

## **SISTEMAS DE CÁLCULO SIMBÓLICO. INSTRUCTIVOS**

Horacio Caraballo<sup>1</sup> Cecilia Zulema González<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Bachillerato de Bellas Artes. Colegio Nacional. Facultad Ciencias Agrarias y Forestales  
Universidad Nacional de La Plata - Argentina.

<sup>2</sup> Facultad Ciencias Agrarias y Forestales. Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de  
La Plata - Argentina

horacioca@ciudad.com.ar; cgonzalez@agro.unlp.edu.ar  
Nivel Universitario

### **Resumen**

En este artículo se presenta una estrategia didáctica e instrumental que intenta resolver el primer contacto de los alumnos universitarios, en las materias de matemática de los primeros años de sus carreras, con el software matemático conocido como sistema de cálculo simbólico o sistema de álgebra computacional. Este tipo de software tiene, en general, un alto umbral de iniciación. Nuestra propuesta se refiere a superar este umbral mediante un conjunto de instructivos. Estos instructivos son documentos que se utilizan simultáneamente con el software y con las guías de trabajos prácticos del curso. Cada instructivo muestra una secuencia de comandos y acciones en la interfase del programa que permite resolver las distintas actividades. La idea es utilizar el software para reelaborar las actividades propuestas en los trabajos prácticos de la materia en cuestión y para resolver actividades especialmente diseñadas. Se trata de una aproximación al programa a partir de su uso directo sobre un tema específico.

Desde un punto de vista didáctico el propósito central de este diseño es la creación de competencias mínimas que permitan un desarrollo posterior en el manejo del software.

Desde un punto de vista instrumental tiene ventajas sobre modalidades presenciales que requieren recursos humanos no disponibles en la mayoría de las situaciones, los alumnos hacen uso de esta herramienta de una manera asincrónica y autónoma.

Palabras clave: Recursos didácticos. Software. Instructivos.

### **Marco teórico**

La incorporación de tecnología informática a la enseñanza de la Matemática cubre la necesidad de poner a disposición de docentes y estudiantes nuevas herramientas que faciliten la enseñanza y el aprendizaje de conceptos y contenidos. Ayuda a resolver problemas y lo que es más importante contribuye a desarrollar nuevas capacidades cognitivas.

Las calculadoras y computadoras son herramientas esenciales para la enseñanza, el aprendizaje y el desarrollo de las matemáticas. Generan imágenes visuales de las ideas matemáticas, facilitan la organización y el análisis de datos y realizan cálculos de manera eficiente y precisa. Cuando disponen de herramientas tecnológicas, los estudiantes pueden enfocar su atención en procesos de toma de decisiones, reflexión, razonamiento y resolución de problemas. (Santos Trigo 2001)

Algunas de las posibilidades que brinda la utilización de este tipo de aplicaciones esta relacionadas con la:

- Interactividad e inmediatez: la posibilidad de producir modificaciones, dar respuestas y requerir acciones, con inmediatez y fluidez, permite, entre otras cosas, la exploración dinámica de representaciones y el control de una secuencia de acciones.
- Capacidad de almacenamiento y de recuperación de la información.

- Múltiples formas de representación en un mismo medio.
- Polivalencia, versatilidad: el mismo medio puede usarse de diversas maneras, ampliando enfoques. (Azinian 1998)

Las características citadas, además de permitir el desarrollo de ambientes de aprendizaje enriquecidos, pueden ayudar al docente, abriéndole ventanas al proceso de aprendizaje de los alumnos.

### **Contexto y necesidad**

En lo que sigue enumeramos algunos aspectos comunes, en nuestro medio, a muchos cursos de matemática de los primeros años en carreras relacionadas con temáticas científico-tecnológicas (ingeniería, informática, agronomía, economía, etc.) En estos cursos, en general, la situación suele ser la siguiente:

- El diseño curricular comprende momentos teóricos-prácticos y momentos prácticos. En los primeros se presentan los aspectos formales, en los segundos la ejercitación formal y las aplicaciones. Es en el marco de la ejercitación y de las aplicaciones donde el uso de software tiene una importancia sobresaliente. Las posibilidades de cálculos simbólicos, representaciones gráficas y aproximaciones numéricas, permiten abordar problemas complejos que sirven para reforzar y resignificar el conocimiento.
- El número de alumnos inscriptos es elevado, la cantidad de alumnos por docente es grande. A esto debe sumarse la gran dispersión en el grado de las competencias informáticas de los alumnos. Todo esto hace difícil agregar al desarrollo tradicional de una materia herramientas complejas como Maxima, Sage, Octave, Mathematica, Matlab, Maple, etc.
- Los laboratorios de informática tienen una capacidad limitada, el número de máquinas es mucho menor que la cantidad de alumnos, esto hace complicado, si no imposible, implementar clases presenciales para todos.
- La cantidad de docentes para asistir a los alumnos en el manejo de software matemático es escasa.

En este contexto, la estrategia que proponemos permite que los alumnos, en forma autónoma, se inicien en el uso del software y que lo incorporen como una herramienta más en el estudio y la aplicación de la matemática.

### **Estrategia didáctica**

Nuestra estrategia consiste en realizar los trabajos prácticos utilizando un software matemático a partir de una sucesión de pasos generados por un instructivo. Este instructivo es un documento diseñado a medida para cada actividad.

El alumno puede seguir las indicaciones que se le proponen sin necesidad de un tutor. La tutela la realiza la propia guía (en nuestro caso el instructivo) en la que se indican de forma pormenorizada los pasos que se han de ir dando para desarrollar el aprendizaje. (García Terán J., Lorenzana A., Magdaleno Martín J. 2003)

En general los programas a los que nos referimos son complejos y presentan una gran variedad de usos dentro de su campo, no pretendemos presentar un manejo completo, sino solamente mostrar una primera aproximación a modo de iniciación que permita un posterior autoaprendizaje. (González C., Caraballo, H. 2002).

Las competencias mínimas que se pretenden instaurar con estas actividades se refieren a:

- Familiaridad con la interfase de usuario.

- Conocimiento de las prestaciones relacionadas con los contenidos curriculares de la materia.
- Manejo de la documentación y ayuda del programa.
- Aplicación del software a la resolución y modelado de situaciones complejas.

### **Curso de matemática de la Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales de la Universidad Nacional de La Plata**

Matemática es una asignatura anual de primer año de las carreras de Ingeniería Agronómica e Ingeniería Forestal.

Tiene asignada una carga horaria total de ciento sesenta horas, distribuidas en clases de cinco horas semanales, a desarrollarse durante un período de treinta y dos semanas.

La materia se refiere a la aplicación de algunos resultados del Álgebra, la Geometría y el Cálculo a la solución de problemas formales (propios de la Matemática) y principalmente a la descripción y solución de problemas provenientes de la Física, Química, Biología y Tecnología.

Los núcleos centrales sobre los que gira el desarrollo de la asignatura corresponden a distintas ramas de la matemática: álgebra, geometría, cálculo diferencial, cálculo integral y ecuaciones diferenciales ordinarias.

Con respecto al álgebra, los principales temas son: resolución de ecuaciones, matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales. En lo que se refiere a la geometría, los temas más relevantes son: sistemas de coordenadas, de ecuaciones en dos variables y de lugares geométricos, vectores y sus aplicaciones.

En cuanto al cálculo diferencial y el cálculo integral de funciones de una variable real y las ecuaciones diferenciales ordinarias los núcleos centrales son: funciones, el concepto de derivada o razón de cambio de una función, estudio de funciones para poder realizar su gráfica, integrales indefinidas, integrales definidas y aplicaciones de la integral y con referencia a las ecuaciones diferenciales ordinarias: métodos de resolución por variables separables, ecuaciones homogéneas y ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

### **Elección del software**

Luego de evaluar una serie de programas se empezó por descartar los propietarios o comerciales (Mathematica, Matlab, Maple, etc.) ya que es necesaria la distribución libre para los alumnos. Se prestó, entonces, atención a Maxima, Sage, Octave y Scilab, recayendo nuestra preferencia en Maxima.

La elección de este programa en particular esta basada en las siguientes características:

- Tiene licencia GPL GNU, es software libre y se descarga y distribuye gratuitamente.
- Es relativamente “pequeño”, 24 Mb para versión 5.20.1 (diciembre de 2009) para Windows.
- Se instala fácilmente.
- Tiene una interfase gráfica simple y eficiente (wxMaxima).
- Está correctamente documentado.
- Está disponible en castellano.
- Existen varios manuales en castellano de reciente factura.

Tomando como fuente la presentación del sitio Web de Maxima podemos decir que este auxiliar matemático es un sistema de algebra computacional. Es un sistema para la manipulación de expresiones simbólicas y numéricas, incluyendo diferenciación, integración, expansión en series de Taylor, transformadas de Laplace, ecuaciones

diferenciales ordinarias, sistemas de ecuaciones lineales, vectores, matrices y tensores. Maxima produce resultados con alta precisión usando fracciones exactas y representaciones con aritmética de coma flotante arbitraria. Adicionalmente puede graficar funciones y datos en dos y tres dimensiones. Maxima puede ser compilado sobre varios sistemas incluyendo Windows, Linux y MacOS X. El código fuente para todos los sistemas y los binarios precompilados para Windows y Linux están disponibles en el Administrador de archivos de SourceForge.

Maxima es un descendiente de Macsyma, el sistema de álgebra computacional desarrollado a finales de 1960 en el MIT. Macsyma fue revolucionario en sus días y muchos sistemas posteriores, tales como Maple y Mathematica, estuvieron inspirados en él.

La rama Maxima de Macsyma fue mantenida por William Schelter desde 1982 hasta su muerte en 2001. En 1998 él obtuvo permiso para liberar el código fuente bajo la licencia pública general (GPL) de GNU. Desde su paso a un grupo de usuarios y desarrolladores, Maxima ha adquirido una gran cantidad de usuarios.

La gratuidad del programa y sus características de hacen Maxima una formidable herramienta pedagógica, de investigación y de cálculo técnico, accesible a todos los presupuestos, tanto institucionales como individuales. (Rodríguez Riotorto 2008)

### **Implementación**

El material didáctico correspondiente al curso se encuentra en línea en el Aula Virtual que está en el sitio Web de la facultad. Los trabajos teórico-prácticos y los instructivos correspondientes tienen formato pdf. Se dispone además de un instructivo inicial que propone los pasos a seguir para descargar e instalar Maxima.

La forma de trabajo para el alumno es ejecutar Maxima simultáneamente con la guía teórico-práctica y el instructor correspondiente. El primer paso es reproducir en el software lo propuesto en el instructor, luego continuar con la resolución de los trabajos teórico-prácticos.

Esta actividad es optativa en el desarrollo del curso. Cabe comentar que un porcentaje considerable de los alumnos utiliza este complemento.

### **Ejemplo**

A continuación se muestra un instructivo tal como lo reciben los alumnos en forma de documento pdf:

En este **Instructivo-2** se explican los procedimientos necesarios para resolver las operaciones y los ejercicios sobre matrices y determinantes del Teórico Práctico N°2 utilizando **wxMaxima**

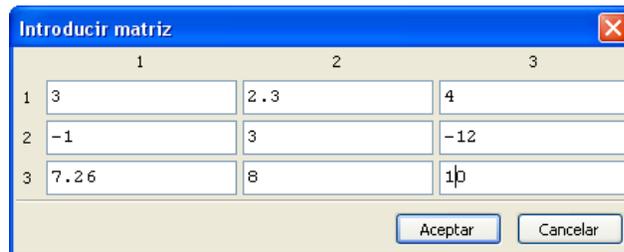
Operaciones con matrices:

Introducción de las matrices. En **wxMaxima** ir a **Algebra-introducir matriz:**

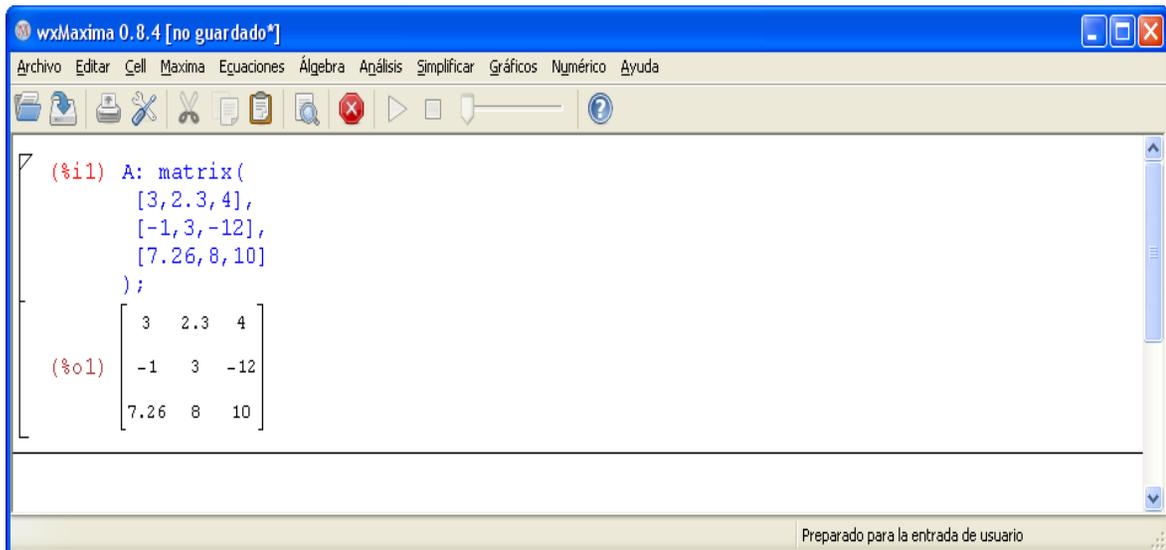
Aparece la caja de diálogo donde se introduce el nombre y el tipo de matriz:



Al aceptar aparece la caja de diálogo donde se introducen los elementos de la matriz:



Al aceptar desaparece la caja de diálogo y la matriz **A** se muestra en la ventana de comandos. Una alternativa a esta ruta sería utilizar directamente el teclado. Notar que **(%i1)** muestra la sintaxis que produce **A** esto podría tipearse directamente y luego presionar **shift+enter** a la vez (primero **shift** y con esta presionada **enter**) para producir **(%o1)**:



Una vez introducidas las matrices se opera entre ellas. El producto de matrices se realiza con el “punto” **A.B**

```

wxMaxima 0.8.4 [no guardado*]
Archivo Editar Cell Maxima Ecuaciones Álgebra Análisis Simplificar Gráficos Numérico Ayuda

(%i3) A: matrix([3,2.3,4],[-1,3,-12],[7.26,8,10]);
(%o3)
[ 3  2.3  4 ]
[ -1  3  -12 ]
[ 7.26 8  10 ]

(%i4) B: matrix([6,5,4],[-8,0,-2],[6,7,8]);
(%o4)
[ 6  5  4 ]
[ -8 0  -2 ]
[ 6  7  8 ]

(%i5) A.B;
(%o5)
[ 23.6  43.0  39.4 ]
[ -102  -89  -106 ]
[ 39.56 106.3 93.03999999999999 ]

(%i6) 2*A+B;
(%o6)
[ 12  9.6  12 ]
[ -10 6  -2.6 ]
[ 20.52 23  28 ]

Preparado para la entrada de usuario

```

Para calcular el determinante, la adjunta, la transpuesta y la inversa de una matriz dada se puede ir a **Álgebra-determinante**, etc. O utilizar los comandos directamente:

**determinant(A)** calcula el determinante de A.

**adjoint(A)** calcula la matriz de los cofactores y la transpone (notar que difiere del apunte de clases donde la adjunta es la matriz de los cofactores únicamente).

**transpose(A)** transpone la matriz A.

**invert(A)** calcula la inversa de A.

Se puede dar nombre a los productos de estos comandos directamente, por ejemplo: **B:invert(A)** llamaría **B** a la matriz inversa de **A**, ver a continuación.

```

wxMaxima 0.8.4 [no guardado*]
Archivo Editar Cell Maxima Ecuaciones Álgebra Análisis Simplificar Gráficos Numérico Ayuda

(%i1) A:matrix([2,-7,3],[-5,9,1],[7,-2,4]);
(%o1)
[ 2 -7 3 ]
[ -5 9 1 ]
[ 7 -2 4 ]

(%i3) determinant(A);
(%o3) -272

(%i8) B:invert(A);
(%o8)
[ -19/272 11/272 1/16 ]
[ 27/272 13/272 1/16 ]
[ 53/272 45/272 1/16 ]

(%i9) A.B;
(%o9)
[ 1 0 0 ]
[ 0 1 0 ]
[ 0 0 1 ]

Preparado para la entrada de usuario
    
```

**Matriz triangular superior:**

El comando **triangularize (T)** genera una matriz triangular superior.

El comando **echelon (T)** genera una matriz triangular superior con unos en la diagonal.

```

wxMaxima 0.8.4 [no guardado*]
Archivo Editar Cell Maxima Ecuaciones Álgebra Análisis Simplificar Gráficos Numérico Ayuda

(%i19) T: matrix([3,-4,5,1],[1,8,-5,5],[7,2,1,2]);
(%o19)
[ 3 -4 5 1 ]
[ 1 8 -5 5 ]
[ 7 2 1 2 ]

(%i20) echelon(T);
(%o20)
[ 1 -4/3 5/3 1/3 ]
[ 0 1 -5/7 1/2 ]
[ 0 0 1 7/3 ]

(%i21) triangularize(T);
(%o21)
[ 3 -4 5 1 ]
[ 0 28 -20 14 ]
[ 0 0 -72 -168 ]

Preparado para la entrada de usuario
    
```

### **Conclusiones**

En este artículo hemos intentado mostrar una forma de introducir el uso de software específico en el desarrollo de un curso tradicional sin afectar docentes y tiempo a la tarea. El uso de instructivos, como forma didáctica parece un tanto simplista, sin embargo, refiere a un tipo de aprendizaje muy presente en los jóvenes que tiene que ver con el sistema de ensayo y error tan presente en el uso de artefactos electrónicos (celulares, cámaras digitales, etc.) y de herramientas de comunicación (redes sociales, sistemas de mensajería, etc.). En esta situación el instructivo funciona como un sustituto mejorado del ensayo y error. Nuestra experiencia en este campo es alentadora y esta en desarrollo actualmente.

### **Referencias Bibliográficas**

- Azinian H. (1998). Capacitación docente para la aplicación de la información en el aula de geometría. Acta do IV Congresso Ibero-americano de Informática na Educação, Brasília.
- García Terán J., Lorenzana A., Magdaleno Martín J. (2003). *Método didáctico para el aprendizaje del uso del sistema de cálculo simbólico Maple*. Recuperado el 2 de junio de 2010 de <http://www.upc.edu/euetib/xiicuiet/comunicaciones/din/comunicacions/103.pdf>
- González C., Caraballo, H., (2002). Curso de introducción al software matemático. X EMCI (Enseñanza de la Matemática en Carreras de Ingeniería). Universidad Nacional del Nordeste. Resistencia.
- Rodríguez Riotorto M. (2008) *Primeros pasos en Maxima*. Recuperado el 20 de mayo de 2010 de <http://www.telefonica.net/web2/biomates/maxima/max.pdf>
- Santos Trigo L. (2001). Potencial didáctico del software dinámico en el aprendizaje de las matemáticas. *Avance y Perspectiva* 20, 247 - 258