CB-161

INVENCIÓN DE PROBLEMAS COMO ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA SUPERAR ERRORES MATEMÁTICOS: UNA EXPERIENCIA CON SUMAS DE SERIES

Lorena Salazar Solórzano
lorena.salazarsolorzano@ucr.ac.cr
Universidad de Costa Rica, Universidad Nacional de Costa Rica, Costa Rica

Núcleo temático: La Resolución de Problemas en Matemáticas.
Modalidad: CB
Nivel educativo: Formación y actualización docente
Palabras clave: invención de problemas, errores matemáticos, series de potencias.

Resumen

Se presentan resultados parciales de un estudio que investiga el efecto que produce, en la superación de errores matemáticos frecuentes, la estrategia de invención de problemas. Para ello se eligió como contexto temático el de sumas de series de potencias y numéricas, dado que este es un tema cuya comprensión presenta dificultades en los estudiantes. Se seleccionó una muestra de 24 alumnos de un curso de análisis real dirigido a futuros profesores de matemática, en la que los participantes debían detectar y listar los errores que usualmente cometen, para luego crear problemas en una actividad colaborativa, que ayudaran a superarlos. Para contrastar los datos, se aplicó una prueba de diagnóstico al inicio de la actividad y un examen al finalizarla, que evidencian resultados positivos y muestran cómo la estrategia de creación de problemas, logró una superación significativa de algunos de los errores detectados, mejorando el rendimiento académico de los participantes.

Introducción

ISBN 978-84-945722-3-4

El tema de convergencia de series numéricas y de potencias presenta dificultades de comprensión en los estudiantes (Delgado, Codes, Monterrubio, & González-Astudillo, M. T., 2014), que se incrementan cuando se trata de hallar la suma de una de estas series. Varios estudios, ante los conflictos que se generan, plantean propuestas innovadoras para enseñar series y su convergencia, desde abordajes gráficos, concretos y numéricos hasta abordajes socioepistemológicos (Robert, 1982; Pérez, 1991; Flores, 1992; Mamona, 1990; Moreno, 1999; Alcock y Simpson, 2005; Calvillo y Cantoral, 2007; Rosas, 2007).

Los estudiantes presentan errores de comprensión relacionados con el concepto de convergencia y la noción de infinitud. Esto es corroborado por Rosas (2007), quien hace un estudio en su tesis doctoral con 187 estudiantes sobre conceptos de series numérica, obteniendo que muchos de los errores de los alumnos se deben a múltiples factores relacionados con el uso cotidiano de sucesiones y series, el manejo del infinito y hasta la definición formal de una serie vista como el límite de una sucesión de sumas parciales. Calvillo, G. y Cantoral, U. (2007) se refieren a las dificultades y obstáculos epistemológicos que generan los procesos infinitos propios de la convergencia, y atribuyen este obstáculo al hecho de adjudicar la naturaleza de los términos de la serie a su suma. Sus raíces se localizan en la concepción de función como expresión analítica arbitraria, propia del siglo XVIII.

En la última década se ha incrementado considerablemente el número de investigaciones sobre la creación de problemas (Ellerton, 2013; Espinoza, Lupiañez, y Segovia, 2014; Malaspina, 2016; Salazar, 2014 y 2015; Singer y Voica, 2013; Tichá y Hošpesová, 2013). También se ha dado espacio en revistas y eventos internacionales a este tópico, un ejemplo de ello es el número monográfico sobre este tema publicado en la revista *Educational Studies in Mathematics* (volumen 83, número 1), así como también el recién pasado *13 International Congress on Mathematical Education* (ICME 2016) celebrado en Hamburgo, Alemania en el que uno de los grupos de trabajo dedicado a Resolución de Problemas, incluyó un espacio especial sobre Planteamiento de problemas. De acuerdo con Espinoza, Lupiañez y Segovia (2014), la invención de problemas logra desarrollar la creatividad de los alumnos, da lugar a una mayor responsabilidad en los estudiantes en la construcción de su propio conocimiento, es una ventana para observar la comprensión matemática por lo

ISBN 978-84-945722-3-4

que puede ser una herramienta para evaluar su aprendizaje y también mejora su disposición y actitudes hacia esta disciplina. En esta línea, el objetivo del estudio fue el siguiente: Investigar el efecto que produce la estrategia de invención de problemas, en la superación de errores matemáticos al hallar la suma de una serie.

Metodología

La experiencia se realizó con 24 estudiantes de un curso de Análisis dirigido a futuros profesores de matemática de la Universidad de Costa Rica (MA551) del II ciclo del 2016. Para el estudio primero se explicó el tema de series de forma tradicional (siguiendo clases magistrales y expositivas, prueba de los teoremas, ejemplos ilustrativos y ejercicios). Luego se continuó con la fase diagnóstica, en la cual se les aplicó un examen corto individual, donde los alumnos debían hallar la suma de una serie numérica. Con esto se detectaron y tipificaron los errores más comunes que se dieron en las soluciones de los alumnos. Luego se les proporcionó una guía de trabajo, donde se les expuso algunas de las soluciones erróneas junto con un par de soluciones correctas, para que en grupos de tres alumnos, detectaran cuál de ellas contenían errores y cuáles eran correctas. Se discutió a nivel de todo el grupo cuáles eran los errores más comunes. Después de esto, se les solicitó crear un problema para los compañeros, que lograra corregir dichos errores. Cada grupo decidió cuál de los errores qería ayudar a superar y creó un problema con tal propósito en mente.
Finalmente se les aplicó otro examen corto y se cotejaron los resultados con la prueba diagnóstica.

Análisis de los datos

La Tabla 1 contiene algunas de las soluciones erróneas de los estudiantes presentados en la prueba diagnóstica.

Tabla 1. Errores presentados en las soluciones de los alumnos en la prueba diagnóstica

Problema: Halle la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1}(n+2)}{n!}$	
Soluciones erróneas de algunos estudiantes	Errores detectados

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Solución errónea $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n+1}(n+2)}{n!}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-2)^{n-1}n}{(n-2)!}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\left[(-2)^{n}\right]'}{(n-2)!}$ $=\left[\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-2)^{n}}{(n-2)!}\right]'=\left[(-2)^2\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-2)^{n-2}}{(n-2)!}\right]'$ $=\left[(-2)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n}}{n!}\right]'=\left[4(e^{-2}-1)\right]'=0$	Confusión entre series numéricas y series de potencia Este estudiante confunde el numerador como la derivada de una potencia, para luego identificar la serie como la derivada de otra serie, obteniendo naturalmente un cero al final.
Solución errónea Tomando $x=-2$ en la serie se obtiene que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n+1}(n+2)}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\mathrm{x})^{n+1}(n+2)}{n!}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(\mathrm{x})^{n-1}n}{(n-2)!}$ $=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\left[(\mathrm{x})^{n}\right]'}{(n-2)!}=\left[\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(\mathrm{x})^{n}}{(n-2)!}\right]'=\left[\mathrm{x}^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{x})^{n+1}}{(n+1)!}\right]'$ $=\left[\mathrm{x}^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\mathrm{x})^{n}}{n!}\right]'=(x^2e^x)'=2xe^x+x^2e^x$ Luego como $x=-2$, se obtiene que la suma es $2(-2)e^{-2}+(-2)^2e^{-2}=0$	Confusión en el reconocimiento de la serie involucrada Este estudiante cambia la serie numérica a una serie de potencias, cambiando -2 por una variable x, identifica correctamente el numerador como la derivada de una potencia y reconoce la serie como la derivada de otra serie de potencias. Su error es un mal reconocimiento al final de la serie de la función exponencial.
Solución errónea Cambiando $x=-2$ se obtiene que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n+1}(n+2)}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\mathrm{x})^{n+1}(n+2)}{n!}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(\mathrm{x})^{n-1}n}{(n-2)!}$ $=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\left[(\mathrm{x})^{n}\right]'}{n!}=\left[\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(\mathrm{x})^{n}}{n!}\right]'=\left[e^x-(1+\mathrm{x}+\frac{x^2}{2!})\right]'$ $=e^x-1-x$ Luego como $x=-2$, se obtiene que la suma es $e^{-2}+-1+2=1+e^{-2}$	Error algebraico Este estudiante también cambia la serie numérica a una serie de potencias, cambiando -2 por una variable x. Luego reconoce la serie como la derivada de otra serie de potencias. Pero comete un error al cambiar (n-2)! por n!, lo que obtiene un resultado incorrecto.
Solución errónea	Error algebraico Este otro estudiante inicia usando la propiedad distributiva para obtener dos series numéricas. Cancela un n en la primera serie, saca algunas constantes de las

ISBN 978-84-945722-3-4

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n+1}(n+2)}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n+1}n}{n!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n+1}2}{n!}$ $=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n+1}}{(n-1)!}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n+2}}{n!}$ $=(-2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n}}{(n-1)!}-(-2)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n}}{(n-1)!}$ $=-3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n}}{n!}=-3e^{-2}$	series y resta las series, pero comete un error al cambiar n! por (n-1)! En la segunda serie.
Solución errónea $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n+1}(n+2)}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x)^{n+1}(n+2)}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[(x)^{n+2}\right]'}{n!}$ $=x^2\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x)^{n}}{n!}\right]'=x^2\left[e^x-1\right]'=x^2e^x$ Luego como $x=-2$, se obtiene que la suma es $(-2)^2e^{-2}=4e^{-2}$	Confusión en la derivada de una serie Este estudiante también transforma la serie numérica en una serie de potencias, que luego reconoce como la derivada de otra serie. Sin embargo comete el error de sacar x^2, obviando que se trata de la derivada de un producto. Error de bases.

Un primer resultado es la detección y tipificación de los errores más comunes que se dieron en las soluciones de los alumnos. Los errores encontrados se clasifican en las siguientes categorías:

- Errores debido a representaciones erróneas de series
- Errores debido a confusiones entre series numéricas y series de potencias.
- Errores con los cambios del contador en la serie
- Errores al no reconocer la derivada o integral de una serie
- Errores algebraicos o debidos a falta de conocimientos previos

Ejemplos de creaciones de problemas de los estudiantes

A continuación se muestran algunos de los problemas creados por los estudiantes con el objetivo de subsanar los errores de sus compañeros y los propios. Uno de los grupos planteó un problema (ver Tabla 2), en el que pretende que el estudiante categorice las series más conocidas de acuerdo a ciertas características, por ejemplo si tienen factoriales en sus

ISBN 978-84-945722-3-4

sumandos, si estos son para o impares, el tipo de potencia, si es alternada o no, de modo que se le facilite el reconocimiento de la serie en cuestión.

Tabla 2. Problema creado por un grupo de alumnos

Categorice las siguientes series de acuerdo a las características dadas en las columnas						
Serie	**Factoriales impares**	**Factoriales pares**	**Potencias impares**	**Potencias pares**	**Potencias de todo**	**Alternada**
$\frac{1}{1-x}$						
$\ln(1+x)$						
e^x						

La figura 1 muestra la creación de otro grupo, el cual desarrolló un juego de *memoria* y de *pareos* para que los alumnos lograran aprender las series, tanto en forma extendida como compacta con la notación de sumatoria, con cambios en los contadores, si eran derivada o integral de otra serie.

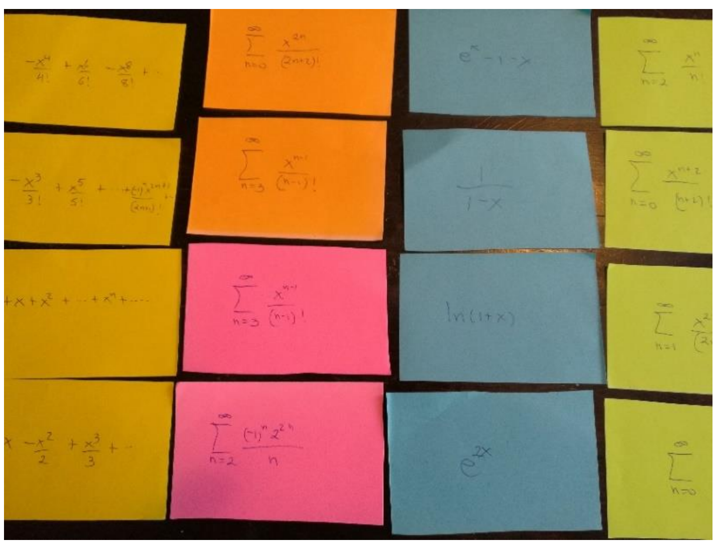

Figura 1. Asociando diferentes representaciones de una serie

Para superar errores con los cambios del contador en la serie, se propusieron problemas como el siguiente, donde el estudiante debe reconocer diferentes representaciones de las series. Así, por ejemplo, puede verse como la figura 2 muestra la relación entre la serie de la función $f(x) = e^x - 1$, en donde en una de las series se reconoce un factorial, mientras que en las otras se reconoce el sumando como la integral de una serie de potencias.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

La Tabla 3 muestra otra creación de un problema de un grupo de alumnos que pretende corregir errores de sobre el tipo de serie con la que se trabaja

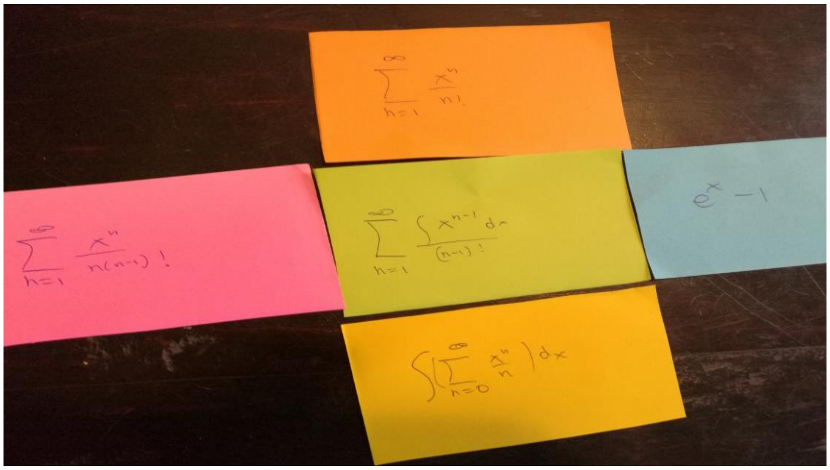

Figura 2. Diferentes representaciones para $f(x) = e^x - 1$

Tabla 3. Problema creado por un grupo de alumnos

Clasifique las siguientes series de acuerdo a si la serie es numérica, de potencias, derivada o integral de otra serie.

Serie	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^n}{(n+1)}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^n}{3^{2n+1} n}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^n}{(n+1)}$
Numérica							
Potencias							
Derivada							
Integrada							

La figura 3 muestra el proceso seguido para crear el problema de hallar la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{a}\right)^{n+1} (\ln a)^{n-1}}{(n+1)!}$$, partiendo de una serie conocida.

ISBN 978-84-945722-3-4

Problema 1 $\quad \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \ln(a))^n}{n!} = a^x \quad$ con $a > 1$

Primero integramos $\displaystyle\int \frac{(x \ln(a))^n}{n!} dx = \frac{x^{n+1} (\ln(a))^n}{(n+1)n!}$

Volviendo a integrar tenemos $\displaystyle\int \frac{x^{n+1} (\ln(a))^n}{(n+1)n!} dx = \frac{x^{n+2} (\ln(a))^n}{(n+2)(n+1)n!}$

Haciendo unos arreglos $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2} (\ln(a))^n}{(n+2)(n+1)n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2} (\ln(a))^n}{(n+2)!}$

Corriendo el contador $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2} (\ln(a))^n}{(n+2)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1} (\ln(a))^{n-1}}{(n+1)!}$

Sustituyendo $x = \sqrt{a}$ finalmente obtenemos $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{a})^{n+1} (\ln(a))^{n-1}}{(n+1)!}$

Figura 3. Proceso para crear un problema de suma de series

El siguiente problema (Figura 4), propuesto por otro grupo, da algunas estrategias para hallar la suma de una serie (incluir todas las potencias en una sola potencia, fijarse si hay o no factoriales, agregar algunos factores para que la serie coincida con alguna conocida, extender la serie).

ISBN 978-84-945722-3-4

Pasos	Razones
$\sqrt{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k}(2k)!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2}}{2^{k}(2k)!}=$	
$\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{k}(2k)!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{\frac{1}{2}-k}}{(2k)!}=$	Note que hay un $(2k)!$ por lo que se puede pensar en un $cosh$; pues no hay un $(-1)^{k+1}$ para pensar en un $cosx$
$\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{2\left(\frac{1}{2}-k\right)}}{(2k)!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{1-2k}}{(2k)!}=$	Se requiere un x^{2k} para obtener el $cosh$X
$\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1+2k}}{(2k)!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2k}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(2k)!}=$	Note que $\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{2k}$ quedará en el denominador; por lo que se procede con un cambio de signos
$-1+\sqrt{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2k}}{(2k)!}=$ $\sqrt{2}\,cosh\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-1$	Para obtener un $coshx$ se requiere que el contador inicie en cero.

Figura 4. Ilustrando estrategias para hallar la suma de una serie

La Tabla 4 muestra una evaluación de la actividad y de los resultados logrados.

Tabla 4. Resultados de la evaluación de la actividad

	Muy en desacuerdo	Algo en desacu	Neutral	Algo de acuerd	Muy de acuerdo
La actividad de detección de errores le ayudó a reconocer los propios.				17	7
Comprendió detalles y sutilezas de las sumas de series, inventando problemas para sus compañeros.			2	9	13
La actividad de creación de problemas le ayudó a superar sus errores en el cálculo de la sumas de series.		5		2	17
La actividad le ayudó a mejorar su comprensión individual de sumas de series.				2	22

Conclusiones

ISBN 978-84-945722-3-4

La combinación del trabajo colaborativo en la detección de errores propios junto con la invención de problemas, resultó una manera bastante eficiente de superar las dificultades para hallar la suma de una serie numérica y de potencias. Cuando los estudiantes tuvieron que resolver el problema creado por otro grupo, estaban mejor preparados, debido a la experiencia previa de haber tenido que crear un problema similar, mostrando más pericia en su solución y disminuyendo los errores previos. Se lograron mejores resultados en el examen corto que evaluó este tema lográndose una mejoría significativa en los resultados (el promedio subió de un 53% en la prueba diagnóstica a un 76% después de la actividad de invención de problemas).

Referencias bibliográficas

Calvillo, N. y Cantoral, R. (2007). Intuición y visualización: demostración en la convergencia de sucesiones, en C. Crespo (ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 21* (pp. 421-426). México D. F.: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Delgado, M. L., Codes, M., Monterrubio, M. C., y González Astudillo, M. T. (2014). El concepto de serie numérica. Un estudio a través del modelo de Pirie y Kieren centrado en el mecanismo “folding back”. *Avances de Investigación en Educación Matemática,* 6, 25 - 44.

Ellerton, N. F. (2013). Engaging pre-service middle-school teacher-education students in mathematical problem posing: development of an active learning framework. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 87-101.

Espinoza, J, Lupiañez, J y Segovia, I (2014). La invención de problemas y sus ámbitos de investigación en educación matemática. *Revista digital Matemática, Educación e Internet.* Vol 14, Marzo 2014.

Malaspina, U. (2016). Creación de problemas: sus potencialidades en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática.* 11(15). 321-33.

Salazar, L (2014). Diseño de tareas a partir de la modificación de problemas planteados en libros de texto y su implementación con futuros profesores de matemática. *Revista Paradigma,* 35(1), 55-77.

Salazar, L. (2015). Problem-posing as a didactc resource in formal mathematcs courses to train future secondary school mathematcs teachers. *Journal of Technology and Science Educaton (JOTSE),* 5(2), 64-74. http://dx.doi.org/10.3926/jotse.141.

ISBN 978-84-945722-3-4

Singer. F. M. & Voica, C. (2013). A problem-solving conceptual framework and its implications in designing problem-posing tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 9-26.

Tichá, M. y Hošpesová, A. (2013).Developing teachers' subject didactic competence through problem posing. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 133-143

ISBN 978-84-945722-3-4