CB-160

DIFICULTADES EN EL PROCESO DE ESTUDIO DEL CONCEPTO DE INDEPENDENCIA LINEAL

José A. Semitiel, Cintia G. Cianciardo y Angélica R. Arnulfo
semitiel@fceia.unr.edu.ar – cintiac@fceia.unr.edu.ar – aarnulfo@fceia.unr.edu.ar
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario, Argentina

Núcleo temático: Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos
Modalidad: CB
Nivel educativo: Universitario
Palabras clave: independencia lineal, obstáculo de formalismo, complejidad del concepto

Resumen

Álgebra Lineal se ha convertido en las últimas décadas en un curso fundamental de Matemática para estudiantes de carreras de Ingeniería. Sin embargo es reconocida como una asignatura difícil de aprender y de enseñar tanto para los alumnos como para los docentes respectivamente.

Con la intención didáctica de evaluar la comprensión de la noción de independencia lineal de un conjunto de vectores de un espacio vectorial, se propuso una actividad a estudiantes de ingeniería de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario (Argentina).

En este artículo, se describen las dificultades observadas en las producciones de los alumnos y a partir de las mismas se intenta identificar sus orígenes mediante entrevistas personales. A partir de las respuestas dadas por los estudiantes notamos que las dificultades no se centraron únicamente en la complejidad del concepto de independencia lineal, sino también en problemas para formalizar la respuesta. Dorier et al. (2000) se refiere a ésto como un obstáculo de formalismo.

Introducción

El proceso de estudio, entendido éste como el proceso de enseñanza-aprendizaje-evaluación, de conceptos básicos del Álgebra Lineal, es un problema de reciente interés en el ámbito de la Didáctica de la Matemática. El carácter abstracto de este campo de la Matemática es uno de los problemas que hace que la mayoría de los estudiantes presenten dificultades.

En la actualidad, existen varios grupos de investigación que se encuentran trabajando sobre la didáctica del Álgebra Lineal. En algunas investigaciones didácticas referidas al proceso

ISBN 978-84-945722-3-4

de estudio del Algebra Lineal, se muestran dificultades de los alumnos en la comprensión de objetos abstractos, tales como espacios vectoriales, transformaciones lineales, autovalores y autovectores, entre otros.

Tal es el caso de los estudiantes de las carreras de Ingeniería en la asignatura Álgebra Lineal de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (FCEIA) de la Universidad Nacional de Rosario (UNR), Argentina. Dicha asignatura se desarrolla semestralmente y sus contenidos temáticos son: sistemas de ecuaciones lineales, matrices y determinantes, espacios vectoriales, espacios con producto interno, transformaciones lineales y autovalores y autovectores.

El presente informe relata una investigación educativa llevada a cabo con estudiantes de Álgebra Lineal correspondiente al 2° semestre del año 2016 de la FCEIA, UNR. Con la intención didáctica de evaluar la comprensión del concepto de independencia lineal, propusimos una actividad a 30 estudiantes. Se describen las dificultades observadas en las producciones de los alumnos y a partir de las mismas se intenta identificar sus orígenes mediante entrevistas personales. A partir de las respuestas dadas por los estudiantes notamos que las dificultades no se centraron únicamente en la complejidad del concepto de independencia lineal, sino también en problemas para formalizar la respuesta.

Marco teórico-didáctico

La enseñanza del Álgebra Lineal constituye uno de los mayores desafíos de la educación Matemática superior actual, ya que su aprendizaje trae aparejado numerosas dificultades relacionadas con un pensamiento de orden superior en el que se encuentran implicados procesos tales como la abstracción, el análisis, la demostración, el cambio de registro, el lenguaje, etc. La enseñanza del Álgebra Lineal es reconocida universalmente desde el punto de vista tanto de docentes como de alumnos, como una asignatura difícil de enseñar y aprender, respectivamente (Dorier 2002; Britton & Henderson 2009).

En algunas investigaciones en torno a la problemática del aprendizaje y enseñanza del Algebra Lineal, se alude a que las causas de tales dificultades se deben principalmente a: un obstáculo del formalismo, a la abstracción, a los diversos lenguajes que se usan (algebraico, aritmético y geométrico), a los cambios de registro y a los distintos tipos de pensamiento involucrado.

ISBN 978-84-945722-3-4

De acuerdo a E. Miranda Montoya (2006), en el Álgebra lineal la mayor parte de los conceptos se presentan a partir de definiciones formales de objetos cuya existencia no tiene, en su mayoría, conexión con conocimientos previos ni argumentos geométricos o físicos (como en el caso del Cálculo) que motiven la definición presentada. Los problemas asociados a estos conceptos se resuelven a partir de la definición y usando cuestiones de lógica y de la teoría de conjuntos (Miranda Montoya, 2006).

Según J. Dorier (2002), las dificultades referidas al proceso de enseñanza-aprendizaje de nociones básicas del Álgebra Lineal, están vinculadas con los diversos lenguajes (abstracto, algebraico y geométrico) que se usan en esta asignatura. El uso de estos lenguajes sin articulación son muchas veces el origen de algunas de las dificultades para el aprendizaje de los conceptos del Álgebra Lineal (Dorier, 2002).

A. Sierpinska, J. Trgalova, J. Hillel y T. Dreyfus (1999) mencionan la coexistencia de tres tipos de lenguajes donde cada uno de éstos desarrolla tipos de pensamiento necesarios para que un alumno pueda entender la asignatura: lenguaje geométrico asociado al pensamiento geométrico, el lenguaje aritmético asociado al pensamiento aritmético-analítico y el lenguaje abstracto asociado al pensamiento analítico estructural. Además, afirman que algunas de las dificultades en el aprendizaje de los conceptos del Álgebra Lineal tienen que ver con la falta de una práctica instruccional que articule estos lenguajes y que tal desarticulación puede deberse a que los contenidos propician la coexistencia de esos lenguajes como modos de pensamiento que algunas veces son intercambiables pero no equivalentes. Es de esta manera que un estudiante podría entender un problema o concepto sólo desde el punto de vista geométrico sin que eso implique que pueda pasar del lenguaje geométrico al lenguaje algebraico para resolver completamente el problema (Sierpinska, Trgalova, Hillel & Dreyfus, 1999).

El estudio de los errores en el aprendizaje de la Matemática ha sido una cuestión de permanente interés en el ámbito de la Educación y Didáctica de la Matemática, que tiene una larga historia y se ha caracterizado por aproximaciones e intereses muy diferentes. La preocupación por el conocimiento erróneo y la investigación sobre los errores cometidos por alumnos, ha ocupado y ha sido motivo de interés de muchos especialistas, entre los que podemos destacar a Popper, Bachellard, Russell, Radatz, Brousseau, Davis, Werner,

ISBN 978-84-945722-3-4

Movshovitz-Hadar, Zaslavsksy e Inbar, entre otros. Es sabido que los errores forman una parte de las producciones de los alumnos durante su aprendizaje de la Matemática y a su vez son datos objetivos que encontramos permanentemente en los procesos de enseñanza y aprendizaje de esta ciencia. Los errores que cometen nuestros alumnos deben ser considerados como el resultado de procesos muy complejos en los que intervienen varias variables del proceso educativo.

Muchas de los errores cometidos por los estudiantes de Álgebra lineal están relacionados con el aspecto formal de este campo de la Matemática. Al respecto, J. Dorier, A. Robert, J. Robinet y M. Rogalski (2000) se refieren a esto como un obstáculo de formalismo. Aseguran que las dificultades de los estudiantes con el aspecto formal de la teoría de espacios vectoriales no son sólo un problema general con el formalismo sino sobre todo una dificultad de comprensión del uso específico del formalismo dentro de la teoría de espacios vectoriales y la interpretación de los conceptos formales en relación con contextos más intuitivos como geometría o sistemas de ecuaciones lineales (Dorier, Robert, Robinet & Rogalski, 2000).

El contexto de trabajo

Algebra lineal es una asignatura del tercer semestre del ciclo básico de las carreras de Ingeniería de la FCEIA-UNR, Argentina.

En este curso se desarrollan nociones fundamentales del Álgebra Lineal: sistemas de ecuaciones lineales; matrices y determinantes; espacios vectoriales; espacios con producto interno; transformaciones lineales y diagonalización de matrices.

Nuestra experiencia docente nos muestra que los mayores inconvenientes que tienen los estudiantes están relacionados con la construcción de distintas nociones que surgen al estudiar el tema: Espacios Vectoriales.

Particularmente en este trabajo, estudiamos algunas de las dificultades observadas en relación al concepto de independencia lineal.

Este estudio fue realizado con un grupo de 30 alumnos de un curso de Álgebra Lineal de la carrera de Ingeniería Industrial del turno mañana de la FCEIA-UNR. Luego de haber trabajado el concepto de combinación lineal y con los conocimientos previos que tienen de

ISBN 978-84-945722-3-4

vectores como entes geométricos, construimos el de independencia lineal y a partir de éste, su definición formal.

La actividad didáctica

Propusimos diferentes actividades en relación al concepto en estudio, donde se trabajaron con subconjuntos de espacios vectoriales de dimensión finita tales como las *n*-uplas de números reales, los polinomios a coeficientes reales de grado menor o igual a *n* y las matrices reales de orden $m \times n$, con sus operaciones habituales. Sin mayor dificultad pudieron determinar si un subconjunto de dichos espacios es linealmente dependiente o independiente.

El proceso de estudio se vio interrumpido cuando, en un marco más formal, se les propuso la actividad didáctica siguiente:

> *Sean* $\mathcal{V}$ *un espacio vectorial y el subconjunto* $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ *linealmente independiente de* $\mathcal{V}$. *¿Es el subconjunto*
>
> $$S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3\}$$
>
> *del espacio vectorial* $\mathcal{V}$ *linealmente independiente? Justifique su respuesta.*

Esta actividad, donde no sólo una técnica precisa puede establecerse, fue lo que nos motivó para la realización de esta investigación.

Dificultades observadas y entrevistas personales

El objetivo principal de esta investigación es el de describir las dificultades observadas en las producciones de los alumnos en la actividad didáctica propuesta e intentar identificar sus orígenes mediante entrevistas personales.

Sólo 11 estudiantes (de los 30) pudieron responder correctamente a la consigna y 5 no la hicieron. Los errores observados en las producciones de los 14 alumnos restantes, pueden agruparse en tres tipos de dificultades: para identificar el vector cero; para formalizar adecuadamente la respuesta; y para abstraer el problema.

ISBN 978-84-945722-3-4

Dificultad para identificar al vector cero

El 43% de los estudiantes (6 de los 14) no identificó que el vector cero de la ecuación homogénea que surge para analizar la independencia lineal del conjunto S, es el vector nulo de un espacio vectorial abstracto.

Esta dificultad quedó evidenciada al notar que los estudiantes o bien confundían al vector cero con el escalar cero o lo consideraban como el vector nulo de *n* componentes.

Por ejemplo, en la Figura 1, el estudiante A tiene la concepción errónea que el vector cero es el vector nulo de 3 componentes reales.

$$c_1\bar{u}_1 + c_2(\bar{u}_1+\bar{u}_2) + c_3(\bar{u}_1+\bar{u}_2+\bar{u}_3) = \bar{0}$$

$$(c_1+c_2+c_3)\bar{u}_1 + (c_2+c_3)\bar{u}_2 + c_3\bar{u}_3 = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} c_1+c_2+c_3 = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \\ c_2+c_3 = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore c_1 = c_2 = c_3 = 0 \text{ y } S \text{ es L.I.}$$

Figura 1

La entrevista con el estudiante A es la que se reporta a continuación:

Entrevistador: Es claro de tu respuesta que conoces la definición de independencia lineal, sin embargo en la segunda ecuación que planteás estás reemplazando el vector cero por un vector de 3 componentes, ¿a qué se debe?

Estudiante A*:* Si, la definición la memoricé. No sabía qué hacer con el cero y como estuve practicando con vectores de $\mathbf{R}^3$ y el conjunto *S* tiene tres vectores, pensé que podía hacer lo mismo…

Entrevistador: Observá que el espacio vectorial con el que estás trabajando es un espacio vectorial abstracto, no $\mathbf{R}^3$…

Estudiante A*:* ¡Ah, claro!… no estoy trabajando con vectores de $\mathbf{R}^3$ ¿Entonces el cero, es el vector nulo de cualquier espacio?....

Dificultad para formalizar adecuadamente la respuesta

ISBN 978-84-945722-3-4

El 36% de los estudiantes (5 de los 14) tuvo dificultades en la formalización (justificación) adecuada de la actividad propuesta.

Fueron dos los errores que notamos en este caso. Uno de ellos fue no saber en qué instancia de la demostración debían utilizar la hipótesis. Y el otro error, más frecuente aún, el de utilizar los mismos escalares en el planteo de la ecuación homogénea referida al conjunto *B* y al conjunto *S*.

En referencia a este último error, en la Figura 2, se muestra lo que el estudiante B realizó.

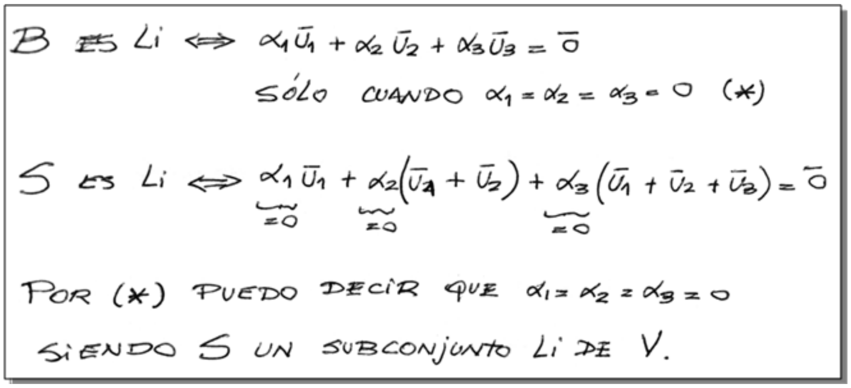

Figura 2

A continuación, transcribimos la entrevista con el estudiante B.

Entrevistador: Aparentemente, aunque se nota que manejás la definición de independencia lineal, tenés inconveniente en formalizar o escribir lo que estás pensando. Al ser *B* y *S* dos conjuntos distintos…, ¿son necesariamente iguales los escalares que usás en ambas combinaciones lineales?

Estudiante B*:* Yo sé que tengo que demostrar que *S* es linealmente independiente, y los escalares en la combinación lineal tienen que valer cero. También sé que *B* es linealmente independiente, porque el ejercicio lo dice, y pensé que podía escribirlo de esta manera. Ahora que lo pienso, no debería haber escrito las mismas letras para las dos ecuaciones.

Dificultad para abstraer el problema

El 21% de los estudiantes (3 de los 14) no supo trabajar en forma abstracta como está planteado el problema. El error quedó evidenciado al notar que particularizaron la situación a un espacio vectorial concreto conocido.

ISBN 978-84-945722-3-4

Por ejemplo, en la Figura 3 se muestra que el estudiante C resuelve el problema geométricamente considerando el espacio vectorial $\mathcal{V}$ como vectores geométricos del espacio euclidiano $\mathbf{R}^3$.

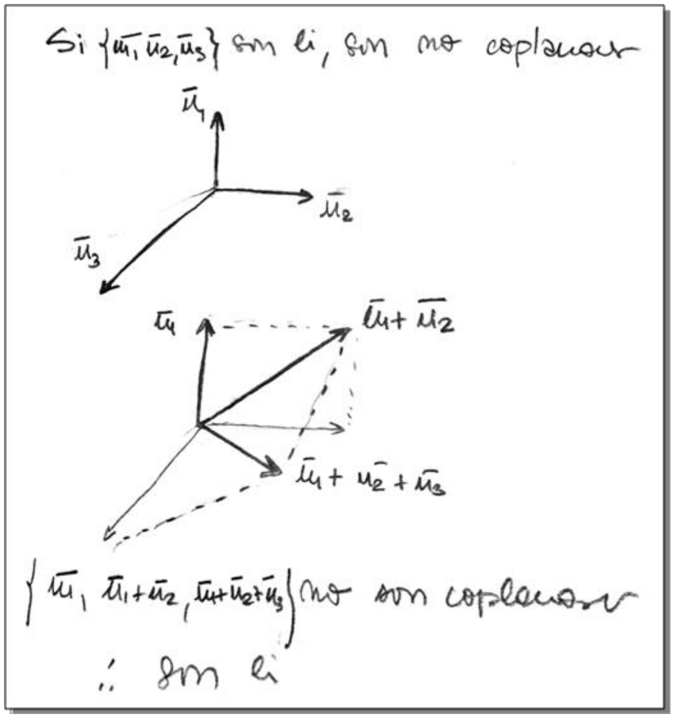

Figura 3

Reescribimos la entrevista realizada al estudiante C.

Entrevistador: Evidentemente sabés trabajar con vectores de $\mathbf{R}^3$ en forma geométrica, pero la actividad apuntaba a otra cosa. Estás considerando un espacio vectorial particular y no uno cualquiera como se indica en el ejercicio. ¿Por qué?

Estudiante C*:* Pensé que si en $\mathbf{R}^3$ se cumplía, también quedaba justificado para cualquier otro espacio. Trabajar así a mí me es más fácil porque puedo visualizar la situación.

Reflexiones finales

A partir de la observación de las dificultades detectadas a través de los errores cometidos por los estudiantes notamos que éstas no se centraron únicamente en la complejidad del concepto de independencia lineal sino también en: la identificación del vector cero, la formalización de la respuesta y la abstracción del problema.

ISBN 978-84-945722-3-4

Con respecto a la dificultad de identificar al vector cero consideramos que esto se debe a que estudian de memoria y realizan ejercicios por repetición.

En referencia al obstáculo en la formalización de la respuesta, hemos notado que si bien manejan el concepto de independencia lineal, lo tienen incorporado, presentan dificultades a la hora de escribir y justificar su respuesta.

Por último, si bien las representaciones geométricas son útiles para las estructuras de pensamiento, es necesario que en una etapa posterior puedan abstraer el problema.

A partir de esta investigación nuestra intención es formular una serie de hipótesis de trabajo que nos permitan una orientación sobre la forma más conveniente de abordar el concepto de independencia lineal.

Referencias bibliográficas

Britton, S. & Henderson, J. (2009). Linear algebra revisited: An attempt to understand students' conceptual difficulties. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *40(7)*, 963-974.

Dorier, J., Robert, A., Robinet, J., & Rogalski, M. (2000). The obstacle of formalism in linear algebra. En Dorier, J. (Ed.), *On the teaching of linear algebra*, pp. 85-94. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Dorier, J. (2002). Teaching linear algebra at university. En Li Tatsien (Ed.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Vol.3, pp. 875-884. Beijing: Higher Education Press.

Miranda Montoya, E. (2006). Generación de modelos de enseñanza-aprendizaje en el álgebra lineal. Primera fase: Transformaciones Lineales. *XVI Simposio Iberoamericano de enseñanza de la Matemática*. Recuperado de http://www.iberomat.uji.es/.

Sierpinska, A., Trgalova, J., Hillel J. y Dreyfus T. (1999). Teaching and Learning Linear Algebra with Cabri. *Proceedings of PME 23*, *1*, 119-134.

ISBN 978-84-945722-3-4