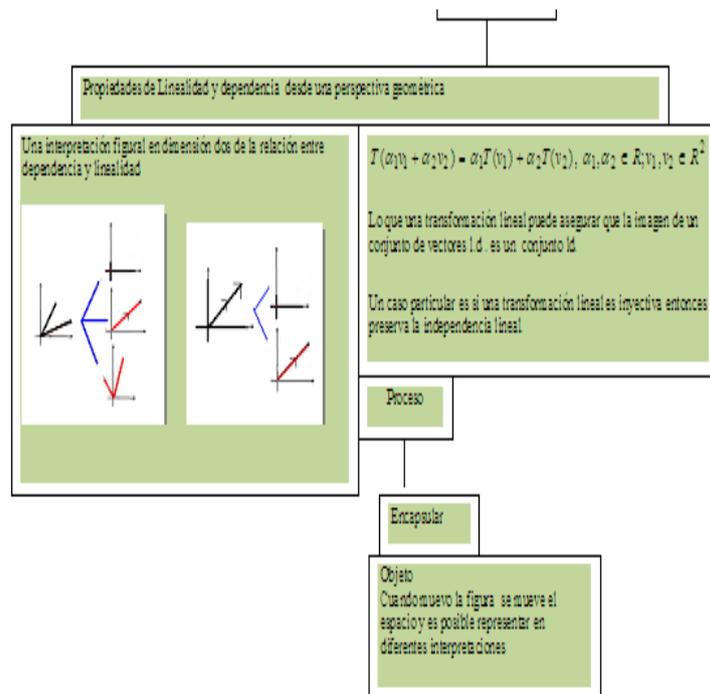
PEGUNTA 5

Determine, si es posible, la matriz asociada a la transformación lineal que cambia a la letra F como se muestra en el gráfico.



La construcción mental necesaria para dar respuesta a la pregunta es una construcción objeto de la interpretación matricial, desde la cual hay que desencapsular las propiedades de linealidad involucradas en el proceso de transformación de la figura 3. Para recurrir a la interpretación matricial como un esquema del cual

Figura 3. Tramo de la descomposición genética



construirá la matriz asociada a la transformación lineal reconociendo los elementos basales que transforman la figura.

Al trazar sobre la figura los vectores que configuran las bases para el plano, se tiene que el vector (1,0) es transformado en el vector (0,1); en forma análoga podemos asegurar que el vector (0,4) es transformado en el vector (4,0), de esta forma se obtiene que la

transformación lineal corresponde a $f(x,y)=(y,x)$, por lo que su matriz asociada a las bases canónicas es $[f]_{C_2}^{C_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

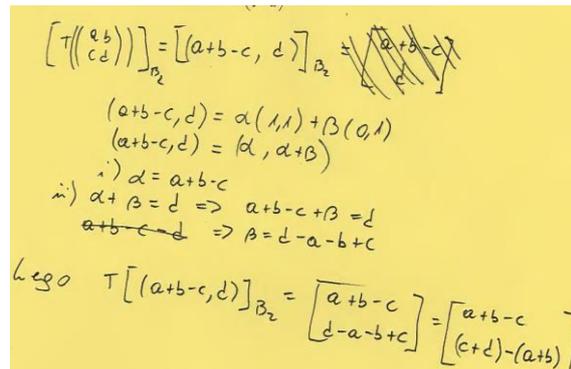
Observaciones sobre el desempeño de los estudiantes y Análisis a posteriori

Con el fin de mostrar ejemplos de los datos obtenidos, a continuación presentamos una selección del trabajo realizado por los estudiantes en las preguntas antes descritas.

Análisis a posteriori Pregunta 3 interpretación matricial

La figura 4, muestra la respuesta del Estudiante 3 (E3), donde las coordenadas del vector imagen $(a+b-c, d)$ en la base B_2 son obtenidas mediante la resolución de un sistema de ecuaciones lineales. Esto interpretado a la luz de las construcciones y mecanismos mentales dispuestos en la descomposición genética, nos muestra

Figura 4 Respuesta que realiza el E3.

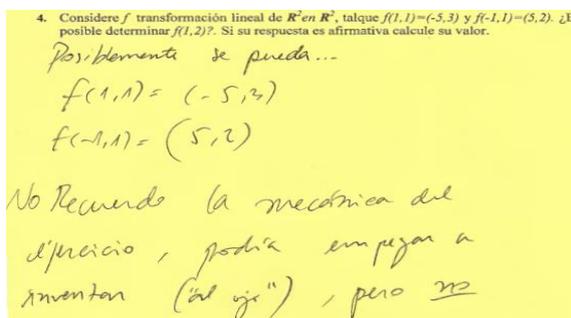


que E3 y rotulan la construcción objeto del concepto coordenadas de un vector.

Análisis a posteriori Pregunta 4 interpretación funcional

La figura 5 muestra, como el estudiante E2 tiene problemas en la coordinación de los procesos para la construcción del concepto transformación lineal en su interpretación funcional.

Figura 5. Respuesta que realiza el E2.



Desde la matemática al no escribir al

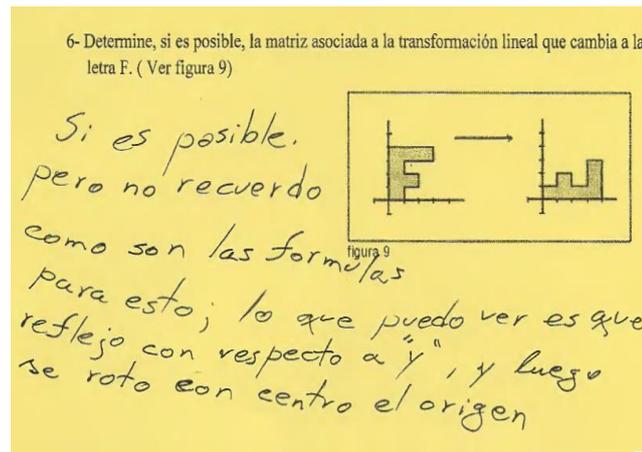
vector $(1,2)$ como combinación lineal de los vectores $(1,1)$ y $(-1,1)$ y aplicar la transformación lineal. Desde nuestra descomposición genética podemos argumentar que E2, no coordinan los procesos relacionados por la igualdad, puesto que E2 alude a no recordar un teorema que hace explícita esta relación. El teorema fundamental del algebra lineal. Es una prueba del fenómeno del formalismo como un obstáculo vivo en el aprendizaje del algebra lineal.

Análisis a posteriori Pregunta 5 interpretación geométrica.

La figura 6 muestra al estudiante 5 (E5). Problemas en la coordinación de los procesos para la construcción del concepto transformación lineal en su interpretación geométrica.

Desde nuestra descomposición genética podemos argumentar que E5, no coordina los procesos relacionados por la igualdad puesto que alude a no recordar un teorema que hace explícita esta relación. Es una prueba del fenómeno del formalismo como un obstáculo vivo en el aprendizaje del álgebra lineal.

Figura 6. Estudiante E5



Conclusiones preliminares:

Interpretación matricial: los resultados indican que el concepto de coordenadas de la imagen de un vector, por medio de una transformación lineal no representa dificultad a los estudiantes, sin embargo la generalización de este, es un obstáculo para alcanzar la construcción objetos, tal como la búsqueda de coordenadas en un objeto genérico. De esta forma en la construcción de la interpretación matricial, los dos temas substantivos, según los datos del estudio, vale decir, transformación lineal y matriz de coordenadas, son ignorados por el estudiante, quien se dedica inmediatamente a comprobar que la operación entre la matriz cambio de base y las coordenada del vector en una determinada base, den la igualdad esperada.

Interpretación funcional Parte de las evidencias obtenidas dan cuenta que los estudiantes que no logran construir como objeto la interpretación funcional del concepto transformación lineal es por una parte que dicen no recordar la definición de transformación lineal, lo que hace alusión al obstáculo del formalismo; los estudiantes próximos a mostrar una construcción proceso muestran que a pesar de recordar la propiedad del concepto transformación lineal en su interpretación funcional no coordinan la igualdad que define a la transformación lineal, en el sentido de lo descrito en nuestra descomposición genética, es así que nuestra descomposición genética da cuenta de un obstáculo no menor en la coordinación mediante la igualdad para configurar la definición de la transformación lineal.

Interpretación geométrica: Algunas de las evidencias en este estudio dan cuenta que para este caso los estudiantes que no logran construir como objeto la interpretación geométrica del concepto transformación lineal sostienen que el álgebra lineal y la geometría son cursos diferentes. Por otra parte estudiantes como E16 muestra una

construcción acción para esta interpretación y dice que “no sé cómo hacerlo”, pero por ejemplo es capaz de establecer correspondencia entre vectores, se trata de construcciones mentales procesos que no han sido coordinadas en forma adecuada por la combinación lineal, en otras palabras el objeto necesario para dar respuesta a la interpretación geométrica no ha sido construido.

En general hemos de considerar que las descomposiciones genéticas propuestas para la investigación sirvieron de buen modelo para el análisis de las evidencias, mostrando para este caso que los estudiantes, construyen el concepto adhiriéndose a lo presupuestado, dando cuenta a través de la combinación lineal como elemento articulador de las dificultades que estos muestran. Proponemos profundizar el estudio multinterpretativo como parte del ciclo de investigación en APOE, para determinar la evolución cognitiva de los esquemas involucrados en la construcción del concepto transformación lineal.

Referencias bibliográficas

- Arnal, J. del Rincón, D., y La Torre, A. (1992). Investigación educativa: fundamentos y metodología. Barcelona: Labor
- Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education*, II. En J. Kaput, A. H. Schoenfeld & E. Dubinsky (Eds.) *CBMS Issues in Mathematics Education*, 6, 1-32.
- Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*. 8(3), 25 – 41.
- Dubinsky, E., Dauterman, J., Leron, U. y Zazkis, R. (1994). On learning fundamental concepts of Group Theory. *Educational studies in Mathematics*, 27, 267-305.
- Dorier, J.-L., Robert, A., Robinet, R. y Rogalski, M. (1997). L'Algèbre Linéaire: L'obstacle du Formalisme à travers diverses recherches de 1987 à 1995. En J.-L. Dorier (Ed), *L'Enseignement de l'Algèbre Linéaire en Question* (pp. 105-147), Grenoble : La Pensée Sauvage Éditions.
- Goetz, J.P. Lecompte M.D. (1988). Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa. España: Morata.
- Roa, S., & Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (2010) 13 (1): 89-112.