

La Resolución de Problemas en el Desarrollo de la Competencia Matemática

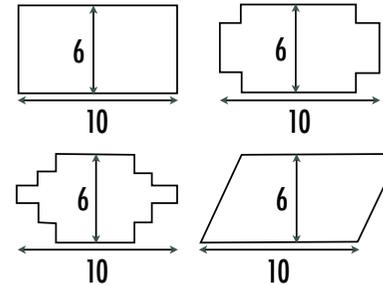
Jose Luis Lupiáñez Gómez
Universidad de Granada, España

jueves 17 de noviembre de 2011

1

Un problema

Un carpintero tiene 32 metros de madera y quiere construir una pequeña valla alrededor de un parterre en el jardín. Está considerando los siguientes diseños para el parterre.



Indica si, para cada diseño, se puede o no construir el parterre con los 32 metros de madera.

jueves 17 de noviembre de 2011

2

Un resultado

- [Evaluación PISA 2003
- [El 87,1% de los estudiantes españoles de 15 años no lo resolvieron

jueves 17 de noviembre de 2011

3

Una consecuencia

- [“Nuestros alumnos no son competentes en matemáticas”
- [“El sistema educativo español no funciona”

jueves 17 de noviembre de 2011

4

Una explicación

- [“Esos problemas no son los habituales en el aula”
- [“No fomentamos el desarrollo de la competencia matemática mediante el tipo de problemas que afrontan nuestros escolares”

Un interrogante

- [¿Qué tipo de problemas promueven y permiten evaluar el desarrollo de la competencia matemática?

Esquema

- [Competencia matemática y resolución de problemas
- [Criterios para seleccionar y diseñar problemas
- [Los problemas no sólo se resuelven. También se inventan
- [Cerrando ideas... y abriendo otras

Competencia matemática

Competencia matemática

- [¿Es la nueva moda en educación?
- [¿Es básicamente hacer lo mismo que se venía haciendo en las aulas hasta ahora, pero llamado de otra forma?
- [¿Es totalmente contrario a la enseñanza de la matemática centrada en el aprendizaje de contenidos?
- [¿Qué significa ser competente en matemáticas?

Competencia matemática

- [Pluralidad de acepciones... pero con elementos comunes
- [Un enfoque funcional de las matemáticas escolares
- [Aplicar los conocimientos matemáticos para dar respuesta a situaciones y problemas en una variedad de situaciones
- [Situaciones personales, públicas, profesionales y científicas
- [Expresa una expectativa de aprendizaje a largo plazo
- [Desarrollo integral de ciudadanos

Competencia matemática

- [Plantear y responder cuestiones propias de la matemática
- [Crear y discutir justificaciones matemáticas
- [Expresar y comprender enunciados e ideas matemáticas
- [Plantear y resolver problemas
- [Escoger y relacionar sistemas de representación
- [Dominar el lenguaje simbólico y las rutinas básicas
- [Emplear y valorar herramientas tecnológicas

<http://www.youtube.com/WATCH?V=RLPRXHBN19I>

Diseño y selección de tareas

jueves 17 de noviembre de 2011

13

Diseño y selección de tareas

- [Problemas, ejercicios, cuestiones,...
- [¿Por qué “diseñar y seleccionar”?
- [No se agota el tema... ni pretendo teorizar

jueves 17 de noviembre de 2011

14

Diseño y selección de tareas

- [Criterios singulares

Adecuación, Complejidad,
Modelización,
Empleo de materiales y recursos

jueves 17 de noviembre de 2011

15

Diseño y selección de tareas

- [Criterios singulares y de conjunto

Secuenciación y
Gestión del aula

jueves 17 de noviembre de 2011

16

Adecuación

- [A los contenidos y a las expectativas establecidas
 - Conceptos y procedimientos involucrados
 - Significados posibles
 - De qué conocimientos parten los escolares
 - Qué espera el profesor que aprendan los escolares

Adecuación (Contenidos)

- [Consideremos el tema de los números naturales
- [Concretamos los contenidos y los objetivos centrados en el estudio de relaciones numéricas
- [Seleccionamos tres libros de texto
- [Comparamos la selección de contenidos y los objetivos perseguidos

Contenido	Propuesta SM	Propuesta Anaya	Propuesta Proyecto Sur
Factorización			Descomposición de números
Secuencias aditivas		Tareas de ampliación	Buscar términos desconocidos en secuencias
Estructura $(N,+)$	Propiedades de la suma y resta que dejan invariante el resultado. Relaciones suma y resta Operaciones indicadas con suma y resta	Operaciones indicadas con sumas y restas. Propiedades conmutativa y asociativa	
Orden natural			

Marín (2011)

Objetivos	Propuesta SM	Propuesta Anaya	Propuesta Proyecto Sur
Descubrir e inventar relaciones entre números naturales.			X
Expresar números naturales como resultado de operaciones básicas entre otros naturales.	X	X	X
Justificar regularidades en un conjunto de números.			X
Describir estructuras aditivas o multiplicativas que compartan 2 ó 3 números.			X

Marín (2011)

Criterios para el diseño y selección de tareas

Adecuación (Expectativas)

- [Consideremos ahora el tema de gráficas
- [¿Qué tareas se les ocurren para trabajar este tema?
- [Veamos tres ejemplos

Criterios para el diseño y selección de tareas

Adecuación (Expectativas)

Las calificaciones de un grupo de 25 alumnos a un examen de matemáticas son las siguientes.

7, 8, 5, 2, 4, 6, 7, 8, 10, 3, 6, 5, 7, 9, 9, 4, 7, 8, 10, 5, 5, 10, 9, 6 y 10.

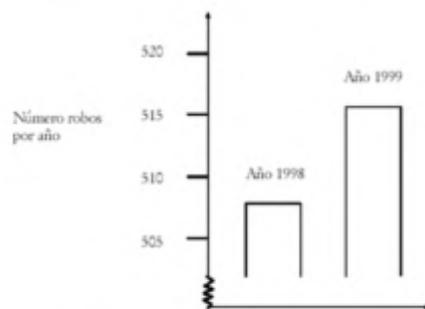
Representa estos datos en un diagrama de frecuencias.

Criterios para el diseño y selección de tareas

Adecuación (Expectativas)

Un presentador de TV mostró el gráfico siguiente y dijo: “Este gráfico muestra que hay un enorme aumento del número de robos comparando 1998 con 1999”.

¿Consideras que la afirmación del presentador es una interpretación razonable del gráfico? Da una explicación que fundamente tu respuesta.



Criterios para el diseño y selección de tareas

Adecuación (Expectativas)

Para hacer un trabajo en casa sobre el medio ambiente, unos estudiantes han recogido información sobre el tiempo de descomposición de varios tipos de basura que la gente desecha:

Basura	Tiempo
Piel de plátano	1-3 años
Piel de naranja	1-3 años
Caja de cartón	0,5 años
Chicle	20-25 años
Periódico	Pocos días
Vaso de plástico	Más de 100 años

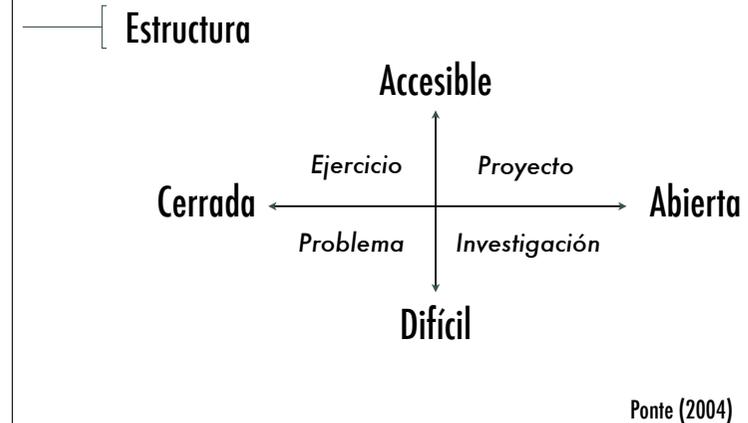
Un estudiante piensa en cómo representar los resultados mediante un diagrama de barras.

Da una razón de por qué no resulta adecuado un diagrama de barras para representar estos datos.

Complejidad

- [Presentación y formulación de la tarea
 - Oraciones, vocabulario, tiempos verbales
 - Formato: elección múltiple, respuesta cerrada o abierta
 - Contextos más o menos motivadores y auténticos
 - Representaciones como apoyo

Complejidad



Complejidad

- [Empresa de confección, fabrica dos tipo de camisas, A y B
 - Capacidad diaria: 300 metros de tejido y 300 horas de trabajo
 - Camisa A: 2 metros, 3 horas, 10\$ beneficio
 - Camisa B: 3 metros, 1,5 horas, 12\$ beneficio

1. Determinar el beneficio obtenido al vender 600 camisas A y 300 B.
2. Suponemos que ese beneficio es medio (según la producción máxima). Si por cada diez camisas ese beneficio sube un 0,5%, ¿Cuál será el beneficio exacto si se venden 53 camisas A? ¿Qué tipo de camisas es más rentable?
3. Si un cliente necesita 120 camisas al día, ¿puede la empresa satisfacer esa condición?
4. Elabora un informe que argumente si la empresa se puede clasificar como grande, mediana o pequeña.
 - Una mayor producción ¿genera siempre mayores beneficios?
 - Analiza la influencia de los precios de la energía, el costo de los empleados y el coste medio de los productos.
 - ¿Qué estrategias pueden aumentar los beneficios?

Criterios para el diseño y selección de tareas

Complejidad

[Demanda cognitiva exigida

OCDE (2003)

REPRODUCCIÓN	CONEXIÓN	REFLEXIÓN
<ul style="list-style-type: none"> * Contextos familiares * Conocimientos ya practicados * Aplicación de algoritmos estándar * Realización de operaciones sencillas * Uso de fórmulas elementales 	<ul style="list-style-type: none"> * Contextos menos familiares * Interpretar y explicar * Manejar y relacionar diferentes sistemas de representación * Seleccionar y usar estrategias de resolución de problemas no rutinarios 	<ul style="list-style-type: none"> * Diversidad de contextos * Creatividad * Ejemplificación y uso de conceptos * Relacionar conocimientos para resolver problemas complejos * Generalizar y justificar resultados obtenidos

Criterios para el diseño y selección de tareas

Modelización

[Caso concreto de problemas enunciados en contexto real, que deben ser reformulados en términos matemáticos para su resolución y que después deben interpretarse en el contexto original.

Criterios para el diseño y selección de tareas

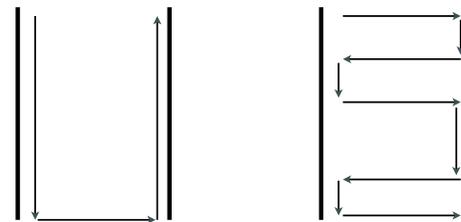
Modelización

En 1993 las reservas mundiales de gas natural se estimaron en 141,8 billones de metros cúbicos. Desde entonces se han consumido anualmente 2,5 billones de metros cúbicos. Haz una estimación justificada de cuándo se acabarán las reservas de gas natural.

Criterios para el diseño y selección de tareas

Modelización

Un cartero debe dejar la correspondencia en los buzones de una calle de su ciudad. Se le ocurren dos formas de hacer el recorrido. ¿Cuál será la más conveniente?



Materiales y recursos

- [Gran variedad y disponibilidad
- [No hay que confundir su potencial con su interés
- [Su éxito reside en la planificación del profesor
- [Pueden suministrar una motivadora e innovadora oportunidad de aprendizaje a los escolares

Materiales y recursos

- [Calculadora, proyector y sensor de movimiento
- [La calculadora muestra una gráfica espacio/tiempo
- [El escolar debe reproducirla con su movimiento

Secuenciación

- [Constituye una serie organizada de información y propuestas de actuación del profesor
- [La importancia de la intencionalidad
- [Funcionalidad de las tareas

Secuenciación

- [Conocer aprendizajes previos de los escolares
- [Promover la motivación
- [Fomentar la interrogación y el cuestionamiento
- [Elaborar y construir significados
- [Ejercitación y práctica
- [Ampliación de conocimientos
- [Síntesis
- [Evaluación

Criterios para el diseño y selección de tareas

Secuenciación (Elaborar y construir significados)

- [Seguimos con el tema de los números naturales
- [Centrados ahora en el estudio de aproximaciones numéricas
- [Seleccionamos dos libros de texto
- [Analizamos los contenidos, objetivos, secuencia, modo de presentación, situaciones, apoyo gráfico y complejidad

jueves 17 de noviembre de 2011

37

APROXIMACIÓN DE UN NÚMERO A UN DETERMINADO ORDEN DE UNIDADES

Cuando un número tiene muchas cifras, es difícil de recordar y de operar. Por eso solemos sustituirlo por otro más manejable de estos aproximados. Por ejemplo, si tenemos en el censo municipal que una población tiene 127 491 habitantes, al manejar ese dato seguramente diremos que tiene:

TRUNCANDO \rightarrow 120 000 habitantes
 REDONDEANDO \rightarrow 130 000 habitantes

En ambos casos hemos aproximado sabiendo solamente las decenas de millar y despreciando los órdenes de unidades inferiores.

Observa que, de las dos aproximaciones, es más exacto el redondeo, pues el número está más cerca de 130 000 que de 120 000.

TRUNCAR es sustituir las cifras por ceros hasta un determinado orden de unidades.
REDONDEAR es sustituir el número por la cantidad de unidades de un determinado orden que quede más próxima.

EJEMPLO
 Aproximar a los centenas, por truncamiento y por redondeo, los siguientes números:

a) 137 640 b) 3 850
 TRUNCAMIENTO \rightarrow 137 000 REDONDEO \rightarrow 3 900
 REDONDEO \rightarrow 138 000 TRUNCAMIENTO \rightarrow 3 800

ACTIVIDADES

Aproxima a los millares, por truncamiento y por redondeo, los siguientes números:

a) 13 980 b) 6 295
 c) 65 600 d) 39 400
 e) 9 002 f) 9 750
 g) 25 090 h) 33 565

Redondea a los millones los siguientes números:

a) 57 224 000 b) 42 987 000
 c) 325 742 231 d) 808 427 000

El valor de una ficha es de 239 691 €. Se va programando por el precio de la ficha, y así se acumulan del valor exacto, ¿qué respuesta darías?

jueves 17 de noviembre de 2011

38

Contenidos	Aproximación de un número. Redondeo. Truncamiento
Objetivos	Obtener aproximaciones por redondeo y truncamiento Estimar en situaciones concretas valores aproximados de una cantidad
Descripción de la secuencia	Justificar la utilidad de las aproximaciones Definir los términos "redondear" "truncar" Iniciar el "grado de exactitud de una aproximación" Indicar un procedimiento para redondear y truncar
Modo en que se presenta la información	Se justifica la utilidad de la aproximación Se parte de una tarea y se indica la técnica para redondear y truncar en la recta numérica y una tabla Se compara la exactitud de dos aproximaciones Se definen los términos redondeo y truncar Se resuelve una nueva tarea con el mismo procedimiento Se llama la atención sobre algún convenio del redondeo Se proponen tareas de ejercitación del procedimiento de complejidad parecida; y una tarea para estimar una cantidad en una situación personal
Situaciones	Públicas y personales
Apoyo gráfico	Tabla; recta numérica
Complejidad de las tareas	Reproducción

Marín (2011)

jueves 17 de noviembre de 2011

39

2 EL REDONDEO

Para ver qué deporte es por una ciudad con esta escena, se necesitan, en la ciudad más poblada del mundo:

Por la ciudad de Nueva York se necesitan 17 602 000 personas.
 Para recibir solo personas con más de 10 años se necesitan 11 millones de personas.
 ¿Cuántas personas más se necesitan para completar el millón más próximo?

Cuando un número es muy grande y complicado, es útil redondearlo. Redondear un número es sustituirlo por otro próximo a él y más sencillo.

¿Cuántas personas se necesitan al menos al menos 10 años, para completar el millón más próximo?

PARA PRACTICAR

1. Redondea cada uno de los siguientes números, primero al millón y luego al millar más próximo:
 a) 947 543 b) 97 078 675 c) 980 420 475

2. El valor exacto de un partido de fútbol es de 23 347 espectadores. Redondea este número al millar más próximo.
 23 347 \rightarrow 23 000
 Desmultiplica por 100 el número de espectadores que asistieron al partido y redondea el resultado al millar más próximo.

3. ¿Cuál es el valor de una ficha de 239 691 € si se acumulan del valor exacto, ¿qué respuesta darías?

4. ¿Qué valor tiene un número que se aproxima al millón más próximo a 1 100 000?

jueves 17 de noviembre de 2011

40

Contenidos	Aproximación de un número. Redondeo
Objetivos	Obtener aproximaciones por redondeo Construir una regla para efectuar redondeos Determinar conjuntos de números con el mismo redondeo
Descripción de la secuencia	Definir el término "redondear" Justificar la utilidad del redondeo Indicar un procedimiento para redondear basado en el orden natural
Modo en que se presenta la información	Se contextualiza una tarea matemática Se justifica la necesidad del procedimiento que se va a manejar Se indica el procedimiento mediante una representación en la recta numérica (e icónica) Se define el término redondeo en un cuadro de texto Se resuelve una nueva tarea con el mismo procedimiento Se proponen tareas de ejercitación de complejidad parecida; tareas para esbozar un procedimiento diferente de redondear y tareas para obtener números con igual redondeo
Situaciones	Públicas
Apoyo gráfico	Fotografías alusivas a las situaciones; recta numérica
Complejidad de las tareas	Reproducción y conexión

Marín (2011)

Criterios para el diseño y selección de tareas

Gestión del aula

- [Implica una amplia variedad de decisiones y alternativas
- [Formas de agrupamiento de los escolares

Criterios para el diseño y selección de tareas

Gestión del aula

Ponte (2004)

MODO	USO	INTERÉS
Gran grupo	Presentar materia Conducir debates Plantear cuestiones	Negociar significados Buscar acuerdos Produce aportes ricos
Grupos pequeños	Investigaciones Proyectos	Enfatiza la argumentación División de tareas por cualidades
Parejas	Tareas relativamente estructuradas Problemas	Intercambio positivo muy próximo
Individual	Ejercitación Problemas Memorización	Fomenta la responsabilidad personal y la autonomía

Invención de problemas

Invención de problemas

- [Una faceta de la competencia matemática
- [PISA: “Plantear y resolver problemas”
- [NCTM: “Conocimientos y herramientas para formular problemas”
- [¿De qué informa al profesor?

jueves 17 de noviembre de 2011

45

Invención de problemas

- [¿Cómo se puede introducir en el aula?
 - A partir de ciertos datos
 - Un enunciado inacabado
 - Un enunciado completo y se pide una pregunta
 - Se predetermina un resultado y/o un método de resolución
 - Brindando un soporte gráfico o pictórico
 - Introduciendo la complejidad
 - Plantear y, después, resolver.

jueves 17 de noviembre de 2011

46

Invención de problemas

De acuerdo con la información de la siguiente figura, inventa un problema matemático que te parezca difícil de resolver y que en su resolución se utilice una o varias de las operaciones de suma, resta, multiplicación o división. Si lo consideras necesario, puedes agregar más datos o información.



Espinoza (2011)

jueves 17 de noviembre de 2011

47

Invención de problemas

Con la siguiente información inventa un problema matemático que te parezca difícil de resolver y que en su resolución se utilice una o varias de las operaciones de suma, resta, multiplicación o división. Si lo consideras necesario, puedes agregar más datos o información.

Un tren con cuatro vagones para pasajeros sale de una estación a las 9:00 h con destino a Málaga. El tren tiene una capacidad máxima para 294 pasajeros.

Espinoza (2011)

jueves 17 de noviembre de 2011

48

Unos alumnos de 3º están haciendo una prueba para Educación Física que consiste en correr 1000 metros en menos de 6 minutos y medio. Martha va por la 5ª vuelta y lleva 3 minutos y medio. Para superar la prueba. ¿Podría seguir el mismo ritmo en las vueltas que le quedan?

Tres chicos giran en torno a una plaza y una vuelta son 80 metros. Si el primer niño consigue dar 17 vueltas y la siguiente niña 29 y en total han hecho entre todos 5000 metros ¿Cuántas vueltas ha dado el 3º niño?

Juan y Paula van a la plaza a correr y empiezan a correr desde el mismo sitio. Juan va a 18km/h, mientras que Paula va a 13km/h. Cada 500 metros Juan descende su velocidad en 0,5km/h, mientras que Paula tarda 1800 m. en hacer este recorte. Si están corriendo durante dos horas ¿Quién correrá más vueltas?

María corre 6 m. por segundo, Juan 3 m. y Pepe 1 m. Realiza una estadística que nos cuente cada cuántas vueltas se encontrarán en la meta si al salir, María le deja 4 segundos de ventaja a Pepe y 6 a Juan.

Espinoza (2011)

Cerrando ideas

Cerrando ideas... y abriendo otras

- [Competencia matemática y resolución de problemas
- [Criterios para seleccionar y diseñar problemas
- [Los problemas no sólo se resuelven. También se inventan
- [La evaluación de la competencia matemática

La Resolución de Problemas en el Desarrollo de la Competencia Matemática

Jose Luis Lupiáñez Gómez
lupi@ugr.es