INTERPRETACIONES DE ESTRATEGIAS EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DESDE LA TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE LO DIDÁCTICO Y CONCEPTO-IMAGEN Y CONCEPTO-DEFINICIÓN DE VINNER.

Miguel Alejandro Rodríguez, Marcela Parraguez, Patricia Vásquez
mrodriguez@upla.cl, marcela.parraguez@ucv.cl, patricia.vasquez@ucv.cl
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Modalidad: Comunicación Breve
Nivel: Medio
Tema: La Resolución de Problemas como Vehículo del Aprendizaje Matemático.
Palabras Claves: Estrategias, resolución de problemas.

Resumen

El ajuste curricular, que se ha implementando gradualmente en nuestro país, organiza la asignatura de matemática desde cuatro ejes: números, geometría, álgebra, datos y azar. Éstos se articulan desde dos componentes transversales, razonamiento matemático y resolución de problemas, los que están presentes en las mediciones internacionales PISA y TIMSS (PISA, 2007). Por otro lado, se presentan algunos antecedentes respecto de la resolución de problemas y el proceso de matematización. Destacan los planteamientos de (Polya, 1990; Schoenfeld, 1994), respecto de la resolución de problemas, donde el uso de estrategias y los procesos metacognitivos son variables a tener en cuenta. Por último, una propuesta para analizar estrategias de resolución de problemas desde el constructo concepto-imagen de (Tall & Vinner, 1981) y las prexeaologías que propone la TAD (Chevallard, 1999). Los ejemplos que se presentan incluyen problemas de la olimpiada ORPMAT, que convoca a estudiantes desde 11 a 17 años en la región de Valparaíso, Chile. A modo de conclusión, se desprende un indicador asociado al uso de estrategias en el proceso de resolución.

1.-Aspectos generales sobre la resolución de problemas

Pensar en la Resolución de Problemas (RP) como una actividad humana, desde una mirada histórica epistemológica, es remontarse a los inicios de nuestra humanidad. Lo anterior se puede evidenciar en los registros, como el Papiro de Rhin, donde resolver un problema, ya están presentes en contextos de agrimensura o del comercio (Luzardo, 2006; Cruz, 2006; Kleiner, 2007).

Por otro lado, desde un punto de vista educativo, (Polya, 1990) propone cuatro fases en la resolución de un problema, a saber: (1) Comprensión del problema, (2) Concepción de un plan, (3) Ejecución del plan y (4) Visión retrospectiva (Polya, 1985). Si bien la propuesta de (Polya, 1990) pone de manifiesto el empleo de heurísticas en el proceso de resolución; es la propuesta de (Schoenfeld, 1985) que amplía la mirada dando importancia a los procesos metacognitivos. La propuesta de Polya ha dado lugar para que otros autores no sólo aborden el tema de la resolución de problemas en otras áreas, como en Ciencias Sociales y Ciencias de la Naturaleza, sino que también ha servido para desarrollar y estimular otros métodos de resolución. En este sentido, (Mayer, 1983) reduce el método propuesto por Polya a dos grandes procesos: traducción y solución del problema (Pérez y Pozo, 1994).

2.-La resolución de problemas y el pensamiento matemático

Probablemente, desde una perspectiva actual, nuestra misión como profesores de matemática no debe focalizarse sólo en el desarrollo conceptual de la disciplina en cuestión, sino que además, en el desarrollo de un pensamiento matemático (PISA, 2007). Pero ¿qué es pensar matemáticamente?, probablemente la respuesta a esta pregunta encuentre, como en muchos otros conceptos, distintas vertientes o énfasis. Para este artículo, pensar matemáticamente será en esencia el poner de manifiesto tanto aspectos cognitivos como afectivos en situaciones diversas. El siguiente esquema nos ayudará a dar una mirada a algunos de esos componentes, Figura 1 (Rodríguez, Parraguez; 2012)

Figura 1. Esquema sobre algunos aspectos a fomentar en el pensamiento matemático

¿Cómo lograr perseverar, relacionar, inferir, argumentar, modelar, sorprenderse desde una matemática que a veces resulta ser, desde la forma como se la presenta, sólo mecánica y algorítmica? Siempre se percibe el mismo objetivo, llegar a una única respuesta utilizando una ecuación o fórmula (Fernández, 2003, Rodríguez, *et al*., 2012)

Probablemente, la resolución de problemas puede ayudarnos a dar respuesta a la interrogante planteada. En la actualidad, ésta es considerada una rama fundamental de la educación matemática y puede ser vista como el sustrato para el desarrollo tanto de capacidades como de valores y actitudes. En definitiva, para fomentar competencias que permitan mejorar tanto el proceso de matematización en el colegio (Treffers, 1987) como la comprensión, interpretación y solución de situaciones problemáticas de la vida cotidiana (Freudenthal, 1981).

3.- Hacia un modelo de análisis de la Resolución de problemas en matemáticas

Antes de continuar vamos a dar algunas precisiones, de lo que estamos entendiendo en este artículo por RP y estrategia. RP es una forma de pensar, donde el estudiante continuamente tiene que desarrollar diversas habilidades y utilizar diversas estrategias en su aprendizaje de la matemática (Santos, 1997). Ponemos énfasis en el término estrategia, porque lo consideramos un elemento clave para la RP; y para definir lo que es una estrategia, vamos a considerar la definición de (Escoriza, 2003), la cual manifiesta que las estrategias son procedimientos intencionales, deliberados, propositivos y cuya ejecución requiere control (regulación y evaluación) sistemático y continuado durante el proceso; orientados al logro de los objetivos previstos; si bien esta definición fue dada por (Escoriza, 2003) para trabajar estrategias lectoras, en este trabajo se ha adaptado para trabajar la RP en matemáticas.

3.1.-Elementos teóricos para el modelo de análisis de estrategias en la RP

El modelo de análisis de las estrategias de RP en matemáticas está basado en dos teorías de la DDM (Concepto imagen y definición de Vinner (Tall y Vinner, 1981) y, la teoría Antropológica de lo Didáctico), cuyos elementos permitirán identificar categorías o dimensiones, que expliquen el uso de la estrategia al RP.

Hacia principios de los años ochenta, S. Vinner introdujo la terminología *concepto-imagen* y *concepto-definición* asociadas a cualquier concepto matemático. *Concepto-imagen es la estructura cognitiva total que se asocia con el concepto, que incluye todas las imágenes mentales y propiedades y procesos asociados* y *concepto-definición es la fórmula con palabras usadas para especificar ese concepto"* (Viner y Tall, 1981, p.152). El mismo Vinner explica que el concepto-imagen se va llenando" gradualmente, pero no necesariamente refleja todos los aspectos del concepto-definición. Sin embargo, *lo que esperan muchos profesores de enseñanza secundaria o de universidad, es que ese sea el esquema habitual,*

$\boxed{\text{Concepto-definición}} \longrightarrow \boxed{\text{Concepto-imagen}}$

es decir, que el concepto-imagen se forme en las mentes a partir del concepto definición y que esté completamente controlado por éste" (Vinner, 1991, p.71). Lo que en realidad suele ocurrir es que coexisten ambas imágenes conceptuales que, además, pueden incluir aspectos contradictorios. Esas contradicciones sólo se manifiestan cuando sean evocadas simultáneamente. El comportamiento deseable de complementariedad entre imagen y definición para producir una respuesta, que esquemáticamente será el que muestra el siguiente diagrama, Figura 2, (Vinner, 1991, p. 72):

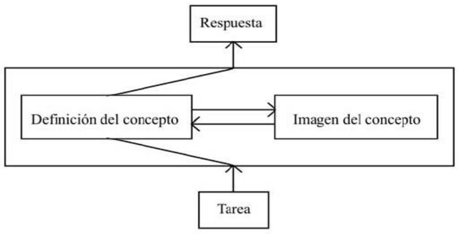

Figura 2: Interacción entre la definición y la imagen en RP.

es reemplazado, cuando no existe una verdadera integración entre las imágenes conceptuales, por el más *natural e intuitivo*, Figura 3:

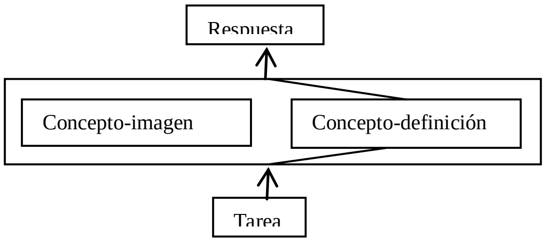

Figura 3: Respuesta intuitiva en RP.

Y sólo los problemas no rutinarios, en los que los conceptos-imagen incompletos se perciben como equivocados, pueden estimular a referirse al concepto-definición. Tales problemas son raros y cuando se proponen a los estudiantes los suelen considerar improcedentes o injustos. Por tanto, no parece haber nada que tienda a cambiar los hábitos comunes de enseñanza que son, en principio, inadecuados para contextos técnicos" (Ibid., p. 73).

El conflicto entre la imagen conceptual de un concepto y la definición de dicho concepto significa, en la práctica, la ausencia de una verdadera *comprensión* del concepto, tal como se ha puesto de manifiesto en numerosos trabajos, algunos relativos también a cuestiones más o menos básicas del Análisis Matemático, Figura 4.

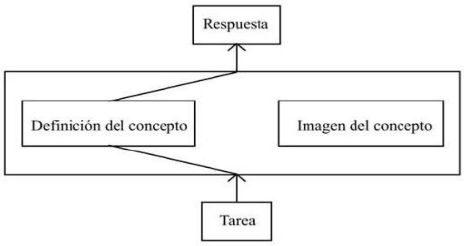

Figura 4: Deducción puramente formal en RP.

3.2.-Resolución de problemas desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)

Ives Chevallard, inicia la Teoría Antropológica de lo Didáctico, TAD, en la que plantea un modelo que describe el saber matemático en general, y de manera particular el escolar, en términos de praxeologías que se desarrollan como respuestas a una cuestión o a un conjunto de cuestiones. Se puede afirmar, por tanto, que el saber matemático se construye en torno a la búsqueda de la respuesta a cuestiones (Chevallard, 1999).

El modelo epistemológico de la TAD postula que una persona frente a una tarea problemática, usa y construye matemáticas. Es así que, el término praxeología, como proceso y producto del aprendizaje, hace referencia explícita al hecho de que el saber y el saber hacer son ambos elementos constituyentes tanto de la actividad matemática desarrollada como del producto logrado como resultado, siendo además proceso y producto aspectos difícilmente distinguibles (Chevallard, 1999).

Las praxeologias, tienen dos elementos constituyentes: la praxis, "saber" o "saber hacer", que engloba un cierto *tipo de problemas* que se estudian así como las *técnicas* para resolverlos; y el "logos" o "saber", que se refiere a *tecnología* necesaria para la descripción, explicación y justificación de las técnicas, así como a la *teoría*, o el argumento formal, que permite justificar dicha tecnología (Chevallard, 1999).

4.-Un ejemplo de análisis de un problema desde Vinner y TAD

A continuación el análisis de un problema tomado de (Recamán, 2006) y que se propuso en una de las versiones de las olimpiadas de resolución de problemas (ORPMAT), que se desarrolla desde el 2008 en quinta región cordillera, Valparaíso Chile. Dicha instancia convoca a estudiantes cuyas edades fluctúan entre los 12 y los 18 años y a los profesores, quienes participan en talleres donde se reflexiona sobre la RP. ORPMAT, busca desde el análisis de los cuadernillos, analizar la información que despliegan los participantes en cuanto a estrategias y conocimiento matemático utilizado para obtener una radiografía local de los aprendizajes en matemáticas y el uso de estrategias en RP.

Problema 3: La hormiga en el plano cartesiano
Una Hormiga vive en el origen del plano cartesiano. Un día decide salir de excursión prometiendo cumplir las siguientes reglas: a) El primer día avanzará en línea recta una unidad y, a partir del segundo día, cada día andará una unidad más que el día anterior. b) Todas las noches pernoctará en un lugar con coordenadas enteras. c) Durante su recorrido nunca cruzará por ningún lugar por el que haya pasado antes d) En todo su recorrido nunca cruzará ninguno de los dos ejes coordenados e) Al iniciar su recorrido cada mañana, la hormiga cambiará la dirección que llevaba con respecto al día anterior. ¿Si la hormiga cumple todas las reglas, existe algún recorrido que le permita volver al punto de partida?

4.1.-Respuesta de un estudiante al Problema de la hormiga

La Figura 5 nos muestra que el camino recorrido por la hormiga, dispuesto en el sistema de coordenadas, interactúa con la definición matemática de poligonal. Esto, a la luz de la estrategia utilizada por el estudiante -dibujar segmentos horizontales y verticales- produce como resultado que la respuesta sea: *"no existe recorrido"*

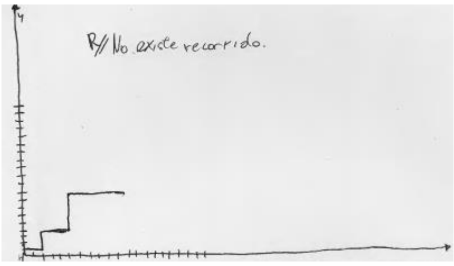

Figura 5: Concepto imagen en interacción con el concepto definición de poligonal.

4.2.- Comentario desde la perspectiva teórica de Vinner

La idea de poligonal escalonada, considerando un trazo horizontal y uno vertical, si bien cumple algunas de las condiciones de desplazamiento de la hormiga, conlleva a plantear que el problema no tiene solución. Ahora si continuamos analizando esta estrategia, y unimos los extremos de la poligonal de la Figura 5, dará origen a la Figura 6 que se presenta más abajo. Así, se obtiene una figura cerrada, la cual nos conduce nuevamente a responder, que no hay tal recorrido para la hormiga pues esta figura cerrada no es polígono; pero pone de manifiesto la posibilidad de hacer un trazado en diagonal y, pensar si la longitud de ésta es un número entero o cuando puede ocurrir.

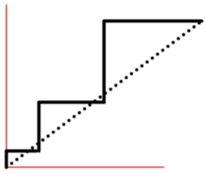

Figura 6: Uniendo los puntos extremos de la poligonal escalonada.

Ahora, qué sucede si se intenta buscar un cambio de dirección en diagonal para romper con el patrón del escalón, Figura 5. Es posible que desde la longitud de la diagonal del triángulo rectángulo de lados, 3, 4 y 5, la respuesta al problema es posible, Figura 7. Por otro lado, la figura 8 muestra otra posibilidad, al cambiar el primer trazado en comienzo del trayecto de la hormiga.

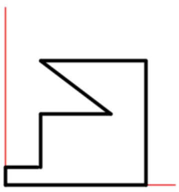

Figura 7: Poligonal con el recorrido exitoso.

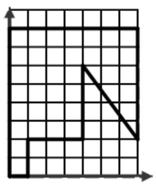

Figura 8: Poligonal con el recorrido exitoso

Ahora, interpretando la estrategia desde Vinner, podemos señalar que hay una interacción entre la poligonal y algunas condiciones que sustentan el recorrido de la hormiga Figura 5, lo que no es suficiente para dar con la solución, Figura 9.

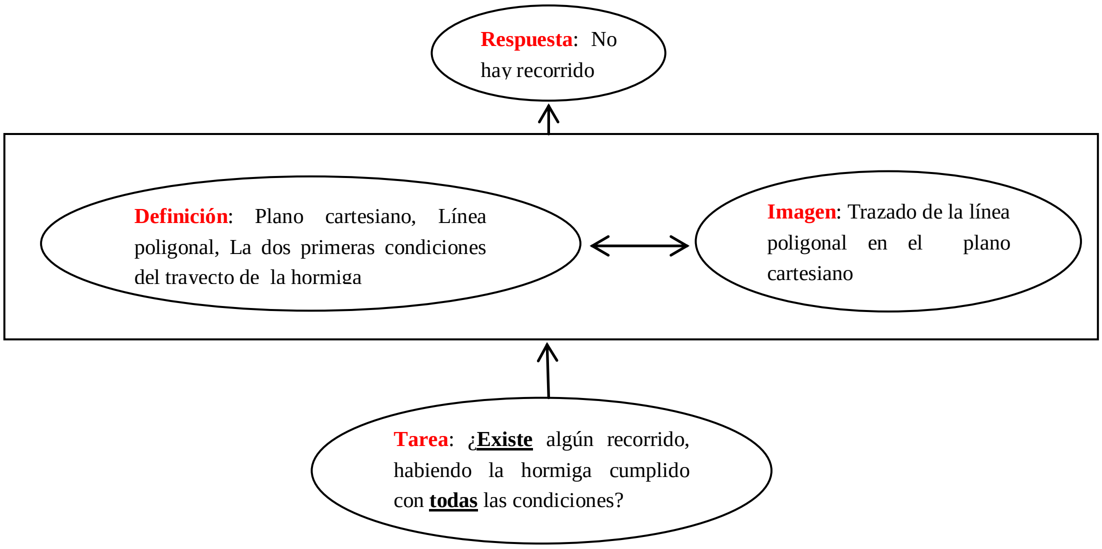

Figura 9: Análisis de la estrategia que se reporta en el cuadernillo de ORPMAT.

4.3.- Comentarios desde la perspectiva teórica de la TAD

En términos de la TAD, podemos indicar que la técnica utilizada, trazar segmentos horizontales y verticales, está enfocada a una poligonal abierta, como tecnología, y enmarcada en una geometría sintética como teoría. Probablemente, si la tecnología se hubiese centrado en una geometría cartesiana o analítica, la utilización del teorema de Pitágoras, podría haber aparecido como una herramienta. Así, la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos lados determinen el trío pitagórico 3, 4 y 5 podría haber dado luces para, desde un ensayo y error como estrategia genérica de RP, dar con la solución al problema planteado.

4.2 Respecto de las teorías utilizadas

Las dos teorías, TAD (Chevallard, 1990) y concepto definición e imagen de Vinner (Tall y Vinner, 1981), que se han considerado para describir las estrategias en RP, han permitido dar cuenta, desde los elementos constitutivos de éstas y de manera complementaria, de lo que ocurre en términos generales respecto de los proceso cognitivos involucrados en una situación específica, desde las relaciones conceptuales que se explicitan y que dan cuenta como están concibiendo o interactuando el concepto, en cuanto a definición o imagen. Por otro lado, desde los desarrollos que despliegan los y las estudiantes en cuanto a la matemática utilizada, permiten describir el tipo de conocimiento matemático que se utiliza y su relación con los ejes temáticos que promueve el ajuste curricular (MINEDUC, 2012). Lo anterior refleja, de alguna manera, el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática en un contexto de RP, para una comunidad específica de estudiantes participantes. En definitiva, los dos referentes teóricos ayudan a situar el quehacer del estudiante, en términos de estrategias, desde su desempeño matemático como la interacción que éste tiene con la definición y la imagen de los conceptos matemáticos con los que se desenvuelve en la estrategia.

Referencias bibliográficas

Cruz, M. (2006). La enseñanza de la Matemática a través de la Resolución de Problemas. Tomo 1. La Habana: Educación Cubana.

Chevallard, I. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. Recherches en Didactique des Mathématiques, 19/2, pp. 221-266.

Pólya, G. (1990). Cómo plantear y resolver problemas. México: Trillas.

Fernández, J. (2000). Técnicas creativas para la resolución de problemas matemáticos. Barcelona : Praxis

Freudenthal, H. (1981) Major Problems of mathematics educations. Educational Studies in mathematics. 12: 133-150. Reidel P.C.

Freudenthal, H. (1983). Didactical phenomenology of mathematical structures, Dordrecht, Reidel.

MINEDUC (2012). *Ajuste curricular 2012*. Consultado el 12 de junio de 2013 de http://www.ayudamineduc.cl/docs/informacion/info_guia/guia_ajuste.pdf

PISA (2007). Rendimientos de estudiantes de 15 años en Ciencias, Lectura y Matemáticas. Unidad de Curriculum y Evaluación. Chile.

Pólya, G. (1990). Cómo plantear y resolver problemas. México: Trillas

Pozo, J., Pérez M. y Domínguez, J. (1994). La solución de problemas. España: Siglo XXI

Recamán, N. (2006). El palacio de los precisos cristales. Divertimentos matemáticos. Barcelona : GEDISA

Rodríguez, M.A.; Parraguez, M. (2012). Una revisión didáctica de los conceptos de razón y proporción. Paideia Revista de educación 27. 147-169

Schoenfeld, A. (1994). Mathematical thinking and problem solving. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics, 12(2), 151-169.

Treffers, A. (1987). Three Dimensions: A Model of Goal and Theory Description in Mathematics: The Wiskobas Project. Dordrecht, The Netherlands: Reidel