CB-188

OBJETOS DE APRENDIZAGEM TRIDIMENSIONAIS

Agostinho Iaqchan Ryokiti Homa
iaqchan@hotmail.com
Universidade Luterana do Brasil (ULBRA), Brasil.

Línea 1 Creación de recursos didácticos con GeoGebra para el aprendizaje y la enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales.
CB
Educación Secundária.
Objetos de Aprendizagem, Área de Figuras Planas, Geogebra.

Resumen

Este artigo apresenta os objetos de aprendizagem tridimensionais desenvolvidos para dar apoio à compreensão de conceitos matemáticos do Cálculo Diferencial e Integral no estudo de funções multivariadas. O objetivo foi elaborar e utilizar objetos de aprendizagem tridimensionais interativos, que oferecem suporte na visualização das características das funções multivariadas em situações problema com temáticas de interesse para estudantes de Engenharia. Foi realizado um experimento com três turmas de Cálculo de um curso de Engenharia da ULBRA com resultados que indicam que o uso de representações tridimensionais estereoscópicas (utilizando óculos 3D) auxiliam no entendimento da variabilidade da função pela visualização e interação com os objetos tridimensionais, levando a compreensão das características das funções multivariadas em um determinado ponto.

1 Introdução

O estudo das funções inicia no Ensino Médio explorando situações matemáticas para a compreensão da características relacionadas com o valor e variação da função de uma variável em um determinado ponto. São apresentados os conceitos de positivo, negativo, zero da função, crescente e decrescente, com suporte nas representações geométricas, dada as dificuldades da generalização somente a partir de definições matemáticas. Esse conhecimento é expandido no Ensino Superior com o Cálculo Diferencial e Integral e as funções de multivariadas.

Para o estudo de funções com várias variáveis, em particular com duas variáveis independentes, se utiliza de objetos gráficos como as curvas de nível e gráficos bidimensionais em perspectiva representando funções tridimensionais para auxílio na compreensão das características das funções.

Os paradigmas atuais da educação incentivam o uso de recursos computacionais na prática pedagógica de maneira a proporcionar ao aluno situações para a aprendizagem significativa. Neste contexto, segundo Alves (2012), o uso de softwares de geometria dinâmica, como o Geogebra, permitem criar situações para a produção de conjecturas e formulação de hipóteses a partir das discussões de propriedades geométricas e topológicas

ISBN 978-84-945722-3-4

de conceitos complexos fortemente apoiadas na visualização e experimentações através da manipulação dos objetos geométricos.

O trabalho realizado teve por objetivo construir e utilizar objetos de aprendizagem tridimensionais para o ensino do Cálculo Diferencial e Integral explorando a noção de profundidade, baseada na estereoscopia, de modo a minimizar as dificuldades de interpretação da imagem bidimensional como um objeto tridimensional.

2 Representação tridimensional

Historicamente a representação bidimensional de objetos tridimensionais adquire forma no século XIX com a perspectiva cavaleira, que utiliza uma projeção cilíndrica obliqua para criar a ilusão da realidade tridimensional. A representação em perspectiva é aprimorada na renascença com o uso da perspectiva linear, utilizando a projeção cônica com um ou dois pontos de fuga (Correia de Sá & Rocha, 2010).

Ressalta-se que as representações em perspectiva proporcionam a noção de profundidade e distância baseadas nas habilidades de interpretação do observador que imagina e compreende quais objetos, ou partes desse, estão mais à frente ou mais atrás em relação ao observador. Para Gutiérrez (Gutiérrez, 1996) o processo de visualização é uma ação mental no qual a interpretação das imagens é realizado por dois processos, “Interpretação visual da informação” que cria imagens mentais, e “Interpretação de imagens mentais” para gerar informação.

Os homens tem noção de profundidade, distância e tamanho dos objetos no espaço tridimensional graças à disposição dos olhos a frente da cabeça que proporciona a visão binocular ou estereoscopia. A visão tridimensional é resultado da interpretação, pelo cérebro, das duas imagens bidimensionais que cada olho capta do objeto observado e as informações sobre o grau de convergência e divergência eixos visuais (Siscoutto et al., 2004).

Uma das maneiras de se obter a estereoscopia é através do uso conjunto de imagens anáglifas, que mesclam duas imagens de cores vermelha e ciano, obtidas de dois pontos de observação diferentes, e que devem ser visualizadas com o uso óculos especiais, com lentes de cor vermelha na esquerda e ciano na direita, para a correta separação da imagem de maneira que o cérebro interprete a imagem com a noção de profundidade.

3 Funções multivariadas

O Geogebra é um programa de Matemática Dinâmica para Geometria, Álgebra e Cálculo (Hohenwarter & Preiner, 2007), com suporte a construções tridimensionais com representações em perspectiva paralela, obliqua, cavalera e estereoscópica anáglifa. O suporte a representação estereoscópica do Geogebra, permite o desenvolvimento de objetos tridimensionais, como é o caso das superfícies geradas por funções de duas variáveis independentes.

Os estudos realizados tiveram foco na produção e uso de objetos de aprendizagem tridimensionais interativos para o estudo das funções multivariadas, em particular com duas variáveis. As interações foram idealizadas para proporcionar situações que permitam a visualização das propriedades geométricas e topológicas associadas às características da função em um determinado ponto, assim como a região topológica abaixo da superfície formada pela função.

Ressalta-se que os objetos fazem parte de uma sequência didática envolvendo o conteúdo de Cálculo Diferencial e Integral para funções de várias variáveis. As atividades

ISBN 978-84-945722-3-4

subsequentes, à etapa que utiliza os objetos geométricos, devem explorar as conjecturas e hipóteses levantada pelos estudantes e expandi-las para funções com mais de duas variáveis e que não possuem representação geométrica. Deste modo o recurso de visualização é parte do processo de significação de conceitos aplicados a qualquer função, independentemente do número de variáveis e a aprendizagem deve seguir até os conceitos se desvincularem das representações geométricas.

4 Os objetos de aprendizagem tridimensionais

Entendendo que objetos de aprendizagem sem um *design* instrucional são somente objetos de conhecimento (Merrill, 2002), os objetos desenvolvidos para o Cálculo Diferencial e Integral, envolvendo funções de duas variáveis, foram idealizados para proporcionar ao estudante situações para explorar e formular conjecturas, confrontando conceitos e conhecimentos prévios apresentados nas funções de uma variável independente.

A figura 1 apresenta o objeto de aprendizagem para o estudo da derivada direcional. Neste objeto o estudante pode manipular, na janela da esquerda, o ponto e a direção que se está verificando a derivada direcional. Na janela tridimensional o estudante visualiza o plano tangente no ponto selecionado e a projeção do vetor direção. Os botões permitem que sejam ocultadas a função, o vetor direção e o plano tangente, diminuindo a quantidade de objetos gráficos para facilitar a visualização e exploração de situações.

A atividade com o este objeto de aprendizagem é organizada e orientada fazendo uso de questionamentos utilizando os conhecimentos prévios de funções de uma variável:

- Qual o valor de $f(x_1, y_1), f(x_2, y_2)$ e $f(x_3, y_3)$ (escolhendo pontos específicos e determinados de acordo com a função dada, gerando as três situações de função positiva, negativa ou zero);
- No ponto (x_1, y_1) a função é crescente ou decrescente? (nesse momento surge a dúvida sobre a característica de variabilidade. Quando a atividade é iniciada com o paraboloide $f(x, y) = x^2 + y^2$ a maioria dos estudantes responde que a função é decrescente e ao trocar-se para $f(x, y) = 3 - x^2 - y^2$ a maioria identifica a necessidade de adotar uma direção. Ativa-se então o vetor direção e, variando o mesmo, trabalha-se com as situações de variação crescente, decrescente e nula no ponto dado);
- Relembrando que na função de uma variável temos um ponto crítico quando a taxa de variação é zero, ou seja, $f'(x) = 0$. Para o ponto (x_2, y_2) e direção com uma taxa de variação nula, temos um ponto crítico? Ele é um ponto de máximo ou de mínimo? (Determina-se um ponto não crítico e uma direção com taxa de variação nula. Os alunos são levados a identificar que não é ponto de máximo ou de mínimo apesar da taxa de variação ser nula em uma direção. Orienta-se que mudem a direção e verifiquem a taxa de variação. Após chegarem a conclusão de que não é ponto crítico porque a taxa de variação deixa de ser nula com a alteração da direção, pergunta-se pelos pontos críticos da função);
- Quais são as características de valor e variação dos pontos críticos da função? (Com a manipulação do ponto os estudantes mudam para o ponto de máximo do paraboloide e realizam mudanças no vetor direção, identificando que a taxa de variação permanece nula mesmo com a mudança de direção).
- Quais são os pontos críticos da função $f(x, y) = x^2 - y^2$ +1 ? (O hiperboloide de uma folha tem um ponto crítico que não é ponto de máximo ou de mínimo, mas

ISBN 978-84-945722-3-4

um ponto de sela. Através da rotação do hiperboloide é possível verificar as propriedades do ponto crítico).

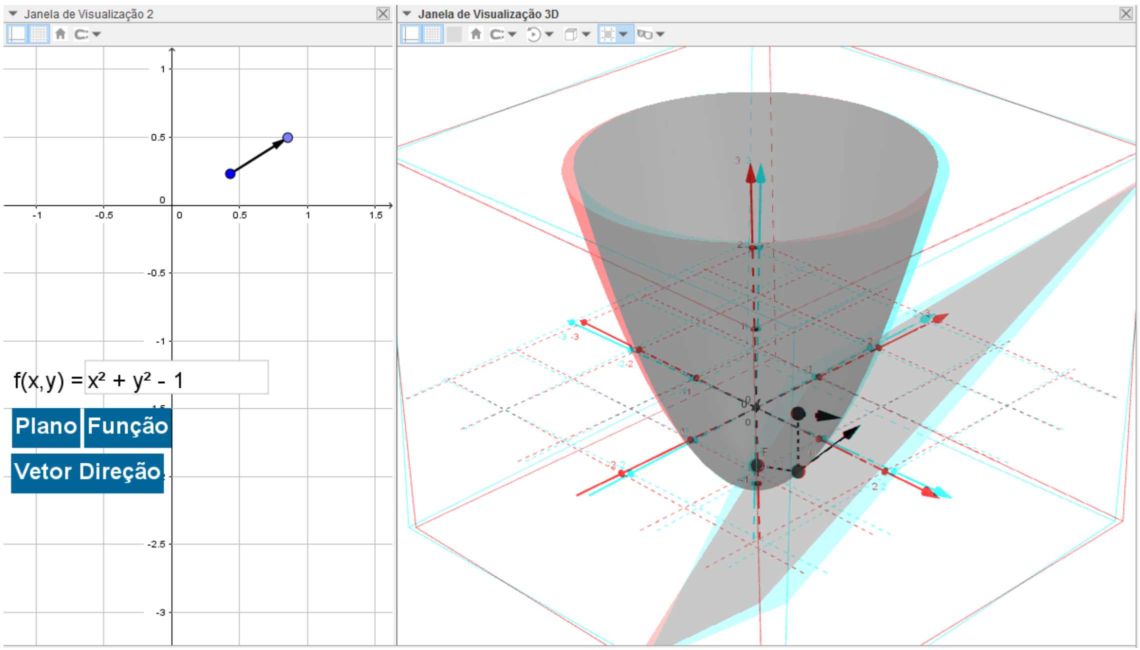

Figura 5 – Objeto de aprendizagem para o estudo da derivada direcional.

Fonte: O autor.

A figura 2 apresenta um objeto tridimensional para aprendizagem de curvas de nível e as integrais duplas para cálculo da região topológica delimitada pela função.
Para o estudo de curvas de nível, o objeto possui botões para ativar o plano de corte paralelo ao planoXY. Para as curvas de nível tem-se disponível dois botões, um que controla o plano de intersecção paralelo ao planoXY e outro que apresenta as curvas para os valores inteiros de $f(x, y)$.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

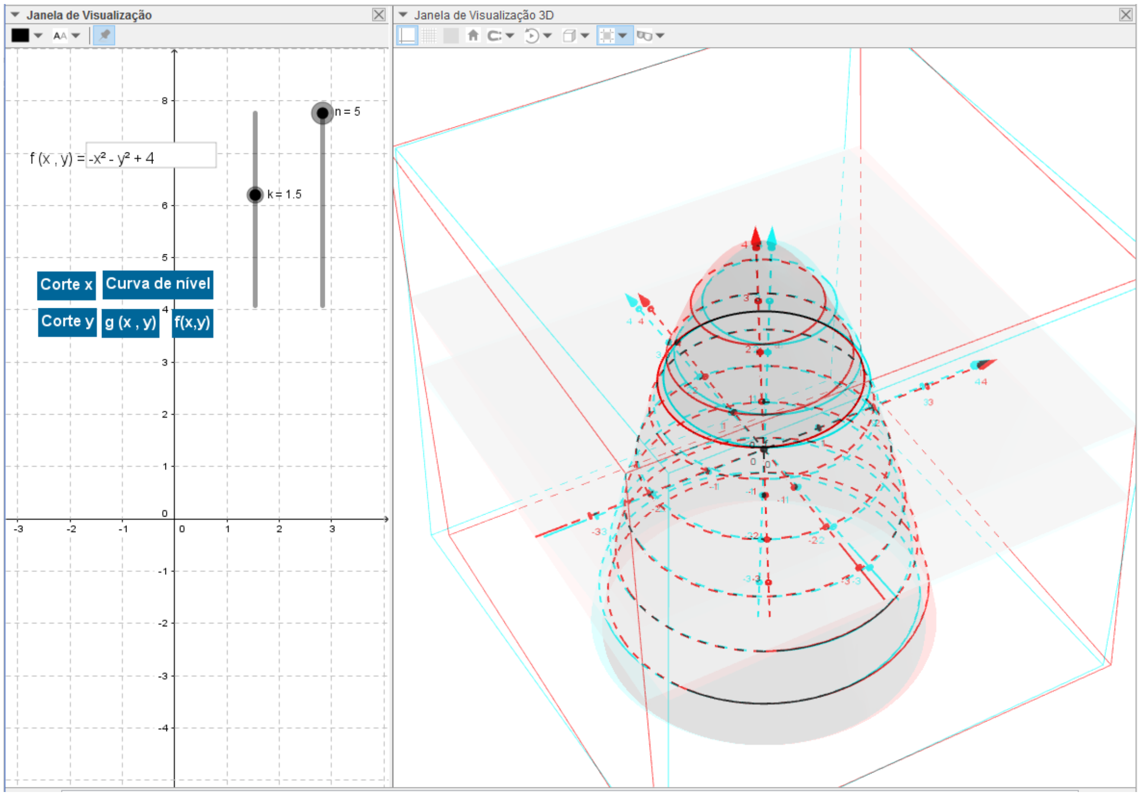

Figura 6-Objeto de aprendizagem para curvas de nível e estudo de regiões entre funções

Fonte: O autor.

Para o estudo das integrais duplas e regiões topológicas entre a função e o planoXY, o objeto disponibiliza botões para ativar o plano perpendicular ao eixo x ou y, para dar suporte ao conceito estudado. Além disso no painel esquerdo é possível manipular os pontos A,B,C e D que definem a região retangular “abaixo” da função e que define os intervalos de integração.

ISBN 978-84-945722-3-4

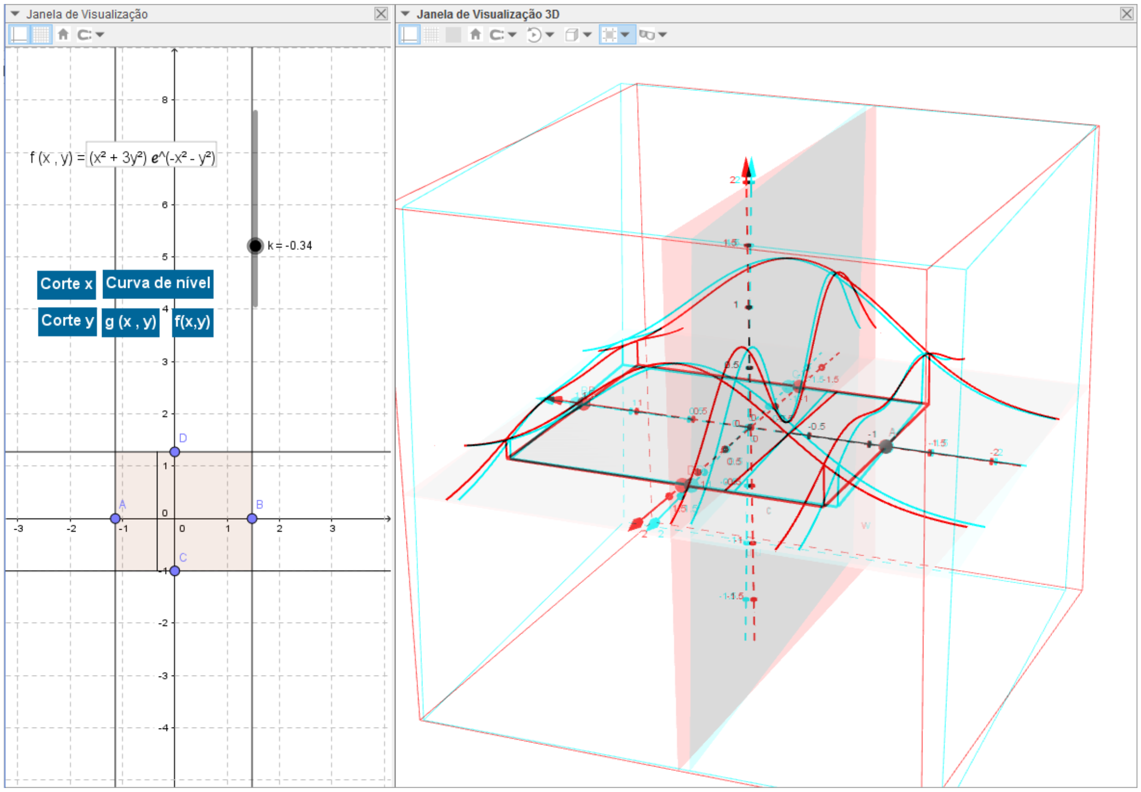

Figura 7-Objeto de aprendizagem para curvas de nível e estudo de regiões entre funções

Fonte: O autor.

Nos dois objetos o estudante insere a função que deseja estudar nos campos apropriados, possibilitando o estudo de quaisquer funções. O uso da representação geométrica tridimensional anáglifa permite a interpretação do objeto estudado com noções de profundidade, evitando a perda de informação que ocorre na representação em perspectiva. As imagens apresentadas no presente artigo foram reproduzidas com o recurso estereoscópico anáglifo e recomenda-se o uso dos óculos apropriados para melhor visualização.

5 Conclusões

As aulas que apresentam funções multivariadas com gráficos desenhados a mão livre, ou projeções estáticas em perspectiva, não oferecem a mesma facilidade de interpretação que as imagens tridimensionais com a noção de profundidade como as estereoscópicas. O uso dos objetos de aprendizagem tridimensionais na disciplina de Cálculo objetivam minimizar os problemas de compreensão das características das funções em um determinado ponto, assim como, os problemas de otimização, pela interação e interpretação gráfica das situações.

Ressalta-se que o uso do Geogebra para estudos de objetos geométricos tridimensionais dinâmicos como as funções multivariadas agrega vantagens como a manipulação das características do objeto oferendo a experimentação de situações diferenciadas que possibilitam a observação das características e propriedades geométricas dos objetos para formulação de conjecturas e compreensão dos conceitos matemáticas estudados, como, por

ISBN 978-84-945722-3-4

exemplo, a derivada direcional e os pontos críticos de funções multivariadas e a região topológica delimitada pela superfície.

Referências Bibliográficas

Alves, F. R. V. (2012). Exploração de noções topológicas na transição do Cálculo para a Análise Real com o GeoGebra. *Revista Do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, *1*(1), 6. Retrieved from http://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/8239/6616

Correia de Sá, C., & Rocha, J. (2010). *Treze Viagens Pelo Mundo da Matemática*. Universidade do Porto.

Gutiérrez, Á. (1996). Visualization in 3-Dimensional Geometry: In Search of a Framework. In *Proceedings of the 20th PME Conference* (Vol. 1, pp. 3–19). http://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004

Hohenwarter, M., & Preiner, J. (2007). Dynamic Mathematics with GeoGebra. *The Journal of Online Mathematics and Its Applications*, *7*. Retrieved from http://www.maa.org/external_archive/joma/Volume7/Hohenwarter/index.html

Merrill, D. (2002). Position statement and questions on learning objects research and practice. *Learning Objects Technology: Implications for Educational Research and Practice, AERA*. New Orleans. Retrieved from http://www.learndev.org/LearningObjectsAERA2002.html

Siscoutto, R. A., Szenberg, F., Tori, R., Raposo, A. B., Celes, W., & Gattass, M. (2004). Estereoscopia. In C. Kirner & R. Tori (Eds.), *Realidade Virtual: Conceitos e Tendências* (p. 354). Petrópolis,RJ. Retrieved from http://www.visaomonocular.org/Banco_de_Arquivos/Artigos/Estereoscopia_Abordagem_Basica.pdf

ISBN 978-84-945722-3-4