CB-179

EL NÚMERO REAL Y LA RECTA. COMPRENSIONES DE ESTUDIANTES SECUNDARIOS Y UNIVERSITARIOS.

Virginia Montoro
vmontoro@gmail.com / virginia.montoro@crub.uncoma.edu.ar
Universidad Nacional del Comahue. Centro Regional Universitario Bariloche.
Rep. Argentina

Núcleo temático: Investigación en Educación Matemática.
Modalidad**:** Comunicación Breve
Nivel**:** Bachillerato y Universitario
Palabras claves: número real – recta numérica – educación-secundaria – estudiantes-universitarios.

Resumen:

Estudiamos las concepciones de estudiantes de secundaria y universidad sobre la representación de los números reales en la recta. Participaron 307 estudiantes con distinto grado de formación matemática. Analizamos tres tareas que versaron sobre la representación de distintos tipos de números reales en la recta; diferenciación de racionales y reales en la recta numérica y modos de concebir la naturaleza de la recta numérica.

Se caracterizaron las respuestas de los estudiantes en cada una de las tareas, realizándose un Análisis Factorial de Correspondencias Múltiple y posterior Clasificación Jerárquica de los estudiantes según fueran similares sus respuestas, asociándose las clases resultante con el nivel de estudio en matemáticas de los estudiantes.

Exponemos un gradiente de profundidad de concepciones, desde la ajenidad frente al problema asociada a estudiantes con menor nivel de estudio de matemática, pasando por una visión centrada en los reales identificados como los enteros y sus fracciones o la densidad numérica potencial de la recta identificando a los reales con los decimales, *finalmente estudiantes avanzados de Biología con una concepción instrumental de la recta como sostén de las magnitudes, y estudiantes avanzados de Matemática que se centraron en la completitud de los reales y la continuidad de la recta.*

Introducción.

Si bien la representación de cada número mediante un punto, ayuda a intuir el orden continuo y total del conjunto de números reales y la continuidad de la recta permite visualizar la completitud de este conjunto, la representación de los números reales sobre la recta numérica implica la comprensión, por parte de los estudiantes, de cuestiones cognitivamente complejas como el continuo geométrico, la biyección entre el conjunto de

ISBN 978-84-945722-3-4

los números reales y la recta (Coriat y Scaglia, 2000) y el infinito actual. Siendo esta última una noción especialmente contraintuitiva y que requiere de contextos educativos que propicien la reflexión matemática a través de intervenciones de enseñanza específicas (Juan, Montoro y Scheuer, 2012; Monaghan, 2001; Montoro, 2005; Moreno-Armella y Waldegg, 1995; Waldegg, 1996).

El objetivo del presente estudio fue conocer cómo estudiantes con muy diferentes niveles de formación matemática conciben la recta numérica como representación de los números reales. Mostraremos el análisis de las respuestas de estudiantes de escolaridad secundaria y universitarios a tres tareas destinadas a evidenciar sus concepciones respecto de la recta numérica, analizando cómo conciben el infinito, la densidad y completitud de los números reales y su relación con la continuidad de la recta.

Metodología

Participantes. Participaron 307 estudiantes. Ciento sesenta y siete (167) de escuela secundaria, de los tres últimos cursos de un mismo centro educativo: tercero, cuarto y quinto curso (3ro, 4to y 5to) y 140 de universidad. Estos últimos, fueron *ingresantes* y *avanzados* de tres carreras distintas en las que los estudios de matemática tienen diferente peso: Matemática, Biología y Educación Física (MI, MA, BI, BA, EFI, EFA).

Tareas y procedimientos. Las tres tareas en las que enfoca esta comunicación formaron parte de un cuestionario más amplio, destinado a indagar sobre la comprensión del número real, respondido en forma escrita e individual en las respectivas instituciones educativas y en un tiempo medio de 40 minutos.

Tarea 1: Representación de números reales en una recta numérica con escala decimal. Consistió en, dado un número, encontrar su lugar en la recta numérica, presentada sobre un cuadriculado, marcando en ella 0 y 1 de modo de ofrecer una escala. Se solicita graficar dos números enteros, uno positivo y uno negativo (2 y -2), una fracción no entera (1/2), dos números decimales del orden de los décimos (0,2 y 2,2), un decimal periódico ($2{,}2\widehat{9}$) y un irracional construible muy conocido ($\sqrt{2}$). Luego se sugiere la posibilidad de explicar por qué no se pudo representar alguno de los números.

Tarea 2: La recta numérica como representación de los números reales. Diferenciación entre densidad y completitud- continuidad.

ISBN 978-84-945722-3-4

Consistió en tres situaciones hipotéticas de marcar (o quitar) infinitos números sobre la recta. En la primera situación se propone marcar todos los racionales, utilizando la palabra *fracciones,* en la segunda se propone marcar, en esa misma recta sostén, todas las raíces de las fracciones (racionales e irracionales). Por último, se propone la situación inversa a la primera de retirar todos los racionales y pensar qué quedaría en la recta

Tarea 3: La naturaleza de la recta numérica. El infinito, la densidad y completitud de los números reales y la relación con la continuidad de recta.

Se solicita imaginar un microscopio (ideal) de gran potencia que enfoca sobre un fragmento de recta numérica y agranda la imagen, invitando a pensar en un segmento de recta o intervalo de reales, que se agranda (primer ítem) y se pide que se dibuje lo que se ve durante este proceso (segundo ítem), por último, se solicita qué se describa que se ve cuando el aumento es "infinito" (tercer ítem). Esta tarea es similar a la utilizada por Romero (1996, p6) con algunas, aunque fundamentales, modificaciones, principalmente la incorporación de la palabra *ideal* a fin de invitar a los estudiantes a que "jueguen el juego" y el hecho de nombrar a la recta como recta "numérica".

Procedimientos de análisis

Tarea 1: Se categorizaron las respuestas gráficas (una por una) según los números que los estudiantes habían ubicado en la recta, desde aquellas respuestas en las que no ubicaron ninguno, hasta las respuestas en que figuraban correctamente ubicados los 7 números solicitados y teniendo en cuenta, eventualmente, las justificaciones dadas. Resultando una categorización en 8 clases que se describen en la Tabla 1 a continuación.

Tabla 1: Caracterización de las clases de respuestas a la tarea y un ejemplo literal de respuesta de algún/a estudiante característico de la clase.

Caracterización de las respuestas	Ejemplos
1.1: *Grafican sólo los enteros*. Ubican sólo -2 y 2. Sin justificar o manifestando que no grafican porque no saben, no entienden o no recuerdan como se hace.	Estudiante de 3ro: Ubica sólo 2 y -2. Sin más justificación
1.2. *Grafican sólo decimales finitos (no ½).* Ubican correctamente a -2; 2; 0,2 y 2,2. La fracción ½ la ubican entre 1 y 2. No ubican $2{,}2\widehat{9}$ ni $\sqrt{2}$ sin justificar o justificando que no saben o no se acuerdan.	Estudiante de 5to: Ubica -2; 2; 0,2 y 2,2 bien. La fracción 1/2 la ubican entre 1 y 2. Agrega: $\sqrt{2}$ *no lo pude graficar porque no me acuerdo*.
1.3. *Grafican sólo racionales finitos*. Ubican a -2; 2; 0,2; 2,2 y 1/2 bien; no ubican $\sqrt{2}$ ni $2{,}2\widehat{9}$	Estudiante de BI: Ubica a -2; 2; 0,2; 2,2 y 1/2 bien. Agrega: $\sqrt{2}$ *no lo pude graficar porque no lo se*

ISBN 978-84-945722-3-4

justificando que no saben o no se acuerdan.	*calcular.* $2{,}2\overset{\frown}{9}$ *porque no me acuerdo*
1.4. *Grafican sólo racionales - Infinito como indefinido*. Ubican correctamente a -2; 2; 0,2; 2,2 y ½. No ubican $\sqrt{2}$ o $2{,}2\overset{\frown}{9}$ justificando que no lo hacen porque no se los pueden representar; porque son infinitos.	Estudiante de 5to: Ubica -2; 2; 0,2; 2,2 y ½. Bien. No grafica $2{,}2\overset{\frown}{9}$ ni $\sqrt{2}$ aclarando *que el resultado da un número con coma con cifras infinitas.*
1.5. *Grafican sólo racionales*. Ubican correctamente -2; 2; 0,2; 2,2 y ½. $2{,}2\overset{\frown}{9}$ muy próximo a 2,3 y no representan $\sqrt{2}$ o lo hacen aproximadamente pero mal ubicada. sin justificar porque no lo hacen o justificando que no saben cómo se calcula la raíz.	Estudiante de 3ro: Ubica -2; 2; 0,2; 2,2 y ½ bien. $2{,}2\overset{\frown}{9}$ muy próximo a 2,3 y representa $\sqrt{2}$ entre 0,2 y ½. Aclara $\sqrt{2}$ *es aproximado, ya que 2 no tiene raíz racional es irracional.* $2{,}2\overset{\frown}{9}$ *es aproximado porque no tengo espacio.*
1.6. *Grafican todos aproximados*. Ubican correctamente -2; 2; 0,2; 2,2; ½. $2{,}2\overset{\frown}{9}$ próximo a 2,3 y aproximan $\sqrt{2}$ a 1,41. No justifican.	Estudiante de MI: Ubica -2; 2; 0,2; 2,2; ½ bien. $2{,}2\overset{\frown}{9}$ muy próximo a 2,3 y $\sqrt{2}$ en 1,41.
1.7. *Grafican todos en forma aproximada-exacta*. Ubican correctamente -2; 2; 0,2; 2,2 y ½. $2{,}2\overset{\frown}{9}$ aproximado a 2,3 y $\sqrt{2}$ por método geométrico o aproximado (justificando que hubiesen necesitado el compás para hacerlo exacto).	Estudiante de 4to: Ubica correctamente -2; 2; 0,2; 2,2 y ½. $2{,}2\overset{\frown}{9}$ aproximado a 2,3 y $\sqrt{2}$ por método geométrico (trasladando con compas la hipotenusa del triángulo rectángulo de catetos unitarios).
1.8. *Grafican todos en forma exacta*. Ubican correctamente -2; 2; 0,2; 2,2 y ½. Hacen explícito que $2{,}2\overset{\frown}{9} =$ 2,3 y grafican $\sqrt{2}$ por método geométrico.	Estudiante de MA: Ubica -2; 2; 0,2; 2,2 y ½ bien. Marcan 2,3 (en vez de $2{,}2\overset{\frown}{9}$) y grafica $\sqrt{2}$ por método geométrico.

Tarea 2 y 3: Estas tareas consistían en tres ítems (cada una). En los dos primeros de la Tarea 2, obtuvimos una respuesta de opciones y una argumentación de la misma en forma de respuesta abierta y para el tercer ítem solo una respuesta abierta; mientras en la Tarea 3 en el primer y tercer ítem obtuvimos respuestas verbales abiertas y para el segundo ítem una respuesta gráfica (dibujo).

Para cada tarea se realizó por separado la caracterización de las respuestas de los tres ítems, para luego a través de un Análisis Factorial de Correspondencias Múltiples (AFCM – Benzécri (1973)) observar posibles asociaciones de respuestas a los tres ítems y realizar una Clasificación Jerárquica Ascendente (CJA - Ward, 1963), agrupando en una clase a las respuestas similares. Resultando una categorización en 7 clases para la Tarea 2 y en 8 clases para la Tarea 3. Estas se describen en las Tablas 2 y 3 respectivamente.

Tabla 2: Caracterización de las clases de respuestas a la Tarea 2 y un ejemplo literal de respuesta de algún/a estudiante característico de la clase.

Caracterización de la concepción	**Ejemplos**

ISBN 978-84-945722-3-4

2.1. *Ajenidad.* No contestan al menos dos de los tres ítems.	Estudiante de EFI: 1. NC / NJ / 2a. Hay lugar para muchísimos números /NC /NC.
2.2. *La recta representa a los enteros y las fracciones (no enteras), no explicada.* Consideran que con las fracciones (racionales) se completa la recta, sin explicitar su pensamiento. Evitan la tarea de ubicar más números en la recta. No conocen números no-racionales.	Estudiante de 3ro: Las fracciones si completan la recta (no justifica). NC / NJ. Si se quitan las fracciones *quedarían los enteros supongo*
2.3. La recta es infinito - potencialmente densa. La recta representa a los enteros y las fracciones (no enteras). Consideran que la recta no se completa porue su concepción del infinito, como proceso sin fin, está mediando en su comprensión de la recta como modelo de los números reales. Muchos no consideran a los enteros como racionales.	Estudiante de 5to: Las fracciones no completan la recta. *Porque hay infinitos números racionales por lo que la recta nunca se completaría*. Las raíces no completan la recta. Hay lugar para infinitos números. *Porque siempre habría números que agregar a la recta ya que éstos son infinitos. Si se quitan las fracciones quedarían los enteros.*
2.4. La recta es infinitamente densa e infinito es todo. Confunden los reales con los racionales Consideran que los racionales completan la recta porque son infinitos y deben estar "todos". Su concepción del infinito como identificado con todo está mediando en su comprensión de la recta como modelo de los números reales.	Estudiante de MA: Las fracciones sí completan la recta. *Si vos tenés 1/2, la mitad va a ser 1/4, la mitad 1/8, la mitad 1/16; infinitamente. Así llenas la recta*. Las raíces no completan la recta. Hay lugar para infinitos número. *Los números son infinitos, te limita pensar en potencias y raíces, pero si tenes todos se completa. Si quito las fracciones quedarían todos los demás números (enteros, irracionales, π, números),*
2.5. La recta representa los racionales. Confunden los reales con los racionales. Sus respuestas hacen pensar que identifican a los números reales con los racionales.	Estudiante de BI: Las fracciones si completan la recta. *Porque en ella están representados todos y cada uno de los números. Las raíces si completan la recta*. No hay lugar para más números. NJ. *Si quito las fracciones quedan los enteros.*
2.6. La recta representa los racionales y otros números no-racionales - No explicada. Consideran que con las fracciones (racionales) no se puede completar la recta, ya que existen otros números, aun cuando no tengan muy claros cuantos ni cuales, algunos no consideran a los enteros como racionales. Con las raíces tampoco se completa porque existen otros números.	Estudiante de 4to: Las fracciones no completan la recta. *No sé cómo explicarlo*. Las raíces no completan la recta. Hay lugar para muchos números. *Hay lugar para más números creo yo, no puedo explicarlo bien porque hay cosas que me falta ver en la materia. Si quito las fracciones quedan números que no son racionales.*
2.7. La recta representa a los reales completos. Sus respuestas hacen pensar que comprenden a los reales como la unión de los racionales y de los irracionales, conciben la recta como continua	Estudiante de MA: Las fracciones no completan la recta. *Faltarían "marcar" todos los números irracionales. Las raíces no completan la recta.* Hay lugar para infinitos número. *Faltarían ¨marcar¨ algunos números irracionales que no pueden escribirse como raíces por ej. e, π, etc. Si quito las fracciones quedarían infinitos números I.*

Tabla 3: Caracterización de las clases de respuestas a la Tarea 3 y un ejemplo literal de respuesta de algún/a estudiante característico de la clase.

Caracterización de las respuestas	**Ejemplos**
3.1. Ajenidad. El problema les es ajeno manifiestan no saber o no poder imaginar. No se comprometen con la actividad.	Estudiante de EFI: A: *No sé.* D: ND. I: *No sé.*
3.2. Recta dibujada o material: Conciben la recta como un dibujo, como la marca que deja	Estudiante de 3ro: A: *Veo una línea muy grande y números muy grandes y cada vez va aumentando más.*

ISBN 978-84-945722-3-4

el lápiz o la tinta de la impresora en un papel (no pueden abstraerse de la representación externa) o como constituida de materia (no pueden abstraerse del objeto real "microscopio"). La recta no es un objeto matemático.	D: Dibuja un segmento (rectangular) grueso con marcas rectangulares gruesas perpendiculares y dibuja (muy grandes) el 2 y el 3 (como si se hubiese aumentado el Zoom de la computadora).
3.3. Recta de puntos discreta. Ven uno pocos, muchos, una sucesión de puntos o una sucesión de infinitos puntos. La recta se concibe como conjunto de puntos (con medida) corresponde a la analogía del collar de perlas.	Estudiante de BA: A: *Se podría observar una sucesión de puntos*. D: Dibuja un segmento conformado por pequeños circulitos muy juntos uno de otros, al estilo collar de perla. I: NC
3.4. Recta de magnitudes. Regla graduada Ven la recta con la escala, segmentada, con divisiones y subdivisiones. Podríamos decir que conciben la recta numérica como el sostén de las magnitudes, es decir un instrumento de medida similar a una recta graduada decimal.	Estudiante de BA: *veo pequeñas divisiones que a medida que aumenta la potencia se hacen más pequeños los espacios entre cada nueva división*. D: Realiza una secuencia de tres dibujos (unidos por una fleca con la leyenda +*pot*) el primero un segmento sin extremos y con algunas marcas como divisiones, luego uno más pequeño con más marcas, por último, uno más pequeño y con muchas marcas y divisiones. I: *cada vez marcas más pequeñas.*
3.5. Densidad numérica potencialmente infinita Aseguran ver muchos o más números, nuevos números o bien números con más cantidad de cifras decimales a medida que agrandan la recta y con aumento infinito ven infinitos o todos los números. No presenta modalidades de NEM asociadas.	Respuestas de un/a estudiante de BI: A: *A* medida *que aumenta aparecen más números y números*. D: dibuja un segmento de recta, marca los extremos como 0 y 1. Hace muchas marcas entre los extremos. I: *Veo infinitos números.*
3. 6. Densidad numérica finitista: La recta se concibe como densa de números, sin embargo, no se nombra al infinito, y cuando se solicita pensar en un aumento infinito, simplemente se lo ignora o manifiesta que el infinito no es posible	Estudiante de 3ro: A: *números y números y más números*. D: dibuja un segmento de recta, marca los extremos y hace 7 marquitas, en cada una de ellas coloca los números 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7 y 1,8. I: *no sé*
3.7. Densidad numérica infinita: La recta se concibe como densa de números, pero, siempre está presente que hay infinitos números.	Estudiante de 4to: *Se ven muchos números y a medida que aumenta se ven más porque hay infinitos*. D: Dibuja el segmento correspondiente al intervalo (1,2) con flechitas en los extremos y realiza las marquitas de los décimos, escribe en cada marquita 1,2; 1,3; …y 1,9. I: *Se ven números infinitos.*
3.8. Continuidad. Conciben la recta como continua, y podríamos decir que una representación de la completitud de los reales; ya que a pesar de haber dado la recta como numérica aquí no aparecen ni números ni puntos.	Estudiante de MA: No ocurre nada, lo que ves es lo mismo que veías antes. D: una línea continua (sin levantar el lápiz) sin marcas ni números. I: Igual que antes lo que ves es lo mismo que antes, porque la recta es continua.

Clasificación de los estudiantes según las modalidades de respuesta a todas las tareas

A cada estudiante se le asoció una categoría de respuesta para cada tarea y, con el fin de validar esta asignación, se aplicó un procedimiento de control inter-juez para la totalidad de

ISBN 978-84-945722-3-4

las respuestas. Las jueces fueron dos docentes universitarias de matemática obteniéndose una coincidencia de un 98%.

Con la intención de describir las asociaciones entre modos de respuesta a las tres tareas en un mismo estudiante y de los estudiantes entre sí, como así también las relaciones entre los modos de respuesta con el Nivel de Estudio de Matemática (NEM) de los estudiantes, se aplicó un AFCM a los 307 estudiantes sobre los que se definieron tres variables de respuesta, una por cada tarea, con tantas modalidades como las clases resultantes en la clasificación de las respuestas para la tarea correspondiente y una variable de caracterización (NEM) con nueve modalidades (3ro, 4to, 5to, EFI, EFA, BI, BA, MI y MA). Se tomaron como variables activas para la formación de los factores a las variables de respuesta y como ilustrativa la variable NEM. Se realizó una clasificación de los estudiantes según la semejanza en sus modos de respuesta a las tres tareas y buscando asociaciones de las clases obtenidas con el nivel de estudio (NEM) de los participantes.

Resultados

Presentamos las clases obtenidas en la clasificación descripta en el párrafo anterior. informando la cantidad de estudiantes que la constituyen (N) y porcentaje de la población que representa, modalidades de respuestas asociadas (ver Tablas 1,2 y 3), modalidades de NEM relacionadas particularmente y una caracterización de las clases según las ideas presentes en los estudiantes de la clase.

1 Ajenidad. N=21 (7%). Modalidades de respuesta asociadas: 1.1, 2.1 y 3.1. Los estudiantes de esta clase sólo grafican enteros en la recta numérica y muestran ajenidad frente a la recta como modelo de los reales. Tiene asociada la modalidad EFI además en esta clase no hay ningún estudiante de MA, BA o BI.

2. Los enteros y sus fracciones. Ajenidad frente a la recta. N=54 (18%). Modalidades de respuesta asociadas: 1.2, 2.2 y 3.1**.** Los estudiantes de esta clase, sólo grafican decimales (finitos) en la recta numérica. Los números son los enteros y algunos números decimales o fraccionarios, no considerando números no-racionales y muestran ajenidad frente a la recta como modelo de los reales. No posee modalidades de NEM asociadas particularmente, sin embargo, el 67% de la clase son estudiantes de secundaria.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

3. Traslado de los enteros a los décimos. Los reales son los decimales finitos (hasta los décimos). Discretitud explícita. N=7 (26%). Modalidades de respuesta asociadas: 1.5, 1.3, 2.6, 3.6 y 3.2. Los estudiantes de esta clase grafican los decimales hasta los décimos, incluso los números infinitos e irracionales como decimales finitos. La recta representa los racionales y "otros" números no-racionales (no explicada) y es numéricamente densa (finitista); algunos no pueden abstraerse de la representación externa o material de la recta. Modalidades de NEN asociadas: 3ro, 4to y 5to.

4. Identifican a los reales con los decimales. N=58 (19 %). Modalidades de respuesta asociadas: 1.6, 2.5 y 3.5. Para estos estudiantes la recta representa a los racionales, grafican los números por su aproximación racional finita. Identifican a los reales con los racionales y estos últimos son infinito-potencialmente densos. La recta representa los racionales, grafican los números por su aproximación racional finita. Poseen uan visión finitista implícita cuando comparan colecciones o conjuntos y discreta respecto de los números. Es notable la presencias de MI y BI.

5. Mediada por la utilidad. Magnitudes. N=39 (13%). Modalidades de respuesta asociadas:1.7, 2.7 y 3.4. Grafican todos los números en forma aproximada-exacta. Su concepción del infinito, como proceso sin fin, media en su comprensión de la recta como modelo de los números reales. Conciben la recta numérica como el sostén de las magnitudes, es decir un instrumento de medida similar a una recta graduada decimal. Son infinitistas potenciales que conciben el infinito potencial como un proceso que "puede" seguir siendo "tanto como necesite. Tiene asociada la modalidad BA.

6. Comprensión relativa de los reales. Único infinito. La recta representa los decimales. N=42 (14%). Modalidades de respuesta asociadas: 1.6, 1.4, 2.3, 3.5 y 3.6. Grafican los números por sus aproximaciones racionales, la recta es numéricamente infinito-potencialmente densa, confunden los reales, con los enteros y las fracciones (no enteras). Al comparar conjuntos piensan que existen una única cantidad infinita

7. Los reales completos. La recta continua. N=14 (5%). Modalidades de respuesta asociadas: 1.8, 1.7, 2.7 y 3.8. La recta representa a los reales completos y es continua. Particularmente asociada a MA.

Discusión y conclusiones

ISBN 978-84-945722-3-4

Mostramos la diversidad de concepciones que pueden operar en un mismo grupo de estudiantes encontrando un gradiente de profundidad de estas ideas que comienzan desde de lo que hemos denominado *ajenidad* (7%) y considerar a los reales como los enteros y sus fracciones y no apropiarse de la representación de los reales en la recta (18%); ambas clases constituidas por estudiantes con menor nivel de estudios de matemática. En una zona intermedia se ubica la concepción discreta en dos versiones, una en la que se considera las propiedades de los enteros en los décimos (26%), principalmente estudiantes de secundaria y otra en la que se identifica a los reales con los decimales (19 %) con una notable presencia de estudiantes de MI y BI. Luego encontramos los estudiantes avanzados de Biología con una concepción mediada por la utilidad de los números reales identificándolos con las magnitudes (13%). El 14% de la población concibe el cardinal de los conjuntos infinitos como una única cantidad infinita y a los reales identificados con los decimales. Por último, el 5% de la población considera a los reales como completos y la recta como continua, son principalmente estudiantes avanzados de Matemática.

Referencias

Belmonte, J. L. y Sierra, M. (2011). Modelos intuitivos del infinito y patrones de evolución nivelar. RELIME. 14 (2), 139 -171. México

Benzécri, J. (1973). L'Analyse des Données. Tomo 1: La taxinomie. Tomo 2: L' Analyse des Correspondances. (Segunda edición 1976). Dunod, Paris.

Bergé, A., & Sessa, C. (2003). Completitud y Continuidad revisadas a través de 23 siglos. RELIME, 6(3), 163 -197. México

Coriat, M., & Scaglia S. (2000). La representación de los números reales en la recta. Enseñanza de las Ciencias, 18(1), 25-34.

Juan, M. T., Montoro, V y N. Scheuer. (2012). Colecciones infinitas. Ideas de estudiantes de escuelas secundarias. Educación Matemática, 24 (2). 61-90. México.

Monaghan, J. (2001). Young People’s Ideas of Infinity. Educational Studies in Mathematics, 48, 239-258.

Montoro V. (2005). Al infinito y más acá: concepciones de estudiantes universitarios. Infancia y Aprendizaje. 28 (4). 409 - 427. Madrid.

Moreno-Armella, L. y Waldegg, G. (1995). Variación y representación: del número al continuo. Educación Matemática, 7 (1), 12-28.

Romero, C. (1996). Una investigación sobre los esquemas conceptuales del continuo. Ensayo de un cuestionario. Enseñanza de las Ciencias, 14, 3-14.

Waldegg, G. (1996). Identificación de obstáculos didácticos en el estudio del infinito actual. Revista Mexicana de Investigación Educativa, 1 (1), 107-122. México.

Ward, J. (1963). Hierarchical grouping to optimize an objective function. Journal American Statistic Association, 58. 236-244.

ISBN 978-84-945722-3-4