Epsilón - Revista de Educación Matemática 2011, Vol. 28(3), nº 79, pp. 81-92

ESCALERA HACIA EL CIELO

Pérez-García, Miguel Á. (autor de contacto)
I.E.S. Las Espeñetas, (Orihuela)
Márquez-Navarro, Pascual
I.E.S Las Espeñetas
Roldán-Zafra, Juan
I.E.S. Thader, (Orihuela)

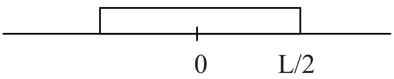
Resumen: *El presente artículo recoge la investigación científica que realizaron tres profesores de matemáticas y tecnología acerca de la estabilidad de estructuras crecientes. Durante la misma dedujeron la posibilidad de construir una escalera, simplemente apoyando peldaños uno encima de otro, que pueda unir dos puntos a diferente altura y desplazados horizontalmente cualquier distancia por grande que esta sea. El resultado está basado en el desplazamiento del centro de gravedad según la sucesión semiarmónica que da origen a una curva especial de estabilidad. Esta investigación fue la base también para una experiencia realizada con alumnos de 1º Bachiller como aplicación del tema "Sucesiones".*

¿Es posible formar una escalera hasta el cielo simplemente colocando peldaños uno sobre otro sin ningún tipo de adherente?

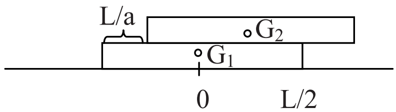
Seremos más modestos, ¿es posible formar una escalera sin adherente que nos permita subir a una torre de 12 metros de altura partiendo a unos 20 metros de distancia de la base de la torre?

¿Cómo hemos de colocar los peldaños para que la escalera se mantenga sola? La clave para que una escalera formada así se mantenga es que el centro de gravedad G de la estructura no salga nunca del primer peldaño. Sin embargo, está claro que cada vez que añadamos un nuevo peldaño el centro de gravedad se desplazará a la derecha. Y además llega un momento en que los peldaños salen totalmente fuera de la vertical del primero. Todo esto hace que la tarea parezca irrealizable.

Supongamos que tenemos peldaños rectangulares de longitud L y peso P perfectamente homogéneos y veamos que va ocurriendo con el centro de gravedad a medida que vamos añadiendo peldaños. Coloquemos el primero sobre una superficie perfectamente plana y graduemos la línea sobre la que se apoya marcando el cero justo en la mitad del peldaño que es donde se encuentra su centro de gravedad.



Colocamos otro encima desplazado a la derecha una fracción 1/a de la longitud L

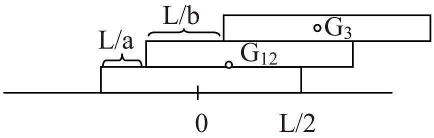


Horizontalmente, el centro de gravedad del primer peldaño está en $G_1=0$ y el del segundo en $G_2=L/a$. El nuevo centro de gravedad de la estructura formada por los dos se halla fácilmente como un problema de mezclas.

	Peso	G inicial	desplazamiento de G
Peldaño 1	P	0	P·0
Peldaño 2	P	L/a	P·L/a
Sumas	2P		P·0+P·L/a

Desplazamiento del centro G de la mezcla (estructura)= $\dfrac{P.0 + P.L/a}{2P} = \dfrac{L/a}{2} = G_{12}$

Supongamos que añadimos otro peldaño desplazado a la derecha una fracción 1/b.



Realizamos el mismo proceso:

	Peso		desplazamiento de G
Estructura	2P	$\frac{L/a}{2}$	$2P\cdot\frac{L/a}{2}$
Peldaño 3	P	(L/a)+(L/b)	P·((L/a)+(L/b))
Sumas	3P		$2P\cdot\frac{L/a}{2}+P\cdot((L/a)+(L/b))$

Desplazamiento del centro G de la mezcla $\dfrac{2P\cdot\frac{L/a}{2}+P\cdot((L/a)+(L/b))}{3P}=$

$$=\frac{\frac{L}{a}+\frac{L}{a}+\frac{L}{b}}{3}=G_{13}$$

Añadamos otro peldaño desplazado una nueva fracción 1/c sobre el anterior que nos permita descubrir la ley de desplazamiento de G. Realizando el proceso anterior obtendremos que:

$$G_{14}=\frac{\frac{L}{a}+\frac{L}{a}+\frac{L}{a}+\frac{L}{b}+\frac{L}{b}+\frac{L}{c}}{4}\text{ o lo que es lo mismo }G_{14}=L\cdot\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{4}$$

Descubrimos así la ley de desplazamiento del centro de gravedad.

Volviendo a nuestra pregunta inicial ocurre que si G_{14} es mayor que L/2 entonces estará fuera del primer peldaño y la escalera caerá. Es decir, para que se sostenga es necesario que: $L\cdot\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{4}\leq L/2$. Simplificando $(3/a)+(2/b)+(1/c)\leq 2$.

Por ejemplo, tomando a=b=c=3 el centro G estaría justo en L/2, en el borde justo del peldaño inferior y, por tanto, tan dentro como fuera de la estructura por lo que en la práctica el equilibrio no se mantendría (Margarit, Joan. Cálculo de estructuras. 2005). Para evitar este tipo de contrariedades supondremos siempre que la suma ha de ser estrictamente menor que 2

Recordamos que nuestro objetivo es que la escalera pueda unir dos puntos a diferente altura y separados por cualquier distancia horizontal, es decir, que el peldaño superior se encuentre a la distancia horizontal del primero que sea necesario. En el caso anterior el último peldaño ni siquiera llegaría a salir una vez del peldaño base.

Eso nos dice que la suma de las fracciones que indican los desplazamientos ha de ser todo lo grande que sea necesario, en una palabra, que sea divergente. En nuestro ejemplo dando a=4, b=3, c=2 vemos que la suma es menor que 2. Esta sucesión de denominadores nos recuerda la sucesión armónica que además es divergente, la suma de todos sus términos es infinito. Hay varias demostraciones de este hecho. La más famosa corresponde a Johann Bernoulli (Pérez, Miguel A., "Una historia de las Matemáticas: retos y conquistas a través de sus personajes", 2009).

Sucesión armónica: $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\ldots\ldots,\frac{1}{n},\ldots$

Serie armónica: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots\ldots+\frac{1}{n}+\ldots\ldots=\infty$

Es el momento de preguntarse: ¿Será estable la escalera cuando vamos colocando muchas más piezas desplazadas una longitud igual a las fracciones de la serie armónica?

Supongamos que formamos una escalera con n peldaños desplazados el primero 1/n, el segundo 1/(n-1), hasta el último que estará desplazado ½. Obviando la longitud L de las fórmulas anteriores pues se cancelará al comparar con L/2, tendremos que:

$$G_{1n}=\frac{\frac{n-1}{n}+\frac{n-2}{n-1}+\ldots\ldots+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}{n}$$

Hemos de comprobar que por muchos peldaños que coloquemos el centro G no sale fuera, es decir, es menor que ½.

Dicho de otra manera: $\lim\limits_{n\to\infty} G_{1n}<\frac{1}{2}$.

Sin embargo, en G_{1n} todas las n-1 fracciones del numerador son mayores que ½ (salvo la última que es igual) por lo que $G_{1n}>\frac{(n-1)\frac{1}{2}}{n}$. Así que

$$\lim_{n\to\infty} G_{1n} > \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)\frac{1}{2}}{n} = \frac{1}{2}.$$

Esto echa abajo nuestra primera hipótesis, avanzando en cada peldaño un término de la serie armónica la escalera se desmoronaría.

Quizá hayamos corrido demasiado. ¿Y si damos los pasos más pequeños? Tomaremos la mitad de la serie armónica que, por supuesto, también es divergente.

$$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\ldots\ldots,\frac{1}{n},\ldots\right) = \frac{1}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{8},\ldots\ldots,\frac{1}{2n},\ldots$$: Sucesión semiarmónica

Serie semiarmónica: $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\ldots\ldots+\frac{1}{2n}+\ldots\ldots = \frac{1}{2}.\infty = \infty$

Es decir, en cada peldaño avanzaremos 1/(2n), 1/(2(n-1)),……, 1/(2·3), 1/(2·2).

Para ese caso tendremos que: $G_{1n} = \dfrac{\frac{n-1}{2n}+\frac{n-2}{2(n-1)}+\ldots\ldots+\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 2}}{n}$

Vemos que todas las n-1 fracciones del numerador son menores que ½ por lo que entonces: $G_{1n} < \dfrac{(n-1)\frac{1}{2}}{n}$. Así que $\lim_{n\to\infty} G_{1n} < \lim_{n\to\infty} \dfrac{(n-1)\frac{1}{2}}{n} = \dfrac{1}{2}.$

¡Eureka! La escalera, incluso con infinitos peldaños, se mantendrá firme. Y avanzará hacia la derecha todo lo que sea necesario saliendo fuera del primer peldaño las veces que haga falta.

Hemos visto que $G_S<1/2<G_A$ donde G_S y G_A son los desplazamientos de los centros de gravedad en la sucesión semiarmónica y en la armónica respectivamente. Nos queda la duda de si entre la sucesión armónica y la semiarmónica hay otra que también nos sirva, es decir que el centro G quede antes de ½ y que sea divergente. Por ejemplo, la sucesión 1/(1'5n) se encuentra entre la 1/n (armónica) y la 1/2n (semiarmónica). En este caso:

$$G_{1n} = \frac{\frac{n-1}{1'5n}+\frac{n-2}{1'5(n-1)}+\ldots.+\frac{3}{1'5.4}+\frac{2}{1'5\cdot 3}+\frac{1}{1'5\cdot 2}}{n} = \frac{\frac{2}{3}\left(\frac{n-1}{n}+\frac{n-2}{n-1}+\ldots\ldots+\frac{3}{4}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)}{n}$$

Vemos que las n-3 primeras fracciones del numerador son todas mayores que ¾, así que podemos sustituirlas para obtener un resultado más pequeño que G_{1n}

$$G_{1n} > \frac{\frac{2}{3}\left(\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\ldots\ldots+\frac{3}{4}\right)+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)}{n} = \frac{\frac{1}{2}(n-3)+\frac{4}{9}+\frac{1}{3}}{n}$$

Hallando los límites de los dos miembros como siempre:

$\lim\limits_{n\to\infty} G_{1n} > \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{2}(n-3)+\frac{4}{9}+\frac{1}{3}}{n} = \dfrac{1}{2}$. Por tanto la escalera se desmoronaría.

Pero además este razonamiento se puede aplicar para cualquier otra sucesión situada entre la armónica y la semiarmónica. Por ejemplo para la sucesión $\dfrac{1}{1'\widehat{6}\cdot n}$

o lo que es lo mismo 3/5n buscaría cuando las fracciones del numerador de G_{1n} empiezan a ser todas mayores de 5/6 (que serían las n-6 últimas). Multiplicadas por 3/5 darían ½ y estaríamos en la misma situación del ejemplo anterior.

En general para la sucesión $\dfrac{1}{k.n}$ con 1<k<2 habríamos de buscar una fracción $\dfrac{a}{b} < \dfrac{1}{k}$ lo que implica que a<b y buscar cuando todas las fracciones empiezan a ser mayores que $\dfrac{b}{2a}$ la cual es mayor que ½ seguro pues a<b.

La primera fracción a la que no se puede aplicar este proceso es la 1/2n pues

$$G_{1n} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n}+\frac{n-2}{n-1}+\ldots\ldots+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)}{n}$$

y no hay ninguna fracción en el numerador a partir de la cual, multiplicada por ½ de mayor que ½. Eso nos asegura que la sucesión semiarmónica es la primera de esa familia de sucesiones que cumple las condiciones exigidas, G_{1n} es siempre menor de ½ y la serie correspondiente es convergente.

Para ilustrar todo lo expuesto hemos representado dos curvas, Dn y Gn. Dn es la curva que sigue la esquina superior izquierda de cada peldaño de la escalera al colocarlos según la sucesión semiarmónica, y Gn, la curva del centro de gravedad de la escalera a medida que aumenta el número de peldaños. En todos los ejemplos que veremos a continuación hemos considerado un peldaño de 25 cm de espesor y 160 cm de longitud.

Veamos las ecuaciones y representemos las curvas.

— Ecuación del desplazamiento de la escalera, Dn.

$$D_n = \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{2i}$$

En la figura 1 tenemos la gráfica que representa una escalera de 11 peldaños. La escalera sobresale 161,59 cm, más de una vez la longitud del peldaño, que es de 160 cm; y tiene una altura total de 275 cm.

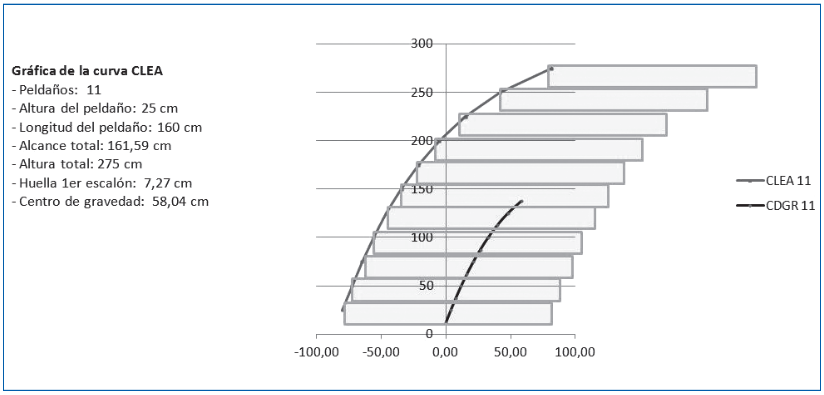


Figura 1

Se observa que, a medida que añadimos más escalones, la curva va inclinándose más cada vez, siguiendo la sucesión semiarmónica, y aumentando la huella.

— Ecuación del centro de gravedad de la escalera, Gn.

El centro de gravedad de la escalera de N peldaños se corresponde con el de un conjunto de N cuerpos desplazados entre sí horizontalmente según la serie semiarmónica. Para calcular el centro de gravedad se utiliza la expresión:

$$c.d.g. = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i X_i}{\sum_{i=1}^{n} P_i}$$

Donde Pi es el peso del escalón i. Puesto que todos los escalones son iguales, esta variable desaparece del cálculo. Xi es la distancia del c.d.g. del escalón i al eje vertical, y varía según la sucesión semiarmónica. La curva que nos proporciona el c.d.g. es:

$$G_n = \frac{1}{2n} \sum_{i=2}^{n} \frac{i-1}{i}$$

En la Figura 1 el centro de gravedad (curva corta) de la escalera completa queda sensiblemente por debajo del límite de estabilidad de la misma: a 21,96 cm del borde del primer peldaño. La huella más pequeña (del escalón más bajo) es de 7,27 cm. En general, a medida que aumenta el número de peldaños, la curva del c.d.g. se aproxima al borde del primer peldaño sin sobrepasarlo nunca.

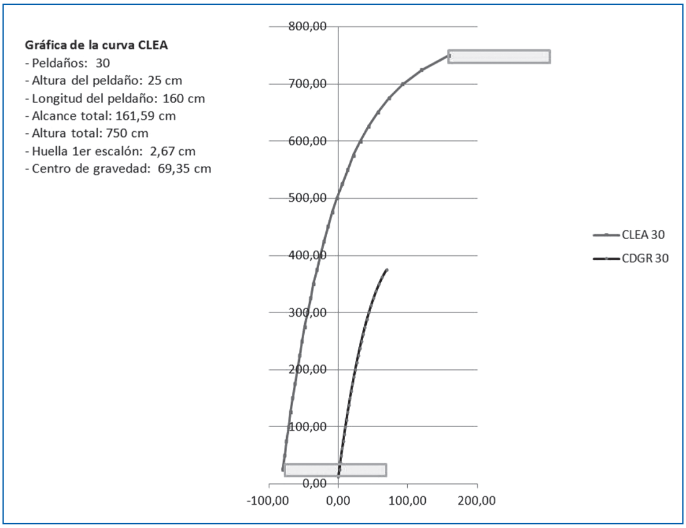


Figura 2

En la figura 2 observamos las curvas para una escalera de 30 peldaños.

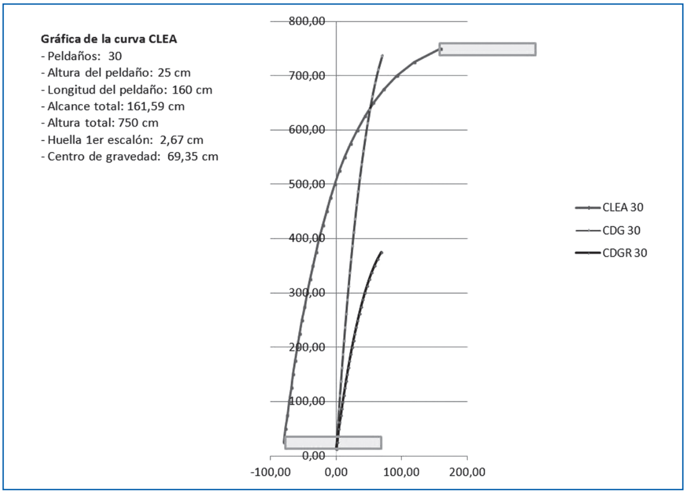


Figura 3

En la figura 3 se representan las dos escaleras en la misma gráfica para apreciar su diferencia.

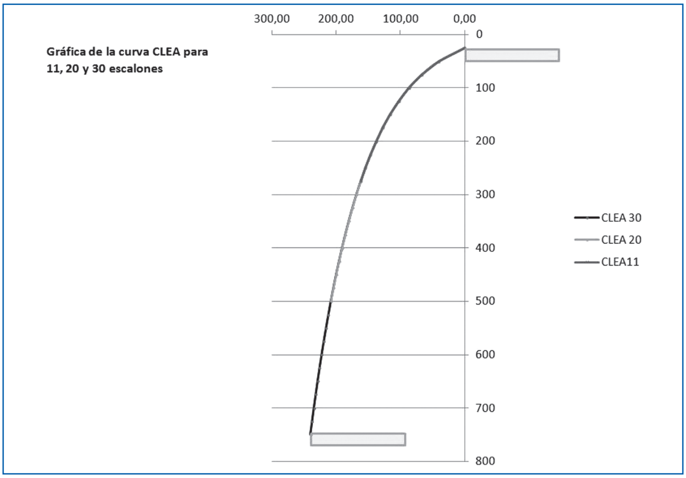


Figura 4

La gráfica de la figura 4 representa curvas para 11, 20 y 30 escalones en ejes invertidos, de forma que, para saber qué forma tendrá la escalera al aumentar indefinidamente el número de peldaños, sólo tenemos que ir prolongando el extremo inferior siguiendo la sucesión semiarmónica.

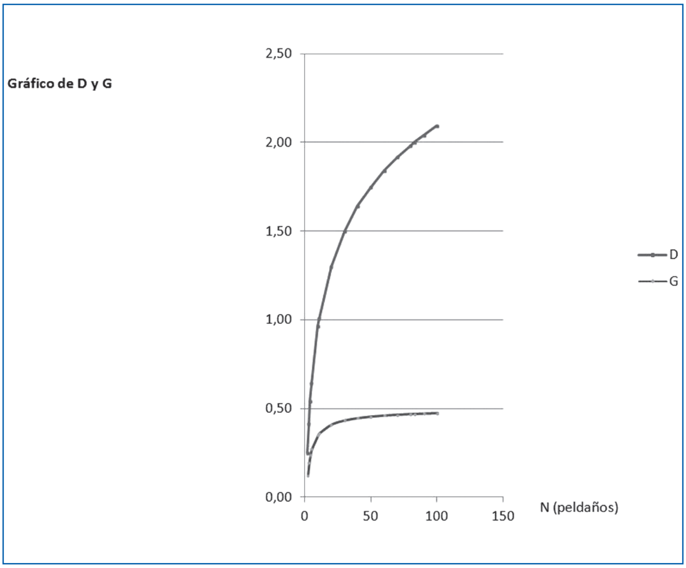


Figura 5

En la figura 5 se representa cómo varía el alcance de la escalera y su centro de gravedad a medida que usamos escaleras con mayor número de peldaños, N. El centro de gravedad, G, tiende asintóticamente a ½ L (la mitad de la longitud del peldaño de la base) sin llegar a salir nunca; mientras que el alcance, D, aumenta indefinidamente aunque cada vez más lentamente:

$$\lim_{n\to\infty} G_n < \frac{1}{2}\ ;\ \lim_{n\to\infty} D_n = \infty$$

Para calcular el número de escalones necesarios para obtener alcances arbitrariamente largos podemos usar la aproximación de Euler-Mascheroni (Pérez, Miguel A. "Una historia de las Matemáticas: retos y conquistas a través de sus personajes". 2009)

$$D_n \cong \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n} + \ln(n) + \gamma\right)$$

Esta expresión aproxima el valor de la serie tanto más cuanto más términos consideremos siendo γ una constante de valor 0'5772…. (la fórmula nos indica que nuestra curva es aproximadamente una logarítmica). Así, hemos obtenido la siguiente tabla, donde hemos puesto el interés en el número de escalones necesarios para que el desplazamiento horizontal de la escalera sea de 1, 2,… n veces la longitud de un escalón:

n veces	escalones	cálculo
1	11	Exacto
2	83	"
3	616	"
4	1.673	Aprox. de Euler-Mascheroni
5	12.367	"
6	91.353	"
7	675.071	"
8	4.988.968	"
9	36.820.263	"
10	272.297.583	"

Esta tabla, obviamente, es independiente de la longitud y espesor de los escalones.

LA EXPERIENCIA CON LOS ALUMNOS

Después de dar los conceptos básicos del tema de Sucesiones, se presentó la idea de centro de gravedad que ya conocían de Física y se animó a los alumnos al cálculo manual de los centros de gravedad para dos, tres y cuatro escalones que resolvieron como un **problema de mezclas** o utilizando la fórmula al respecto.

Tras orientaciones del profesor se establecieron las condiciones de estabilidad de la escalera. Después de conseguir un gran número (250) de pequeñas tablas de madera (medidas 10x12 cm) cortadas iguales por un carpintero, se les propuso **trabajar en grupo** construyendo escaleras cuyo último peldaño quedara fuera totalmente de la base. Probando consiguieron hacerlo incluso con 10 escalones (con la semiarmónica se necesitan 11). Se les propuso después sacarla 1'5 veces fuera de la base (se necesitan 33 escalones con la semiarmónica) lo que consiguieron con 33 exactamente.

Surgió la pregunta, ¿cuántas veces podremos sacarla fuera de la base?

Hubo distintas elucubraciones de los alumnos entre las que no se encontraba la respuesta correcta. El profesor apuntó la necesidad de llevar un orden en el crecimiento de la escalera (una **sucesión** de desplazamientos, así que el desplazamiento final sería la suma de todos los desplazamientos introduciendo la **idea de serie**) y las condiciones de dicho crecimiento (había de poder unir dos puntos por muy separados que estuvieran, introduciendo la idea de **serie convergente y serie divergente**).

Los alumnos propusieron algunas de las sucesiones geométricas recordando que sólo las de razón mayor que 1 son divergentes pero sin éxito en su construcción.

El profesor presentó entonces la **serie armónica** que cumplía estas condiciones (mostrando una de las demostraciones de su divergencia). Pronto las escaleras formadas en cada grupo de alumnos empezaron a desmoronarse. Dedujeron que ese crecimiento era demasiado rápido y preguntaron por otra sucesión más lenta. De nuevo es el profesor el que sugiere dividir por 2 y construyeron así la semiarmónica cuyas escaleras se mantienen.

La curiosidad les hizo preguntarse cuántos escalones se necesitan para salir fuera de la base una, dos, tres o más veces, pero tras intentos con calculadora en mano comprueban lo engorroso del cálculo y optan por crear un sencillo programa con EXCEL para dicho cálculo que funciona. Los resultados decepcionaron a algunos alumnos pues vieron que el crecimiento era muy lento necesitándose, por ejemplo, más de 12000 escalones para salir 5 veces de la base.

Es en ese momento cuando se trata de probar que en esa sucesión de desplazamientos el centro de gravedad no saldrá nunca del peldaño base y que por mucho que crezca la escalera nunca se caerá. Auxiliados por el profesor los alumnos comienzan a plantear la fórmula del centro de gravedad pero su dificultad para n escalones supone que sea el profesor quien la obtenga y calcule su límite probando que es menor que ½. Las consecuencias de este resultado sorprendieron mucho a los alumnos.

El profesor presento la fórmula de Euler-Mascheroni que inmediatamente aplicaron los alumnos comprobando cierto error y su disminución según crecía el número de términos. A partir de la expresión se relacionó la serie semiarmónica con la función logarítmica. Los alumnos manejaron entonces el programa wingraph para representar algunas de las gráficas que se han presentado como figuras 1, 2, 3, 4, 5, comprobando su forma logarítmica.

Pronto surgieron propuestas acerca del avance de los peldaños en dos direcciones al mismo tiempo (imagen 1) o girando a una determinada altura (imagen 2) fabricando ellos mismos las escaleras de las imágenes.

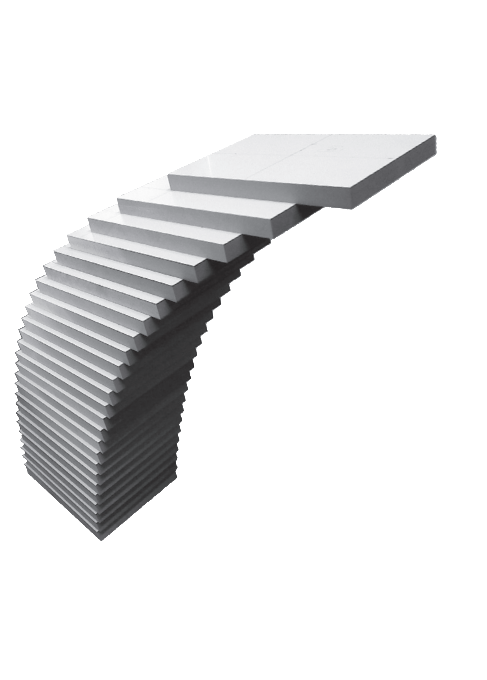


Imagen 1

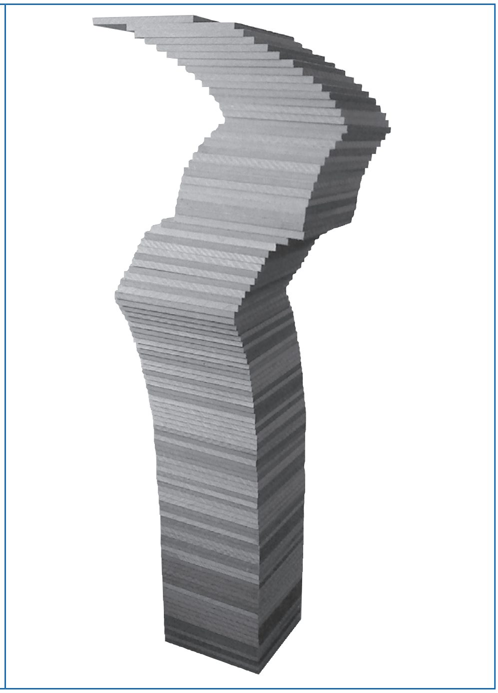


Imagen 2

La valoración de esta actividad fue realmente positiva. La aceptación de los alumnos fue excelente si bien hay que decir que el alumno necesitó en exceso la intervención del profesor ante ciertas generalizaciones. Por otro lado se necesitan tres clases para su realización (quizás demasiado para lo apretado de la programación en 1º bachiller).

BIBLIOGRAFÍA

Pérez, Miguel Ángel. (2009) "Una historia de las Matemáticas: Retos y conquistas a través de sus personajes". Madrid. Visionnet

Margarit Joan. (2005) *"Cálculo de estructuras".* Barcelona. Visor.

TÉRMINOS CLAVE:

Stairs (escalera)

Center of gravity (centro de gravedad)

Serie armónica (harmonic series)