LOS POLINOMIOS, UNA APROXIMACIÓN A TRAVÉS DE LIBROS DE TEXTO

Silvia Caronía, Graciela Sklepek, Edith Abildgaard, Norma Martyniuk
Nora Verdún, Marta Rivero, Roxana Operuk, Jorge Manzur
Facultad de Ciencias Exactas Químicas y Naturales. Universidad Nacional de Misiones
Instituto Posadas 0403. Argentina
silvca2@gmail.com; sklepekg@arnet.com.ar
Nivel Medio

Resumen
El presente trabajo se enmarca dentro de la teoría antropológica didáctica, observando en algunos libros de textos del nivel secundario la organización matemática que presentan los autores respecto a los polinomios.
Respecto a la definición, se analiza su tratamiento, en qué contexto aparecen, si lo desarrollado por el autor permite la resolución de los ejercicios propuestos, qué significado se le atribuye al símbolo “x”.
Palabras clave: Polinomios – organización matemática

Introducción
Polinomios es un contenido tradicional de la escuela secundaria, que ha sido considerado durante un largo período en los distintos Diseños Curriculares como en los libros de texto, además de ser requerido en los exámenes de ingreso a la Educación Superior.
Investigadores como Chevallard, Bosch y Gascón (1997), Bolea, Bosch y Gascón (2004) dan cuenta de las dificultades en la enseñanza y aprendizaje de este concepto, en los distintos niveles del sistema educativo. Otros como Quintero, Ruiz y Terán (2005) manifiestan que se genera cierta incertidumbre en los docentes, frente al desconocimiento de las razones de ser de ciertos conocimientos a ser enseñados como ser los polinomios.
Preocupados por esta problemática y con el fin de contribuir a la búsqueda de respuestas, en el año 2009 se inició un proyecto de investigación en didáctica de la matemática referida al objeto “polinomio”, siendo uno de los objetivos, develar las razones de ser en la institución secundaria.
En un primer avance desde el aspecto Epistemológico e Histórico se evidenció que los polinomios aparecen de manera implícita en la resolución de ecuaciones desde la antigüedad, su expresión formal tiene raíces en el álgebra abstracta mucho tiempo después (siglo XVII). Dicha expresión formal, teniendo en cuenta las características de los exponentes, permite distinguirlos como expresiones algebraicas particulares que son elementos de un anillo, lo cual conlleva a establecer una analogía con los números enteros.
Desde los Diseños Curriculares se observa que:
En los Contenidos Básicos Comunes (CBC) del nivel polimodal, se propone el tratamiento de funciones polinómicas en una variable, su operatoria y ecuaciones. No se menciona a los polinomios.
En los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios (NAP) aparecen las funciones (lineales y cuadráticas), ecuaciones y expresiones algebraicas. No se mencionan a los polinomios y funciones polinómicas.
En los Contenidos Básicos Comunes de la Secundaria Obligatoria de la provincia de Misiones (CBCSO) del año 2010, los contenidos se mencionan ordenados de la siguiente forma: en 1º año funciones y ecuaciones lineales (no aparecen los términos polinomio y función polinómica), en 2º año expresiones algebraicas y polinomios, con la acotación de

que este último concepto: "*se debe realizar un trabajo sencillo de ecuaciones lo que implica una suma de monomios o el trabajo con las expresiones polinómicas de segundo grado"*, después mencionan funciones y por último ecuaciones. La acotación mencionada inferimos, circunscribe el tratamiento que se debe realizar en estos años sobre polinomios.
Por otra parte, el rastreo histórico permitió evidenciar como se representaba y nombraba a lo que hoy simbolizamos como "x", además de los diferentes significados atribuidos. En tal sentido investigaciones actuales como la de Quintero y otros (2005), la consideran como "indeterminada" "variable" e "incógnita", según se use en polinomios, función polinómica o ecuación polinómica respectivamente; en tanto en Ursini y Trigueros (1998) la "x" es considerada como "variable" y de acuerdo al tema en que participe se menciona como: "variable como incógnita", "variable en relación funcional" o "variable como número general".
En esta presentación hacemos referencia al análisis del "saber a enseñar" en libros de texto de nivel secundario, que forma parte de un segundo avance de la investigación. Respecto al significado de la "x" que realizamos se tiene en cuenta el adoptado por Quintero y otros (2005).
Al adentrarnos en el estudio matemático de los polinomios, se consideró necesario ampliar la mirada hacia otros conocimientos como ecuaciones y funciones polinómicas, por cuanto, nuestro objeto primitivo, está estrechamente vinculado a los mismos, en el ámbito de la institución escolar.

Metodología

El presente trabajo se enmarca dentro de la teoría antropológica didáctica, observando en algunos libros de textos del nivel secundario la organización matemática que presentan los autores respecto a los polinomios.
Con relación a la definición, se analiza su tratamiento, en qué contexto aparecen, si lo desarrollado por el autor permite la resolución de los ejercicios propuestos, tratamiento y denominación que se otorga al símbolo "x".
Teniendo en cuenta lo que manifieste el autor referente a, para qué sirven los polinomios, funciones polinómicas al inicio del capítulo, lo que efectivamente desarrolle y proponga en las actividades que serán resueltas con lo desarrollado, se evidenciará las posibles "razones de ser" de los contenidos mencionados.
En esta presentación se identifican con "ausencias" a los temas que el autor deja a cargo del lector o están en forma implícita, y con "comentarios" las cuestiones que se han observado en el análisis.
Los instrumentos utilizados fueron: "libros de textos" correspondientes al tercer año del nivel secundario y al 2º año del Polimodal.

¿Por qué analizar libros de texto?

Analizar libros de texto, contribuye a aproximarse a la idea de una parte del funcionamiento del sistema educativo en relación con un conocimiento en particular, en este caso: los polinomios. Se puede indagar ¿cómo son planteados estos conceptos?, ¿cuál es el orden y qué cuestiones de cada tema encaran los diferentes autores? ¿Cuál es el significado que asignan a cada contenido? ¿Cuál es la razón de ser que dan los autores a estos conceptos? ¿Cuál es la finalidad de plantear tal o cuál actividad, a qué apunta?.

Se considera que los libros de textos son las interpretaciones y traducciones del autor con respecto a los Diseños Curriculares y orientaciones didácticas, son parte del resultado de una Transposición Didáctica.
Para la selección de los textos se tomó como criterio escoger aquellos que permitieran una exploración más fecunda en el análisis de la praxeología presentada por cada autor desde la TAD (Teoría Antropológica de lo Didáctico), considerando prescindible identificar sus títulos y autores, se los mencionan asignándoles un número.
Para el presente trabajo fue necesario realizar un recorte y considerar solo algunos de los conceptos relacionados con los polinomios.

Marco Teórico

La *teoría de la transposición didáctica* de Yves Chevallard, básicamente enuncia que, los contenidos o conocimientos que se enseñan en la escuela no son generados en ella ni para ella, sino en otros sitios (o instituciones) de la sociedad (noosfera) y que "se lleva o transpone a la escuela por necesidades sociales de educación y difusión" (Bosch y Gascón, 2007, p. 2)**.** Es en este lugar donde se impone una serie de condiciones y restricciones sobre el tipo de enseñanza de un determinado conocimiento en la institución escolar, el por qué de la inclusión a enseñar en la escuela, en que contextos y problemáticas se inscribe, la importancia dentro de la currícula, los fundamentos de la permanencia de los mismos en los dispositivos curriculares, las propuestas de libros de texto. La limitación se presenta cuando el trabajo transpositivo no es capaz de sostener o de recrear alguna posible *razón de ser* para el conocimiento que se desea que la escuela transmita.
Como consecuencia del desarrollo de la transposición didáctica surge la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1992). La misma se inscribe dentro del marco general de la didáctica fundamental, y propugna, "que la actividad matemática debe ser considerada (esto es, modelizada) como una actividad humana en lugar de considerarla únicamente como la construcción de un sistema de conceptos, como la utilización de un lenguaje o como un proceso cognitivo." (Gascón, 1998, p.11)
La *Praxeología Matemática u Organización Matemática* es la herramienta que permite modelizar en detalle las actividades matemáticas. Sus componentes fundamentales son por un lado: las *Tareas*, que son las cuestiones problemáticas presentadas y las *Técnicas* que, son una manera de realizar dichas *Tareas*, ambas conforman el bloque de la "*praxis".* Y por otro lado la *Tecnología*, que es el discurso racional sobre la *Técnica* y la *Teoría que* es el argumento formal que justifica en última instancia a la *Tecnología*, ambas conforman el bloque del *"logos".* (Chevallard y otros, 1997, p. 123)

¿Cómo presentan los autores a los polinomios?

En los libros analizados, los polinomios aparecen dentro del capítulo "funciones polinómicas" y son tratados desde distintas perspectivas según el autor:

- ✓ En el libro 1 (1998) de forma explícita, como modelo de la función polinómica
- ✓ En el libro 2 (2006) de forma implícita, como herramienta para graficar funciones
- ✓ En el libro 3 (2005) como sinónimo de las funciones polinómicas.

Libro 1

En un capítulo previo, el autor comienza con el concepto de función, dominio e imagen. Luego presenta la lectura e interpretación de gráficos a través de la observación de los mismos.

En el capítulo siguiente, bajo el título de funciones polinómicas, en la portada, el autor las introduce como medios para resolver problemas de la vida cotidiana, relacionados con el espacio, velocidad y tiempo. Lo que observamos, podrían ser resueltos desde la aritmética sin necesidad del estudio de las funciones polinómicas.
El autor plantea:

> *"Supongamos que estamos conduciendo un automóvil por una ruta y que el velocímetro indica constantemente 90Km/h.*
> *¿Cuántos kilómetros habremos recorrido en 1 minuto?*
> *¿Cuántos kilómetros habremos recorrido en 2 minutos?*
> *¿Cuántos kilómetros habremos recorrido en x minutos?"*

De cada problema presentado obtiene la fórmula correspondiente, luego generaliza bajo las expresiones de funciones lineales y cuadráticas.
Se puede observar que los polinomios aparecen a través de las funciones polinómicas, cuando el autor manifiesta que sus expresiones formales *responden a un "modelo cuyo segundo miembro es del tipo:* $a+bx^1+cx^2+dx^3+ex^4+...$ y lo identifica como "polinomio". Luego hace referencia a las características de los elementos que intervienen en el *modelo*: a, b, c,… son coeficientes *(nº reales), a ("que no está multiplicado por ninguna potencia de x")* se llama término independiente*, x es una indeterminada. "Los exponentes de la indeterminada son siempre números naturales"*. Concluye: *"A la función cuya fórmula es un polinomio, se las llama funciones Polinómicas".*
Con lo desarrollado hasta el momento, el autor propone bajo el subtítulo "manos a la obra" la siguiente actividad:

¿Cuáles de las expresiones siguientes son polinomios?
$a)\ \ 2+x^5 \qquad b)\ x+1 \qquad c)\ 3 \qquad d)\ \dfrac{1}{x} \qquad e)\ 1+x^{-2} \qquad f)\ x$

En función a la propuesta del autor y teniendo en cuenta el marco teórico adoptado, se señalan algunos de los elementos que conforman la praxeología.
Tarea: Identificar en cada expresión, aquellos que son polinomios
Técnica: Observar y analizar las expresiones término a término si cumple que:
- posee una indeterminada "x"
- el exponente de la misma sea un número natural
- que los coeficientes sean números reales.
- que el coeficiente multiplica a la indeterminada (no está explicitado por el autor).

Ejercicio a) Se compara término a término al modelo del polinomio dado. Se encuentra que el coeficiente a vale 2, los coeficientes b, c, d, e son iguales a cero y el coeficiente f es 1. El exponente de la indeterminada es un número natural. Por lo tanto la expresión es un Polinomio.
Ejercicio b) corresponde a un polinomio. El análisis es similar al ítem a). La diferencia entre ambas expresiones radica en el orden de los términos, una se encuentra en forma creciente y la otra en forma decreciente.
Ejercicio c) es un polinomio, porque responde al modelo, los coeficientes b, c, d son ceros y a vale 3
Ejercicio d) no es polinomio porque la x no multiplica al coeficiente sino que lo divide.
Tecnología: La definición de polinomios dada por el autor.

Ausencias
- Los polinomios pueden ser completos o incompletos

- No es necesario que el polinomio siempre esté ordenado de una misma manera, puede estar en forma creciente o decreciente, e incluso desordenado.

Comentarios

Con respecto a las características de los elementos que intervienen en el *modelo*, el autor define al término independiente con **a** *"que no está multiplicada por ninguna potencia de x"*. Esto nos lleva a preguntarnos cuál es el significado que otorga a "*ninguna potencia de x",* suponemos que hace referencia a la no aparición de x, cosa que no es cierta, existe y su exponente vale cero.

Si se tiene en cuenta la expresión presentada $a + bx^1 + cx^2 + dx^3 + ex^4 + ...$ en la cual se visualizan puntos suspensivos, daría pie a pensar que un polinomio tiene infinitos términos.

Otra cuestión observada son los diferentes tratamientos que efectúa el autor de los polinomios. Para definirlo lo considera como "modelos" y para operar como "números reales". Esto último se evidencia cuando expresa*: "solo falta aclarar que trataremos a sus términos como si fueran números reales…".* Se piensa que esta asociación con los números reales obedecería a una necesidad de simplificar el estudio de los polinomios.

Considerar cada término "*como si fuera número real*" sería suponer que los polinomios tienen estructura de Cuerpo, y por ende existiría el inverso multiplicativo (la x podría tener exponente negativo), lo cual no es cierto. Los polinomios poseen estructura de Anillo.

La definición y características presentadas por el autor, en algunos casos no resultan suficiente, por ejemplo en el ejercicio d) puede existir cierta dificultad al tener la "indeterminada" en el denominador, ya que este caso no está contemplado explícitamente dentro de las características enunciadas.

Además las "ausencias" observadas en ciertas características de los polinomios: que esté completo o incompleto, ordenado o desordenado, podrían dificultar más tarde por ejemplo en la aplicación del algoritmo de la división.

Las razón de ser de los polinomios que se vislumbra en este texto al inicio del capítulo, sería como modelos de las funciones polinómicas, funciones que ayudarían a la resolución de cierto tipos de problemas.

Sin embargo, se pudo observar que los problemas presentados podrían ser resueltos desde la aritmética, sin el estudio de las funciones polinómicas. La razón de ser se desvanece, evidenciándose un tratamiento específico de las operaciones entre polinomios

¿Cuál es el significado de la "x" atribuido por el autor?

Si bien el autor aduce sobre la x como "indeterminada" al ejemplificarla con las magnitudes "tiempo" o "longitud", x toma distintos valores como: 1 minuto, 2 minutos, 12 cm, 15 cm, etc., lo que nos lleva a pensar en el concepto de variable y no de "indeterminada". Entendemos que para el autor ambos conceptos terminan siendo sinónimos, lo que se evidencia en la siguiente frase: *"la indeterminada x puede representar infinitas "cosas"".*

Libro 2

En el citado libro se hace un tratamiento de las funciones cuadráticas, habiendo el mismo autor trabajado con las funciones lineales y la introducción de las funciones cuadráticas en otro libro correspondiente a un nivel de escolaridad anterior.

Tras el desarrollo de las funciones cuadráticas, introduce las funciones polinómicas, centrándose en la representación gráfica de las mismas. Para ello, efectúa el análisis de las características que presentan: raíces, ordenada al origen, conjuntos de negatividad y de positividad, paridad, crecimiento. Con respecto a las raíces, resuelve ecuaciones polinómicas recurriendo a la factorización.

Los polinomios no aparecen como tema independiente, están en forma implícita dentro de las funciones polinómicas, esto se ve en la siguiente definición: *"se llama función polinómica a toda combinación de sumas y restas de funciones de fórmula f(x)= k. x^n , siendo n un número natural y K un número real". "El mayor exponente de la variable con $K \neq 0$ se llama grado de la función polinómica. La única función que no tiene grado es f(x)=0".*

Si bien el autor no explícita que las funciones polinómicas y polinomios, representan el mismo objeto matemático, algunos párrafos dejan entrever que los trata indistintamente. Por ejemplo, cuando hace referencia a encontrar las raíces, alude a funciones o polinomios usando la misma simbología. *"Si x=a es una raíz del polinomio f(x), si y solo sí f(x)=(x-a).g(x) donde g(x) es un polinomio". "Si f(x) y g(x) son dos funciones polinómicas…",*

El autor antes de comenzar el desarrollo del capítulo enuncia que:

> "*Así como las funciones lineales permiten describir proceso de crecimiento o decrecimiento uniforme, las funciones cuadráticas facilitan la modelización de fenómenos que pueden representarse mediante fórmulas con exponente naturales de la variable y su máximo exponente igual a dos". "Existe otro tipo de funciones que permiten estudiar situaciones cuyas fórmulas pueden incluir exponentes naturales de la variable superiores a dos. "El análisis de esta clase de funciones permite resolver diferentes situaciones".*

Estas apreciaciones estarían dejando ver el porqué del estudio de dicho contenido (la razón de ser). Sin embargo en lo trabajado a lo largo del capítulo se enfatiza la representación gráfica de las funciones polinómicas. Las situaciones planteadas son específicamente intramatemáticas.

¿Cuál es el significado de la "x" atribuido por el autor?

El autor no designa de manera particular a la "x", cuando trabaja puntualmente con las gráficas de las funciones polinómicas, inferimos que el significado atribuido a la "x" es como variable.

Libro 3

Comienza con situaciones problemáticas, que pueden ser representadas a través de fórmulas identificadas como funciones polinómicas, a las que explícitamente asocia con los polinomios cuando dice*:"un polinomio o función polinómica es una expresión de la forma P(x)=* $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0$*."*

A continuación define las características que tienen los mismos: coeficiente, coeficiente principal, término independiente, grado del polinomio, polinomio mónico y polinomio nulo. En un ejercicio propone:

Determinen cuáles de las siguientes expresiones son polinomios y cuáles no. En este último caso, expliquen por qué. En caso de que sí lo sean, determinen el grado, el coeficiente principal y el término independiente.

$a)\ Q(x) = 9x + 8x^2 - 2$

$b)\ R(x) = 0$

$c)\ T(x) = -x + \frac{3}{x}$

$d)\ Z(x) = 3$

$e)\ W(x) = 8x^4 - 3x - 8x + \frac{1}{2}x^2 - 2$

$f)\ K(x) = x^4 - 3x - 8x^{-2}$

$g)\ M(x) = \sqrt{x}$

Tarea: Identificar en cada expresión, aquellos que son polinomios

Técnica: Observar cada expresión término a término y analizar si:

- cada término es un producto entre el coeficiente y x (no está explicitado por el autor)

- los coeficientes son números reales
- el exponente de la variable es un número natural o cero

Teniendo en cuenta esta técnica, es posible concluir que algunas de las expresiones dadas no son polinomios, como ser: c) T(x) por que el segundo término no es un producto entre el coeficiente y la variable x, ya que esta última aparece como denominador. f) K(x) por que en el tercer término x posee un exponente negativo y g) M(x) porque la variable está dentro de una raíz cuadrada, lo que equivale a un exponente fraccionario: 1/2.
En las expresiones que sí son polinomios, es posible identificar su grado y coeficiente principal considerando el término donde x tiene su mayor exponente, y el término independiente con el término a_0.
Tecnología: La definición de polinomios dada por el autor.

Ausencias

- Los polinomios pueden ser completos o incompletos, el autor da ejemplos de polinomio incompleto, pero no realiza comentario al respecto.
- No es necesario que el polinomio siempre esté ordenado de una misma manera, puede estar en forma creciente o decreciente.

Comentarios

La definición y características presentadas por el autor, en algunos casos no resultan suficiente, por ejemplo en el ejercicio c) puede presentarse cierta dificultad al tener la "variable" en el denominador, y en el g) la x está como radicando.
Además las "ausencias" observadas en ciertas características de los polinomios: que esté completo o incompleto, ordenado o desordenado, podrían dificultar más tarde por ejemplo en la aplicación del algoritmo de la división.
Al comienzo del capítulo el autor expresa: "*las funciones polinómicas son una buena herramienta para encontrar expresiones del tipo $v(x)=x^3$ utilizando solo las operaciones matemática básicas: suma y multiplicación lo cual facilita la operatoria*". La razón de ser de este autor es relacionar las funciones polinómicas a modelos experimentales, lo que permitiría inferir conclusiones sin necesidad de realizar la experiencia. Sin embargo en el desarrollo posterior no se evidencia lo manifestado. Su tratamiento se centra en el estudio de los polinomios y su operatoria.

¿Cuál es el significado de la "x" atribuido por el autor?

El autor no designa de manera particular a la "x". Suponemos que al considerar a los polinomios y funciones polinómicas como sinónimos estaría usándola como "variable". Sin embargo cuando desarrolla la operatoria el tratamiento efectuado es de "indeterminada"

Conclusión

Según los textos analizados los polinomios son definidos de forma explícita como modelos de las funciones polinómicas o como sinónimos de ellas, o aparecen en forma implícita como herramientas para trabajar con las funciones.
De acuerdo a la presentación de los autores se puede interpretar el para qué del contenido matemático según el tratamiento que se realice del mismo. Entendemos que la verdadera razón de ser en general, de lo analizado en los libros de texto, no coincide con lo enunciado al inicio de los capítulos.
Ninguno de los autores considerados propone más de una situación que pueda describirse con una misma función polinómica, en todos los casos el "modelo" encontrado, responde a una única situación. La riqueza de contar con un "modelo" permitiría describir diferentes situaciones que pertenecen a un mismo tipo de problemas.

Ante la no especificación de determinadas características acerca de los polinomios como ser: que esté completo o incompleto, ordenado o desordenado, podrían presentarse dificultades en la enseñanza de las operatorias de las mismas.
Utilizar polinomio como sinónimo de función polinómica (libro 3), podría obstaculizar el tratamiento de la operatoria (suma, resta, multiplicación) de las funciones polinómicas, quedando reducida únicamente a su expresión algebraica, excluyendo otro aspecto de las mismas como ser la gráfica.
Otra problemática que se presentaría en este mismo texto, sería en la división. Siempre es posible dividir dos polinomios, en cambio no ocurre lo mismo con la división entre funciones polinómicas, en las que será necesario excluir los valores que anulen al divisor. Según la definición dada por el autor, se podría decir por ejemplo, el cociente entre $f(x)=x^2$ y $g(x)=x$, siempre es factible, lo que conduciría a un error conceptual en el caso de las funciones.
En su tratamiento la "x" cumple un rol indistinto, se la considera como "variable", más allá de que al hacer referencia a la misma, la designen como "indeterminada" o "variable".
Con respecto a los dispositivos curriculares se pudo observar que la inclusión de los Polinomios difiere en los mismos. En los N.A.P. y en los C.B.C. del nivel Polimodal, no son mencionados en forma explícita. En cambio en los C.B.C.S.O de la Provincia de Misiones aparecen los polinomios pero en forma acotada.
Para finalizar consideramos que, conocer el significado de un contenido, cuáles son sus razones de ser, qué problemas resuelve, cuáles son sus limitaciones, nos permitirá estudiar en un futuro, la enseñanza y aprendizaje de este contenido en el aula.

Referencias Bibliográficas

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (2004). ¿Por qué la modelización está ausente de la enseñanza del álgebra escolar?. *Quaderni di Recerca in Didattica*, *14*, 125-133.

Bosch, M., Gascón, J. (2007). *"25 años de transposición didáctica".* En Ruiz-Higueras, L.; Estepa, A., García, F.J. (Eds). Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la teoría Antropológica de la Didáctica. (385- 406). Jaén: Servicio de publicaciones de la Universidad de Jaén.

Chevallard Y., Bosch M. y Gascón J. (1997). *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* Barcelona: Horsori.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques 12* (1), 73–112.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de la matemática como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *18(*52), 7–33.

Quintero, R.; Ruiz D. y Terán, R. (2005). Sobre las interpretaciones del símbolo "x" en los Polinomios. *Revista Educere Investigación arbitrada*. 10,(33), 315-326.

Ursini, S. y Trigueros M. (1998). *Dificultades de los estudiantes universitarios frente al concepto de variable.* Investigación y Experiencias Didácticas. Departamento de Matemática Itam. México.