CB-166

TAREFAS MATEMÁTICAS PARA AVALIAÇÃO EM AULAS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

André Luis Trevisan – Henrique Rizek Elias
andrelt@utfpr.edu.br – henriqueelias@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – câmpus Londrina/PR – Brasil

Núcleo temático: Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas
Modalidad: CB
Nivel educativo: Nivel educativo terciario o Bachillerato (16 a 18 años)
Palabras clave: Educação Matemática. Ensino de Cálculo Diferencial e Integral. Tarefas matemáticas. Avaliação da aprendizagem escolar.

Resumo

Em Trevisan, Elias e Aranda (2016) fizemos um estudo de tarefas, presentes em um livro para a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, que sugerem a utilização de recursos computacionais e detectamos que poucas fazem uso da tecnologia como aliada à experimentação matemática. Realizamos, naquele momento, a reformulação de uma das tarefas, de modo que permitisse um uso mais dinâmico e interativo do software, dando à nova tarefa uma característica exploratório-investigativa. Fundamentados na noção de experimentação com tecnologias de Borba, Silva e Gadanidis (2015) para conceber a nova tarefa, e na discussão sobre a aprendizagem da matemática de Vallejo, Reyes e Pluvinage (2012) e Vallejo e Pluvinage (2013) para organizar um ambiente educacional para a disciplina, propusemos a tarefa reformulada a estudantes universitários em uma situação de avaliação, sem antes termos trabalhado de forma sistemática o tema em questão (transformações de funções) em sala de aula. Neste artigo, analisamos potencialidades e limitações da tarefa enquanto propiciadora da elaboração do conhecimento matemático. Destacamos, dentre outros resultados, que, em seu novo formato, a tarefa permitiu o resgate de tópicos da Educação Básica e, ao mesmo tempo, mostrou-se propícia para estabelecer relações com conceitos futuros, caracterizando a avaliação como oportunidade de aprendizagem.

Contextualizando a pesquisa

Não é incomum que a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) para cursos superiores seja conduzida de maneira tradicional, com seus docentes dominando as ações em sala de aula e ocupando todo o tempo expondo definições, exemplos e ilustrando com problemas os conceitos presentes na ementa da disciplina. Os episódios de avaliação resumem-se, muitas vezes, na realização de provas escritas nas quais os estudantes

ISBN 978-84-945722-3-4

reproduzem processos analíticos e algoritmos, ou transcrevem resultados e suas demonstrações previamente memorizados.

Vallejo, Reyes e Pluvinage (2012) e Vallejo e Pluvinage (2013), ao discutirem a aprendizagem da matemática, propõem a distinção de vários "idiomas" matemáticos, denominados estratos. Cada estrato de pensamento e expressão possui estabilidade e autonomia de funcionamento; o conteúdo de um estrato é determinado por um campo básico de objetos e de processos matemáticos, que possui um potencial de extensão (a inserção de novos conhecimentos). Uma mudança de estrato requer a mudança de formas de pensamento e novos modos de expressão. Os autores propõem a seguinte lista hierárquica de estratos: numérico (domínio dos números inteiros e racionais e uso correto das quatro operações), racional (domínio de razões e proporções), algébrico (uso adequado do sistema matemático de signos da álgebra) e funcional (uso de relações funcionais).

Uma avaliação diagnóstica por eles aplicada a estudantes ingressantes em um curso de CDI revelou uma situação muito próxima da que vivenciamos em nossa instituição: uma minoria dos estudantes está no estrato funcional, e muitos deles nem mesmo no estrato algébrico. Frente a tal constatação, Vallejo e Pluvinage (2013) apontam para o problema didático de impulsionar os estudantes a avançar para o estrato seguinte e sugerem a organização de um ambiente educacional para o CDI que contemple as seguintes características: i) que o estudante esteja sempre em ação, resolvendo ou tentando resolver problemas; ii) propor tarefas ou subtarefas cuja solução, de forma estruturada e coordenada, levem-no a definir ou mostrar o conceito desejado; iii) explorar um determinado conceito por meio de seus diferentes registros de representação.

Tal proposta se alinha com as ideias de Palha, Dekker, Gravemeijer e Van Hout-Wolters (2013) e Palha, Dekker e Gravemeijer (2015), que defendem uma abordagem para ensino de Matemática desenvolvida por meio da organização de sequências de tarefas matemáticas, adaptadas de livros didáticos, a serem resolvidas por estudantes em grupos heterogêneos, de forma colaborativa. Temos defendido essa abordagem de trabalho em nossas aulas de CDI (o qual temos denominado *episódios de resolução de tarefas*), em que antes de se introduzir um conceito mediante sua definição formal, o estudante é convidado a explorá-lo intuitivamente.

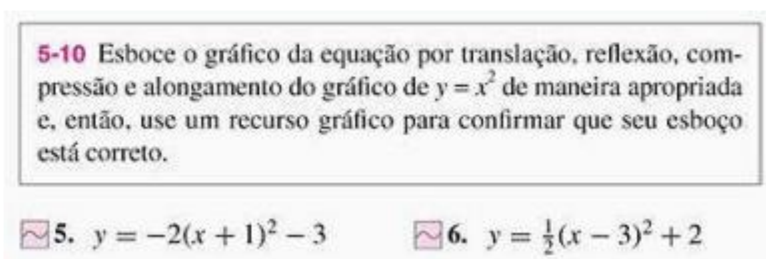
ISBN 978-84-945722-3-4

Um elemento que estamos incorporando às nossas práticas e integrando aos episódios de resolução de tarefas é o recurso tecnológico, em particular o GeoGebra. Borba, Silva e Gadanidis (2015, p. 51) propõem a noção de experimentação com tecnologias como "o uso de tecnologias informáticas no estudo de conceitos ou na exploração de problemas matemáticos".

Numa tentativa de reconhecer, em materiais instrucionais, enunciados de questões que possam ser adaptados para organização dos episódios de resolução de tarefas em aulas de CDI, que possibilitem a realização de *experimentação com tecnologias*, apresentamos, em Trevisan, Elias e Aranda (2016), um estudo de tarefas presentes em um livro destinado à disciplina e que demandam o uso de recursos computacionais. Em nossa análise um baixo número de tarefas que sugerem o uso do recurso computacional nessa perspectiva.

Propusemos então a reformulação de uma tarefa na qual o recurso computacional, que antes era sugerido apenas como instrumento para verificar uma resposta, torne-se que instrumento que ofereça "caminhos propícios para processos como a formulação de conjecturas, realização de testes, refinamento de conjecturas, familiarização com notações" (Borba, Silva e Gadanidis, 2015, p. 55).

Na figura 1, temos a tarefa original e, no quadro 1, na sequência, a reformulação proposta em Trevisan, Elias e Aranda (2016), que chamamos de *Transformação de funções*.


5-10 Esboce o gráfico da equação por translação, reflexão, compressão e alongamento do gráfico de $y = x^2$ de maneira apropriada e, então, use um recurso gráfico para confirmar que seu esboço está correto.

5. $y = -2(x+1)^2 - 3$ **6.** $y = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 2$

Figura 1 – Exemplo de tarefa do 1º agrupamento.
Fonte: Anton, Bivens e Davis (2007, p. 36).

<u>Tranformação de funções:</u> Utilizando um software (GeoGebra), insira a equação $y = a(x+b)^2 + c$, onde a, b e c são índices quaisquer. Use a ferramenta *controle deslizante* para determinar o intervalo em que cada um desses índices pode variar. Insira, também, a equação $y = x^2$, para usar seu gráfico de comparação. Para começar a tarefa, assuma os valores iniciais $a = 1$, $b = 0$ e $c = 0$. Repare que, nesse caso, os gráficos coincidem. Em cada item, avalie o gráfico e a expressão da função que aparece na janela de álgebra.

a) Mantendo os índices a e c fixos, faça o índice b variar.

i) O que acontece com o gráfico quando b assume valores positivos?

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

ii) O que acontece com o gráfico quando b assume valores negativos?
iii) Com suas palavras, descreva o movimento do gráfico.

b) Mantendo os índices a e b fixos, faça o índice c variar.
i) O que acontece com o gráfico quando c assume valores positivos?
ii) O que acontece com o gráfico quando c assume valores negativos?
iii) Com suas palavras, descreva o movimento do gráfico.

c) Mantendo os índices b e c fixos, faça o índice a variar.
i) O que acontece com o gráfico quando $a = 0$?
ii) O que acontece, em comparação com o gráfico de $y = x^2$, quando $a > 1$? Com suas palavras, descreva o movimento do gráfico.
iii) O que acontece, em comparação com o gráfico de $y = x^2$, quando $0 < a < 1$? Com suas palavras, descreva o movimento do gráfico.
iv) O que acontece em comparação com o gráfico de $y = x^2$, quando $a < 0$? Com suas palavras, descreva o movimento do gráfico.

d) Varie todos os três índices até chegar no gráfico da equação $y = -2(x+1)^2 - 3$. Dos movimentos descritos nos itens a), b) e c), comente quais foram necessários para, a partir do gráfico $y = x^2$, chegar no gráfico de $y = -2(x+1)^2 - 3$.

Quadro 1 – Proposta de reformulação da tarefa da Figura 1.
Fonte: Trevisan, Elias e Aranda (2016)

Neste artigo, apresentamos uma análise da tarefa a partir da sua aplicação num contexto de avaliação da disciplina lecionada por um dos autores deste artigo. Temos como objetivo analisar, por meio na análise da produção escrita dos estudantes, as potencialidades e as limitações da tarefa, nesse contexto, enquanto propiciadora da elaboração do conhecimento matemático.

Procedimentos metodológicos

O contexto no qual coletamos os dados apresentados neste texto ilustra um perfil típico dos estudantes que ingressam em turmas de CDI 1, nos cursos diurnos de Engenharia na Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), analisado em detalhes por Ramos, Fonseca e Trevisan (2016). Trata-se de uma turma de CDI do curso de Engenharia de Materiais, uma turma com 40 estudantes, ingressantes e cursando a disciplina no 1º semestre de 2016. Exceto por seis alunos em regime de dependência, os demais cursavam a disciplina pela primeira vez.

Considerando que o tema matemático (gráficos de funções) abordado na tarefa não é inédito para eles e acreditando na possibilidade de experimentação matemática que a mesma permite, propusemos a tarefa como possibilidade de resgatar tópicos da Educação

ISBN 978-84-945722-3-4

Básica (contribuindo tanto para a ampliação quanto para o avanço a um novo estrato de pensamento e expressão) em um momento formal de avaliação da disciplina.

Realizamos duas alterações em relação à formulação apresentada no Quadro 1:

- o item (c) foi proposto sem os subitens (foi pedido que se descrevesse em detalhes o movimento do gráfico, a partir dos valores assumidos pelo parâmetro a – com o intuito de observar se os estudantes transferiam para esse item aspectos observados anteriormente;
- foram acrescentados os itens (e) e (f), que sugeriam a utilização de movimentos observados nos itens anteriores e o procedimento de completamento de quadrados e cubos para explicar como gerar, sem o auxílio do software, os gráficos de uma quadrática e uma cúbica fornecidas – na intenção de observar como os estudantes lidavam com uma tarefa com estrutura distinta das propostas anteriormente (antes do episódio de avaliação, aos estudantes havia sido dada a tarefa de estudar, em horário extra-classe, o tema "completamento de quadrados e cubos", não abordado em sala de aula).

Os estudantes, que já estavam inseridos em um contexto de aula baseado em *episódios de resolução de tarefas*, foram organizados em grupos com dois ou três integrantes, cada grupo dispondo de um notebook, sem acesso à internet, e o software GeoGebra instalado, dispondo de 50 minutos para sua realização.

Com a produção escrita dos alunos em mãos, iniciamos nossa análise, de caráter qualitativa, de cunho interpretativo. Tal análise foi realizada com base em nosso objetivo: *analisar (i) as potencialidades e (ii) as limitações da tarefa, proposta em um contexto formal de avaliação, enquanto propiciadora da elaboração do conhecimento matemático.* É importante destacar que nosso foco de análise está na tarefa e não nas respostas dos estudantes. As respostas sustentam nossas conclusões e, por isso, as utilizamos para ilustrar nossas considerações feitas sobre a tarefa.

Análise de dados

Quanto ao primeiro aspecto (*potencialidades da taref*a) algumas das características apontadas por Borba, Silva e Gadanidis (2015) para a *experimentação com tecnologias* são

ISBN 978-84-945722-3-4

próprias natureza da tarefa proposta tal como fora elaborada, como a *manipulação dinâmica de objetos construídos* e a *exploração de caráter visual, dinâmico e manipulativo de objetos matemáticos*. Considerando a função controle deslizante do GeoGebra, utilizada para os coeficientes a, b e c da equação $y = a(x + b)^2 + c$, entendemos que a possibilidade de variá-los para perceber o comportamento do gráfico também permite a realização de *testes de conjecturas*, levando ao *convencimento sobre sua veracidade*. A *conexão entre as representações* algébrica e geométrica, fortemente potencializada pelo GeoGebra, é a essência da tarefa, uma vez que perceber as consequências das variações dos coeficientes na expressão algébrica nos gráficos é seu objetivo.

Para além das características intrínsecas à tarefa, outras puderam ser observadas por meio das respostas dos alunos. Alguns grupos utilizaram uma linguagem natural para descrever o comportamento do gráfico a cada variação. Termos como “afunilar” e “dilatar” foram utilizados, por alguns, para indicar o comportamento do gráfico provocado pela variação de a. Quando a muda de sinal, expressões como “parábola é espelhada horizontalmente” foram usadas para tratar a reflexão em torno do eixo x. Avaliamos o uso de uma linguagem menos formal como uma consequência da não sistematização prévia do conteúdo por parte do professor e, também, pela condição que o software fornece de *ensinar e aprender matemática de forma alternativa*, permitindo uma liberdade na criação dos termos.

No que diz respeito ao segundo aspecto (*limitações da tarefa*) destacamos os fatos do itens (a) e (b) *induzirem* muitos estudantes a analizar, no item (c) apenas os casos em que $a > 0$ e $a < 0$, sem o cuidado em distinguir os comportamento observados se $|\mathrm{a}| < 1$ ou $|\mathrm{a}| > 1$. Além disso, um conhecimento prévio da relação entre o sinal do parâmetro a e a concavidade da parábola, e a proposição no item (d) de uma função em que $|a| > 1$ (como usualmente apresentada em etapas anteriores de escolaridade) parece ter contribuído para que muitas equipes deixassem “passar despercebido”, em sua análise, o papel desse coeficiente no efeito de alongamento/compressão. Além disso, nos itens (a), (b) e (c) era necessário que os estudantes retomassem o gráfico no GeoGebra na posição inicial ($a = 1, \mathrm{b} = \mathrm{c} = 0$) pois caso contrario poderia iniciar a investigação com a equação da maneira

ISBN 978-84-945722-3-4

como estava quando finalizou o (sub)item anterior. Uma reformulação no enunciado que leve em conta esses aspectos mostra-se, assim, necessária.

Outra característica que percebemos refere-se ao *aprimoramento do enunciado*. Ao manter b e c fixos e variar a, alguns alunos concluíram sobre o "aumento da concavidade quanto maior o valor de a". Entendemos que esse aumento da concavidade a que se refere o estudante pode ser melhor discutido em termos da inclinação da reta tangente em determinados pontos. Assim, um aprimoramento do enunciado pode permitir o uso dessa tarefa em momentos posteriores, em que se pretende discutir a derivada da função $f(x) = a(x+b)^2 + c$. Cabe destacar que, antes da proposição dessa tarefa, o profesor já havia abordado a noção intuitiva do conceito de derivada, por meio do estudo dos quocientes de diferenças – sem a apresentação do conceito formal de limite.

Da sua proposição em um momento formal de avaliação, percebemos que certos elementos característicos da cultura tradicional de uma aula de Matemática, mais específicamente de CDI, emergiram, o que, para nós, indica a necessidade de uma melhor negociação entre professor e estudantes sobre o que se espera da tarefa no contexto de avaliação. Observamos, na redação da resposta de alguns grupos, elementos que parecem indicar mais a preocupação em "atingir" uma suposta resposta esperada pelo professor do que resultados de uma autêntica experimentação com tecnologias. Indícios disso aparecem na busca por utilizar nomenclatura anteriormente apresentada em aula para descrever propriedades que, naquele momento, eram supostamente desconhecidas.

Considerações finais

É relevante destacar que a maneira como a tarefa foi proposta (em grupo, com uso do software, em uma situação de avaliação e sem uma sistematização prévia do conteúdo) permitiu que os alunos conhecessem *novas dinâmicas* de aula e de avaliação. Além de tirar o professor do centro das ações, coloca o aluno como um indivíduo ativo no processo.

Além disso, possibilitou um resgate de tópicos da Educação Básica, ao mesmo tempo em que contribuiu (juntamente com outras propostas no contexto de trabalho daquele turma) para a ampliação e avanço dos estudantes a um novo estrato de pensamento e expressão. Por ser "aberta controlada", permitiu uma liberdade para os alunos citarem

ISBN 978-84-945722-3-4

conceitos não solicitados, mas relacionados com o tema em discussão. Por exemplo, a noção de raiz de uma equação.

Consideramos, dessa forma, que grande parte do proposto por Borba, Silva e Gadanidis (2015) foi contemplado por nossa tarefa, apesar de limitações (cuja análise indicou elementos para uma reformulação).

Reconhecemos que, no formato e contexto em que foi proposta, a experiência em tela mostrou-se como um episódio na qual a avaliação constituiu-se em uma *oportunidade de aprendizagem*. A expressão é entendida, conforme sistematização realizada por Pedrochi Junior (2012, p. 41) a partir das elaborações conceituais do GEPEMA[6], como "ocasião conveniente ao ato de aprender e a avaliação, sendo parte desse ato, deve contribuir para a aprendizagem dos alunos", na qual se criaram "oportunidades para os alunos desenvolverem, eles próprios, o conhecimento matemático" (p. 50).

Referencias bibliográficas

Anton, H., Bievens, I., & Davis, S. (2007). *Cálculo* (4th ed.). Porto Alegre: Bookman.

Borba, M. C., Silva, R. S. R., & Gadanidis, G. (2015). *Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática*: Sala de aula e internet em movimento. Autência: Coleção Tendências em Educação Matemática.

Palha, S., Dekker, R., Gravemeijer, K.; Van Hout-Wolters, B. (2013). Developing shift problems to foster geometrical proof and understanding. *The Journal of Mathematical Behavior*. Springer, 32, 141-159.

Palha, S., Dekker, R., Gravemeijer, K. (2015). The effect of shift-problem lessons in the Mathematics classroom. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 13, 1589 – 1623.

Pedrochi Junior, O. (2012) *Avaliação escolar como oportunidade de aprendizagem em matemática*. 58 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, 2012.

[6] Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação, atrelado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL) – Londrina/PR - Brasil, na qual o primeiro autor elaborou seu trabalho de doutorado.

ISBN 978-84-945722-3-4

Ramos, N. S., Fonseca, M. O. S., & Trevisan, A. L. (2016). *Ambiente de aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral pautado em episódios de resolução de tarefas*. In: V Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia (pp. 1-11). Ponta Grossa: Editora da UTFPR.

Trevisan, A. L., Elias, H. R., & Aranda, V. (2016) Um estudo de tarefas de Cálculo Diferencial e Integral com auxílio de recursos computacionais. In: VII Congresso Mundial de estilos de aprendizagem (pp. 1908-1916). Bragança - Portugal: Biblioteca Digital do IPB.

Vallejo, C. A. C.; Reyes, M.M.; Pluvinage, F. Promoviendo el pensamiento funcional en la ensenãnza de Cálculo. (2012). *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 17, 137 - 168.

Vallejo, C. A. C.; Pluvinage, F. (2013) Investigaciones sobre la enseñanza del Calculo. *El Cálculo y su Enseñanza*, 4, 57-82.

ISBN 978-84-945722-3-4