NÚMEROS COMPLEJOS. ANÁLISIS DE ERRORES DESDE LA TEORÍA DE REGISTROS SEMIÓTICOS

Andino G., Baracco M., Carranza M., Miró S., Muratona S., Quiroga Villegas F.
Facultad de Ingeniería y Ciencias Económico Sociales, Universidad Nacional de San Luis
Argentina
mbaracco@fices.unsl.edu.ar, mnbaracco@yahoo.com.ar
Nivel Universitario

Resumen

En el presente trabajo se realizó un análisis de las dificultades que presentaron alumnos que cursan 1° año de Ingeniería en la Facultad de Ingeniería y Ciencias Económico-Sociales de la Universidad Nacional de San Luis, al resolver actividades de un examen parcial con números complejos. La necesidad de este estudio surgió de la observación de los errores cometidos durante las clases prácticas de la asignatura Algebra I correspondiente al primer cuatrimestre del año 2010. El análisis de los errores se realizó dentro del marco teórico de Duval "Teoría de Registros Semióticos". Los resultados mostraron que la mayoría de los alumnos no asociaron el registro analítico con el registro gráfico de los números complejos.

Palabras clave: Complejos – Error – Registro - Semiotico

Introducción

La Teoría de números complejos tiene aplicación no sólo en expresiones de matemática pura sino también para explicar situaciones de la vida cotidiana, por ejemplo: las relaciones de impedancias en un circuito de corriente alterna, en la función de onda de la mecánica cuántica o en cualquier expresión de naturaleza ondulatoria o periódica.

El principio en el conocimiento de los números complejos se encuentra en la obra de Girolamo Cardano, un italiano que vivió entre 1501 y 1576, quien escribió un importante e influyente tratado de álgebra llamado el "Ars Magna" en 1545. En el estudio de las soluciones de una ecuación cúbica, basado en parte en la obra previa de Scipione del Ferro y de Tartaglia, se percató de que en cierto paso se veía obligado a tomar la raíz cuadrada de un número negativo. Aunque esto era un enigma para él, se dio cuenta de que si se permitía tomar esa raíz cuadrada, y sólo entonces, podía expresar la respuesta completa, que finalmente siempre era real. Más tarde, en 1572, Raphael Bombelli, en una obra titulada "L' Algebra", extendió el trabajo de Cardano. René Descartes (1596-1650) en 1637 en su libro "La Géometrie" afirmó que una ecuación de grado "n" tiene "n" raíces y que éstas pueden ser imaginarias o reales.

Estos números imaginarios no fueron incorporados en ese momento al campo de las matemáticas. Recién en el año 1777 el suizo Leonhard Euler (1707-1783) introdujo el símbolo i para $\sqrt{-1}$, operó con él como si $i^2=-1$ e introdujo la notación $(a+bi)$; demostrando además que el conjunto de números de esa forma era cerrado para las cuatro operaciones básicas, así como para la potenciación y radicación (Galán J y col. 2002).

Se han encontrado otras muchas propiedades que poseen estos números en combinación con los reales (números complejos) utilizadas para resolver situaciones reales; tales como la fórmula integral de Cauchy, el teorema de la aplicación de Riemann o la propiedad de extensión de Lewy.

Marco Teórico

El significado de representación semiótica se refiere al empleo de signos, que cobran significado y sirven para la actividad cognitiva dentro de un determinado sistema. Una fórmula matemática, una gráfica, una tabla, la lengua materna, constituyen ejemplos de representaciones semióticas. Para la mejor enseñanza de los temas matemáticos, es esencial movilizar varios registros (figuras, gráficas, tablas, fórmulas matemáticas) y en lo posible descartar el tratamiento de los temas en forma uniregistral. (Gatica N, Ares.O, Miró. S, 2003)

La teoría de "sistemas semióticos de representación" (Duval R., 1998) afirma que la aprehensión de un objeto matemático es una aprehensión conceptual y la actividad sobre los objetos matemáticos es sólo por medio de representaciones semióticas. Es por ello que Duval expresa: "Si se llama semiosis a la aprehensión o a la producción de una representación semiótica, y noesis a la aprehensión conceptual de un objeto, es necesario afirmar que la noesis es inseparable de la semiosis" por este motivo cobra importancia la coordinación entre registros.

El enseñar un tema en varios registros, facilita el abordaje de un concepto y permite no confundir el objeto matemático con su representación. Por ejemplo, geométricamente la recta constituye un objeto y su ecuación matemática la representación.

Tipos De Registros Para Representación De Números Complejos

Para representar números complejos, podemos decir que existen dos registros: el algebraico y el geométrico. (Grossman, 1996)

Registro algebraico

Forma de par ordenado: $Z= (x, y)$.Donde "x" representa la parte real del complejo e "y" la parte imaginaria

Forma binómica: $Z= x + y\, i$. Donde, al igual que en el par ordenado, "x" representa la parte real del complejo e "y" la parte imaginaria. La parte imaginaria se encuentra como factor de la unidad imaginaria "i"

Forma polar: $Z = r (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, que en forma abreviada puede escribirse como $Z = r \operatorname{cis} \theta$. Donde r (módulo) es la distancia entre el punto que representa a Z y el origen de coordenadas, θ (argumento) es el ángulo que forma el eje real positivo con el segmento r que une al punto Z y el origen de coordenadas.

Al identificar las partes real e imaginaria se pueden encontrar fácilmente las ecuaciones de transformación entre coordenadas polares y cartesianas.

Formas de Steiner: $Z = r\angle\theta$. Notación utilizada en ingeniería. El significado de r y de θ es el mismo que el de la forma polar.

Forma Exponencial: $Z= r\, e^{i\theta}$ Utilizada en Análisis del campo de los Números Complejo.

Registro Geométrico

La representación geométrica de los números complejos mediante puntos en el plano fue propuesta por Gauss en 1779 pero fue Argand en 1806 quien ideo una forma de representarlos más adecuada. Es por ello que al Plano complejo se lo conoce como Plano de Argand o de Gauss- Argand.

Sistema de coordenadas cartesianas: En la Figura 1 se representa al número complejo Z mediante un punto en el plano complejo, de coordenadas (x, y)

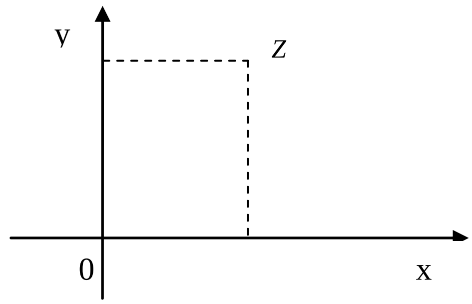

Figura 1. Sistema de representación

Sistema Polar :En la Figura 2 se representa un número complejo Z como un punto del plano complejo determinado mediante las coordenadas polares (r, θ), donde la parte real del complejo es $r\cos\theta$ y la parte imaginaria es $r\sin\theta$

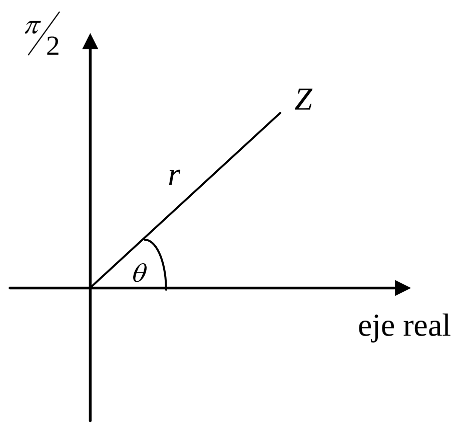

Figura 2. Sistema de representación polar

Forma de Riemman (Esfera de Riemman): En la Figura 3 se muestra la representación de un numero complejo Z con la forma Riemann. En lugar de utilizar puntos de un plano, pueden usarse puntos sobre superficies. Riemman encontró que la esfera es una superficie útil para representarlos.

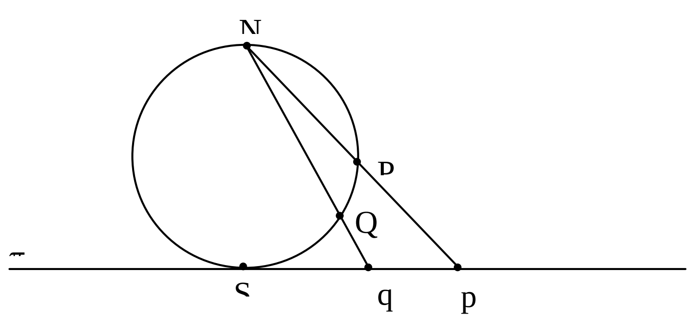

Figura 3. Sistema de representación con la forma de Riemann

Los puntos de la esfera son proyectados desde el polo norte sobre el plano tangente que pasa por el polo sur y así, cada punto del plano corresponde a un punto de la esfera, con la excepción del mismo Polo Norte, esta correspondencia se denomina Proyección estereográfica. La proyección estereográfica, sin el Polo Norte, representa el plano finito; si le adjuntamos el Polo Norte obtenemos la representación del plano extendido.

Registros utilizados en la enseñanza
En el curso de Algebra I se utilizan todos los registros algebraicos antes mencionados. En cuanto a los registros geométricos se utilizan las representaciones Cartesiana y Polar.

Objetivos y Metodología
Se analizaron 100 evaluaciones parciales de alumnos del curso Algebra I cuyo programa contiene una unidad dedicada al estudio de Números Complejos, su representación y operaciones.
Los alumnos que realizaron estas actividades fueron entrenados en el tema abordado en las clases prácticas de la asignatura. En estas actividades áulicas contaban con material de estudio de la teoría de números complejos y ejercitación en los diferentes tópicos, por lo que era de esperar que su desempeño fuera adecuado.
Con el propósito de analizar los errores que se ponen de manifiesto en el momento de evaluar a los alumnos, en los distintos registros de representación semiótica de los números complejos, se presentaron dos ejercicios cuya resolución involucra la realización de las operaciones de producto, cociente, potenciación y radicación de números complejos.
Los objetivos de las actividades propuestas fueron:

- Conocer si el alumno se ha apropiado del concepto de número complejo
- Conocer si el alumno comprende que un número complejo tiene diferentes representaciones y que su correspondencia es biunívoca.
- Conocer si el alumno es capaz de elegir entre los diferentes formas del registro algebraico en forma adecuada dependiendo de la operación que debe resolver

Ejercicios propuestos
Resolver la siguiente expresión $\dfrac{(-2-2i)^4 e^{-\pi i}}{cis(\pi)}$

Este ejercicio se presentó con la finalidad de conocer si el alumno es capaz de:
Reconocer que las operaciones de potenciación, producto y cociente entre números complejos son sencillas de resolver cuando los números involucrados están expresados en forma polar o en forma exponencial.
Realizar las transformaciones de las formas binómica y exponencial compleja a forma polar
Realizar las operaciones correspondientes

Calcular la siguiente raíz del numero complejo Z = $\sqrt[4]{-i}$

Este ejercicio se presentó con la finalidad de conocer si el alumno es capaz de:
Reconocer que la operación de radicación de un numero complejo es sencilla de resolver cuando el número involucrado esta expresado en forma polar
Realizar las transformaciones de la forma binómica a forma polar

Realizar la operación correspondiente
Representar geométricamente las raíces obtenidas en el plano complejo

Análisis de las respuestas
Del total de evaluaciones observadas el 22% no presentaron errores de ningún tipo, en el 78% restante se hallaron diversos tipos de errores que se clasificaron como sigue:
1) Errores en Registro algebraico:
A- Error en la elección de la forma de expresar el número complejo para su posterior operación
B- Error en la transformación del número complejo de la forma binaria a la forma polar o exponencial (en el cálculo del módulo o del argumento)
C- Error en la transformación del número complejo de la forma exponencial compleja a la forma polar (error en el cálculo del módulo o del argumento)
D- Error en la operación de potenciación
E- Error en la operación de producto
F- Error en la operación de cociente
G- Error en la operación de radicación
2) Errores en Registro geométrico
H- Error en la representación de las raíces encontradas.
En la Figura 4 se muestra la frecuencia de los distintos errores

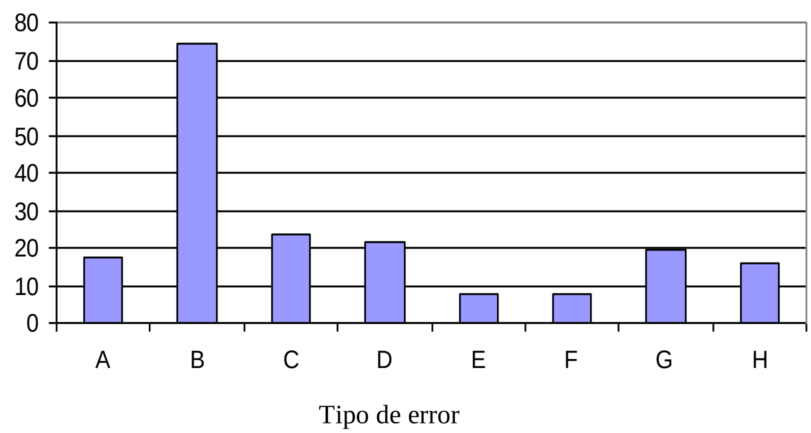

Figura 4: Frecuencia de los errores de registro en porcentaje

Conclusiones
En el presente trabajo se realizó un análisis sobre la resolución de 2 actividades que involucran operaciones con números complejos.
Los errores observados se clasificaron en 8 items; se evaluó la frecuencia de los mismos en forma porcentual. Los resultados muestran que el error más frecuente se presenta en la transformación de números complejos de forma binómica a forma polar, en general al realizar el calculo del argumento no relacionaron la ubicación del numero complejo en el plano cartesiano con su representación en el plano polar. El calculo erróneos del argumento o modulo llevaron a resultados inexactos a pesar de que las operaciones de potenciación, producto, cociente y radicación estuvieran realizadas correctamente. Es de

destacar, que aunque no se tuvo en cuenta en el recuento de errores, que algunos alumnos operaron con argumentos expresados en grados y radianes de manera indistinta, es decir que sumaron o restaron grados con radianes, también en algunos casos el argumento fue expresado fuera de su rango de definición en las operaciones intermedias de calculo o en los resultados finales.
Por lo expuesto antes concluimos que los alumnos no tuvieron en cuenta los diferentes registros de representación y sus relaciones, de forma que el registro algebraico de un número complejo podría tener varias representaciones en el registro geométrico.
Se concluye que para evitar la frecuencia en estos tipos de errores deberían hacerse hincapié en actividades sistemáticas para reforzar las habilidades que deben adquirir los alumnos para resolver operaciones con números complejos.

Referencias Bibliográficas

Duval R. (1998) “Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento”. Investigaciones en Matemática Educativa II, (pp. 173-201). México: Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav.

Galán J., Galán M, Padilla Y, Rodriguez P.(2002) “Utilización de la historia de la matemática en los estudios de ingeniería: una experiencia práctica”. Aportaciones de la didáctica de la matemática a diferentes perfiles profesionales (pp. 403-416). Cap 26. Universidad de Alicante (España).

Gatica N., Ares O., Miró S. (2003) “Concepciones de los estudiantes de los alumnos de 1° año de ingeniería sobre el concepto de número complejo usando diferentes registros de representación”, Memorias del 5to Simposio de Educación Matemática, Argentina.

Grossman, S. (1996). “Algebra Lineal”. México: Ed. Mc Graw Hill