# FUNCIONES Y MODELOS MATEMÁTICOS

Marta Bonacina, Alejandra Haidar, Claudia Teti
Dto de Matemática y Estadística - Fac. Cs. Bioq. y Farmacéuticas. U.N.R. Argentina
alejandrahaidar@yahoo.com.ar
Niveles Medio y Superior

**Resumen**
El presente trabajo tiene como primer objetivo desarrollar algunas reflexiones y una propuesta acerca de la enseñanza de la Matemática en general, atendiendo esencialmente a la necesidad de proponer un cambio en el sistema educativo a los efectos de posibilitar que el alumno acceda al tan ansiado aprendizaje significativo.
A este respecto cabe señalar que actualmente, y sin relegar el papel fundamental de la formación matemática en lo teórico-conceptual, los esfuerzos se desplazan hacia la aplicación de los métodos matemáticos en la resolución de problemas de las ciencias en general. Desde esta perspectiva, y dado que el desarrollo de la ciencia en sí misma puede entenderse como consecuencia de *la búsqueda de solución a los problemas que aquejan al hombre*, entendemos que proponer en nuestros cursos el planteo y resolución de *modelos matemáticos* constituye un medio efectivo para el aprendizaje de la matemática, particularmente para el aprendizaje *significativo* de esta ciencia.
Finalmente, el propósito es *aterrizar* en la propia disciplina estas consideraciones de carácter general y amplio; y esto, a través de un ejemplo concreto en el que implementamos la metodología propuesta. En el ejemplo contemplamos el desarrollo de un concepto que entendemos esencial tanto para la Matemática como para cualquier otra disciplina que acuda a los modelos matemáticos: el concepto de función, su valor instrumental en la descripción de relaciones entre distintas magnitudes. Se entiende que este concepto presenta características que lo ubican en una situación privilegiada respecto a la posibilidad de ser usado como *concepto fuerza* en la implementación del cambio pretendido.
<u>Palabras clave:</u> transformar, modelo matemático, resolución de problemas, funciones

## Introducción

Todos, como profesores, tenemos un propósito cada vez que *entramos a clase*, pero es importante reconocer no todos tenemos el mismo. Cabe entonces explicitar que nuestro propósito como docentes es: "la formación integral del estudiante, como profesional y como persona consciente del papel que puede y debe jugar tanto en su desarrollo individual como en el de su entorno". Nosotros pensamos que la Matemática puede ser una importante herramienta a los efectos de lograrlo. De lo que sí somos conscientes es que la concreción de este objetivo no es fácil ni simple, que requiere de una profunda *transformación* del sistema educativo en general; que la mejor forma de contribuir a ello es trabajar, desde donde se pueda y como se pueda, en tal sentido. Creemos que si lo que nos preocupa es *´formar´*, y no *´informar´*, una forma de imbuirnos de esta idea, darle fuerza, es por ejemplo, hablar de *proceso de transformación* en lugar de *proceso de aprendizaje*. Es decir, creemos que para *formar*, debemos *transformar*. Cada una de las áreas del conocimiento *induce* en quien la estudia, una manera, un modo, de *proceder* ante los problemas. La Matemática no escapa a ello; también induce un *modo* de analizar y resolver problemas. Más aún, creemos que este fenómeno no depende sólo del área de que se trate, la *´visión de profesor´* al respecto es otro factor que contribuye en forma esencial al mismo. Esta *visión*, que no es infalible ni cubre todas las opciones posibles, influye en los procesos que el

estudiante aprehende, los *sobredetermina*. De ello resulta razonable pensar que para *cambiar un sistema* debamos comenzar por *transformar* aquellos modos de proceder y actuar que, a nuestro juicio resultan obturantes del aprendizaje.
A través del trabajo en distintos proyectos de investigación en educación matemática, que desarrollamos en los últimos años, nos preguntarnos cómo, de qué modo, podemos aportar desde la Matemática al *proceso de transformación* que reconocemos como necesario para la formación integral del estudiante. Para responder a estos interrogantes nos planteamos tres cuestiones claves:

- Que la Matemática juega un rol cada vez más importante en el proceso de explicación y predicción que las ciencias hacen del mundo en general.
- Que en ningún momento debemos perder de vista que en la mayoría de estos procesos lo que la Matemática aporta es una *aproximación* racional al hecho (un *modelo*); no la *verdad* acerca del mismo.
- Que lo enriquecedor para el estudiante es *conocer* la forma en que tal aproximación se construye; el *proceso* del cual deriva un cierto resultado, más que el resultado en sí mismo.

Respecto al *proceso* de resolución de un problema, existen tres factores que influyen en el mismo y que por lo tanto tendrán que ser atendidos en nuestra planificación de clase: * La existencia de un ´método´. * La ´capacidad de abstraer´ *El ´sentido de la estética´. De estos tres factores es la capacidad de abstraer lo que diferencia a la Matemática de las otras ciencias. Es la Matemática la que propone la ´simplificación´ de los problemas, el traslado de los mismos al plano de lo abstracto o ideal. La Matemática *hoy*, a más del mundo de lo ideal y abstracto se ocupa también, y al igual que las otras ciencias, del mundo de lo real y concreto. Después de solucionar el problema en el mundo platónico de los objetos matemáticos, se debe regresar a la realidad y aplicar los resultados a una situación real, concreta.
Consideramos necesario transformar el modo de *´proceder en la resolución de problemas´*, *transformándolo*, a los efectos de viabilizar el surgimiento y predominio de la nueva concepción; entendida ésta como superadora de la anterior tanto en lo relativo a la determinación del carácter del conocimiento matemático en sí, como en cuanto a los aportes que desde ella se puede hacer a la formación integral del estudiante. Algunos de estos aportes son: *fomentar la apreciación crítica; potenciar el desarrollo del enfoque lógico y consistente necesario para el abordaje de ´problemas´, la detección de variables relevantes, así como también de las interrelaciones y dependencias existentes entre ellas*. En definitiva, hacer al desarrollo de capacidades referidas al manejo **efectivo** del conocimiento.
Resulta interesante señalar cómo, para dar fuerza a la idea que se pretende difundir, se acude a la modificación del vocabulario; así, en vez de hablar de ´capacidad de abstraer´, hoy día se habla de ´capacidad de modelar´.
Efectivamente, si por *MODELO* entendemos, "la expresión ***formal*** de las relaciones existentes entre entidades ***reales o abstractas*** definidas en términos matemáticos*";* vemos que el proceso de *modelización* utiliza la lógica y los procesos matemáticos incluso en el contexto de lo *real o concreto.* De allí entonces que la construcción y resolución de modelos matemáticos deje de ser un ejercicio puramente teórico, permita '*bajar a lo concreto*' y rescate para la Matemática un importante rol en el modelo de educación emergente. La modelización es un modo de resolución de problemas que ha crecido en los últimos 30 años; tanto en su rango de aplicación como en su complejidad. Dado que la

elaboración de modelos no es una rama de la matemática pura, referida *solamente* a la lógica deductiva aplicada a establecer relaciones entre entidades abstractas, entendemos que direccionar nuestro accionar hacia el desarrollo de la ´capacidad de modelar´, no refiere sólo a un aprendizaje significativo de la Matemática sino también a la posibilidad de desarrollar muchas de las capacidades señaladas como necesarias para inducir el cambio que la sociedad reclama. Tal como afirma Bassanezi (1990), el trabajo con modelaje matemático en la enseñanza permite, además de adquirir conocimiento matemático, el modificar la forma de pensar y actuar. Así se comprendería que: la Matemática sirve para explorar la realidad y resolver problemas de muy distinta naturaleza.
A continuación presentamos un esquema en el cual se resumen las capacidades que se potencian con la búsqueda de modelos matemáticos.

BÚSQUEDA DEL MODELO

requiere

CAPACIDAD DE ABSTRAER → para → DETECTAR
-Factores o hechos relevantes
- interrelaciones relevantes

CONFECCIÓN de un PLAN DE TRABAJO → para → desarrollar en forma óptima y organizada las actividades, con el uso de *MÉTODO*.

SENTIDO DE LA ESTÉTICA (criterio) → para → la elección de un método:
- CLARO y SIMPLE
- POTENTE
- EFECTIVO

**Propuesta de una experiencia**
A continuación presentamos un ejemplo sobre un tema puntual, FUNCIONES, a través del cual analizamos la puesta en práctica de la metodología propuesta. Comenzamos *planificando* la enseñanza del tema; reconociendo en esta etapa la necesidad de tratar en forma *integral* las tres instancias que abarca el acto educativo en el área matemática:

**1-** Formación del concepto **2-** Ejercitación y aplicación **3-** Evaluación

Acorde a esto decidimos la metodología de trabajo y proponemos la siguiente
**Estrategia**
**1**-*"formación de concepto":* Esta instancia requiere un cuidadoso análisis ya que existen distintas formas de presentar el concepto de función, y no cualquiera de ellas resulta adecuada a los objetivos propuestos.
El concepto se presenta teniendo en cuenta el origen del mismo, es decir para *plantear, pedir, producir o reproducir dependencias o conexiones* entre cantidades que se encuentran en una estrecha vinculación, de forma que cualquier variación de una, por pequeña que sea, implica una variación de la otra; y que ha permitido estudiar procesos que tienen lugar en la realidad objetiva. Así, introducir el concepto como herramienta apropiada para modelizar relaciones entre magnitudes es una opción que permite dar al mismo el sentido que se pretende.
**2**- *"ejercitación y aplicación"* Los objetivos perseguidos en esta instancia son:

alcanzar la *fijación* y *consolidación* del concepto → **2.1** .- *ejercitación*
alcanzar la *movilidad* del concepto → **2.2** .- *aplicación*

**2.1 .- EJERCITACIÓN**: Se entiende que esta etapa resulta muy importante en cuanto al logro del *dominio sistemático* de contenidos y destrezas. Tal dominio resulta fundamental a la hora de resolver problemas o entender conceptos, ya que permite descargar la atención de hechos secundarios y descubrir la esencia de los mismos, facilitando así el que surjan ideas. Consideramos que esta etapa no puede ser obviada, ni recortada; pero, y fundamentalmente, consideramos también que *no es la única* que debe darse en esta instancia.

**2.2 .- APLICACIÓN:** Para modelizar, debemos resolver problemas; luego el proceso de modelización permite trabajar con el alumno mostrándole las ventajas de *planear estrategias*, *realizar representaciones*, *controlar*, *confrontar*, etc.; de allí que esta instancia debería ser, en lo posible, la de mayor peso en esta etapa. Además esta es la instancia donde se posibilita el trabajo interdisciplinario a través de la presentación de situaciones problemáticas relativas a otras disciplinas. La elección del problema la hacemos según la ley de adecuación óptima:

- *no muy fácil* → no debe, por ejemplo, reducirse a aplicar una fórmula,
- *no muy difícil* → no debe ser tal que *paralice* al alumno,
- *no debe ser problema de control*.

Nuestra experiencia nos muestra que cuando se comienza a trabajar de esta manera, cualquier problema paraliza a los alumnos. Aquí es donde la actitud y aptitud del docente resulta crucial. El docente deberá *acercar* el problema al alumno, hacer que este se *sensibilice* ante el mismo y pueda así reconocerlo, aceptarlo y, consecuentemente, constituirse en generador activo de conocimiento e información y no en mero receptor y reproductor pasivo.

**3-** *"evaluación":* instrumento esencial para tomar las decisiones pedagógicas que corrijan el proceso educativo. Para ello la instrumentación de la misma debe responder a un doble propósito: dar cuenta del aprendizaje significativo, y como autoevaluación docente.

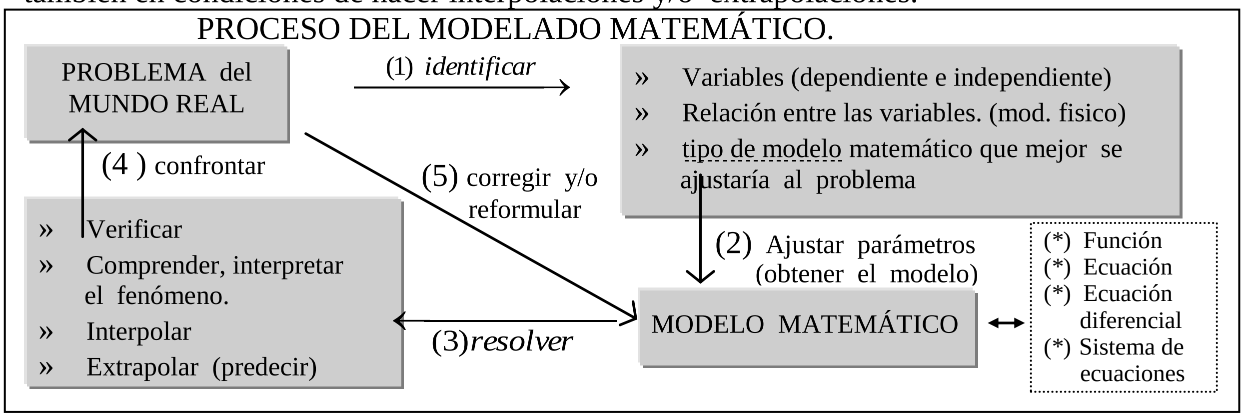
En lo que sigue mostramos como trabajamos en esta instancia, la de **aplicación.**

Comenzamos repasando algunas ideas y/o conceptos:

» *MODELOS MATEMÁTICOS. AJUSTE de CURVAS*

Recordamos que un modelo matemático es una descripción matemática (a menudo por medio de una función o de una ecuación) de un fenómeno del mundo real. Si repasamos ejemplos de obtención de modelos matemáticos vemos que existe cierta rutina, cierto método para trabajar; así vemos que como primer paso generalmente se procede a identificar las variables que intervienen en el fenómeno, el carácter de las mismas (dependiente o independiente). Luego, acudiendo a los conocimientos que se tengan, tanto del fenómeno en sí como de Matemática, se trabaja a los efectos de hallar una función (ecuación) que las relacione. A veces puede darse que ya exista una *ley* (física o de otra naturaleza) que ligue a las variables de alguna forma; en tal caso a través de una simple manipulación algebraica de la misma podremos obtener el modelo (función o ecuación) deseado. Pero no siempre tendremos a mano una ley previa que nos facilite el trabajo; o sea, no siempre resultará posible obtener *directamente* la expresión algebraica de la función modeladora. Se acude entonces al *modelo empírico*, modelo esencialmente sustentado en datos reunidos a través de una o más repeticiones experimentales del fenómeno en estudio. En este último caso una vez realizada la experiencia se analizan los resultados en busca de un patrón de comportamiento. Para facilitar esto los datos deben estar presentados de tal manera que las propiedades más sobresalientes queden al descubierto, sean fácilmente apreciables. Así:

- En una primera instancia se procede a la tabulación de los datos; o sea, a la representación de la función en forma numérica.
- Si de la representación numérica podemos pasar a la representación gráfica, nuestras probabilidades de hallar patrones de comportamiento crecerán en forma importante. Una gran cantidad de propiedades pueden ser leídas directamente de un gráfico. Además, en muchos casos la gráfica ´*sugiere*´ la ecuación adecuada; más aún, existen métodos perfectamente probados que, para cierto tipo de curvas, permiten obtener la ecuación que mejor la ´ajusta´; o sea la que mejor captura la tendencia básica de los puntos datos.
- Si de la representación gráfica podemos obtener la representación algebraica de la función estaremos sin dudas en condiciones óptimas de estudiar el fenómeno, incluso estaremos también en condiciones de hacer interpolaciones y/o extrapolaciones.




» *UN PROBLEMA TIPO:* ***comportamiento de un gas ideal***

(*) *Observación de un fenómeno natural: "***Si un gas se somete a cambios de temperatura, manteniendo constante la presión, se observa un cambio de volumen***"

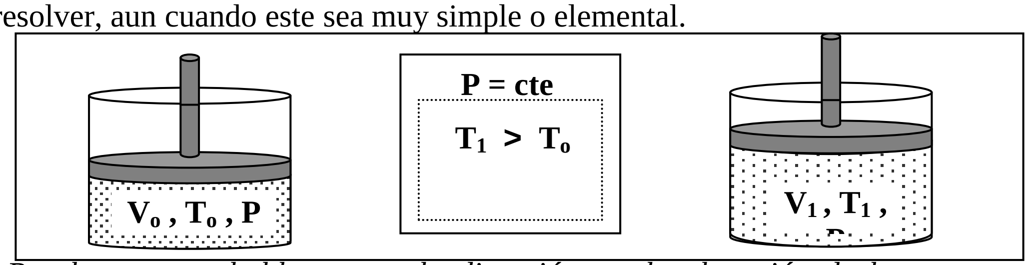
(*) *Problema:* ¿Podrá cuantificarse la dependencia *temperatura-volumen* en este caso? ¿Podrá hallarse una relación que ligue las variables de tal modo que se puedan *predecir* valores?

(*) *Resolución:*

**( I )** Proponemos un debate a partir de la palabra *cambio*, necesidad de precisar un *sentido* para los mismos (¿*aumento ó disminución*?); *variables* relacionadas con el problema, rol y relevancia de cada una de ellas, etc.; hasta arribar a la siguiente afirmación:

"***si P = cte entonces; aumento de temperatura implica aumento de volumen"***

**(II)** Insistimos en lo útil de acudir a un esquema o representación gráfica de la cuestión a resolver, aun cuando este sea muy simple o elemental.




*Resulta muy probable que en la discusión, en la obtención de la macroestructura, se pierda de vista el propio problema, resulta conveniente entonces realizar un control de proceso: ¿dónde estamos dentro de la estructura propuesta? ; ¿qué paso sigue? :*

- *encontramos el modelo físico (aumento de temperatura $\Rightarrow$ aumento de volumen)*
- *debemos buscar el modelo matemático (función que ligue temperatura y volumen*)

**(III)** Buscamos el modelo matemático: En este momento es cuando empiezan a surgir las cuestiones realmente importantes en relación a la Matemática; por ejemplo, aparece aquí un error muy común en relación a dos variables en las que el aumento de una determina el aumento de la otra: el alumno asocia automáticamente la relación hallada con una relación de directa proporcionalidad. Vemos así como la metodología propuesta permite detectar errores y trabajar en su eliminación.

Otra cuestión importante es lo relativo a la exactitud de los datos: experimentales vs. teóricos. Al alumno le cuesta entender que una cosa es el modelo matemático y otra la realidad; que el modelo propone una situación idealizada, que interpreta los hechos bajo ciertas simplificaciones.

*En este punto, es necesario realizar un control del proceso de enseñanza; decidir respecto del tratamiento del error en los datos experimentales; o sea, en cuanto a presentar el problema en toda su complejidad, o simplificar algunas facetas del mismo. Optamos por lo segundo, por entender que al comenzar con este tipo de trabajo esto sería lo más conveniente.*

Así, y de acuerdo a este análisis optamos por poner al alcance de los alumnos una serie de valores de temperatura y volumen y decirles que eran el resultado de mediciones realizadas en forma experimental (en realidad los valores fueron elegidos de forma tal que todos ellos se pudieran representar sobre una recta o muy próximos a ella; o sea, prácticamente descartamos errores de medición). A continuación discutimos acerca de la mejor forma de disponer los datos experimentales y concluimos la conveniencia de tabularlos;

| T (ºC) | 0 | 50 | 100 | 150 | 200 | 250 | 300 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V ($cm^3$) | 20.0 | 23.7 | 27.4 | 31.1 | 34.8 | 38.5 | 42.2 |

Una vez puesto en marcha el proceso intentamos que el alumno trabaje en forma independiente, tratamos de orientar y no conducir las actividades, permitiendo que el aporte máximo provenga del alumno, limitándonos a observar e intervenir cuando el rumbo sea demasiado inconveniente o cuando se llegue a un callejón sin salida. En este caso también la actitud debe ser orientadora, a través de preguntas que reordenen el trabajo. Por ejemplo:

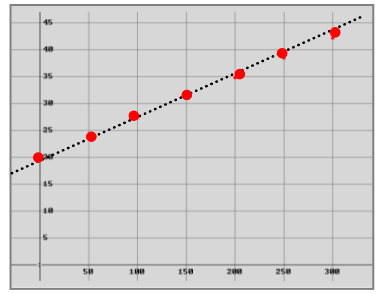
- ¿qué concepto matemático *"comprende"* la formulación informal del problema?, - ¿cómo pasamos de la tabla de valores a una fórmula algebraica que exprese la relación entre las variables?,- ¿siempre podremos pasar de la función tabular a un fórmula algebraica?,- ¿cuál es el rol de cada magnitud variable? , etc.

La respuesta a la primera pregunta permite evaluar si el alumno logró asimilar el concepto de *función*; si así fuera tiene que poder detectar rápidamente que en el fenómeno en estudio subyace el concepto matemático de función. Si el alumno es capaz de reconocer esto, el problema es un problema *motivador*. Si no puede hacer esto el problema está muy lejos de él y se generan otras situaciones distintas de las que se deseaba provocar.

Admitiendo que el alumno reconoce el concepto de función en la formulación hecha, su atención puede ahora centrarse en el nudo del problema: hallar la *ley de la función* que relaciona las variables (el modelo matemático para un gas ideal).

*Se insiste en la importancia de que el alumno registre estas preguntas, que entienda que lo que en realidad estamos haciendo es pensar en voz alta.* Estas órdenes secretas que los docentes nos damos al tratar de resolver un problema facilitan la adquisición, en el alumno,

de un *lenguaje interior (Meichembaum; 1977),* constituyendo el vehículo que conforma las estructuras cognitivas.
Los alumnos responden las preguntas y desarrollan las actividades que van surgiendo:




- grafican los puntos de la TABLA en un sistema coordenado.
- del gráfico obtenido *leen* que: *los puntos se disponen sobre una recta*
- reconocen el *tipo* de función que este hecho caracteriza*: FUNCIÓN LINEAL.*
- recuerdan la ecuación de la función lineal, **y = m x + h** ;

Este punto es crucial en cuanto a verificar si el concepto de función, de *variable independiente* y *variable dependiente* que el mismo comprende, ha sido realmente *internalizado, asimilado* por el alumno. Es decir, si puede relacionar las variables abstractas (*x* e *y*) de la formulación *ideal* de la función lineal, con las variables concretas de su problema (T y V). Este paso (*elemental* cuando el concepto ha sido comprendido en forma cabal); no resulta, en general, fácil ni obvio para el alumno promedio. Existe un *obstáculo* que evidentemente les dificulta *bajar* del mundo de lo abstracto e ideal al mundo de lo concreto y real. Así, el alumno no sólo tendría el tradicional problema de *abstraer,* de *quitar sustancia a los objetos reales*, sino que también tendría el problema inverso, el de *dar sustancia a los contenidos abstractos*. Y si bien es entendible la dificultad para formalizar o abstraer, la reversa de ello no parece ser un hecho que debiera presentar dificultades. Creemos que si las presenta, este hecho no es otra cosa que la *señal* de que el nuevo conocimiento no ha sido incorporado *efectivamente* a la estructura cognitiva; en definitiva, la señal de que el aprendizaje no se ha producido.
Finalmente el alumno procede a *traducir* el fenómeno al lenguaje matemático, cuidando de *dotar de sentido* a las variables.

| | TEORÍA | EXPERIENCIA | RESULTADO |
|---|---|---|---|
| Variable Independiente | **X** | **T** | |
| Variable Dependiente | **Y** | **V** | |
| FUNCIÓN | **y = m x + h** | **V = m T + h** | |
| m = pendiente | $\mathbf{m} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ | $\mathbf{m} = \frac{\Delta V}{\Delta T}$ | → $\mathbf{m} = \frac{V_f - V_i}{T_f - T_i} = \frac{22.2}{300} = 0.074$ |
| h =ordenada al origen | **x =0 → y = h** | **T =0→V = 20** | → **h = 20** |
| CONCLUSIÓN | | | → **V = 0. 074 T + 20** |

**MODELO MATEMÁTICO**
(para el gas considerado)

*Este es también el momento de evaluar si los objetivos propuestos en la etapa de fijación y consolidación del concepto función lineal, se han logrado. O sea, si se ha alcanzado el dominio de las técnicas algebraicas relativas a esta función, si se ha comprendido cabalmente el significado (tanto geométrico como físico) de los coeficientes* ***m*** *y* ***h****; particularmente el de* **m** *como razón de cambio:*
*Teoría* → *m* → variación de ´***y***´ por cada cambio unitario de ´***x***´.

*Experiencia* → 0.074 → variación de $\underbrace{\textbf{volumen}}_{cm^3}$ por cada grado de ***temperatura***.

Procedemos luego a la *validación y generalización de modelo.*
Para ello se calculan, con la función hallada, valores de V correspondientes a valores de T que figuran en la tabla experimental y se comparan los resultados obtenidos de una y otra forma. Avanzando más aún se pueden confrontar otros valores obtenidos en forma experimental con valores obtenidos a través de la función. Si los mismos coinciden o son bastante similares aumenta nuestra certeza acerca de la bondad del modelo hallado y acerca de la utilidad del mismo para predecir resultados sin necesidad de hacer la experiencia cada vez. Por último planteamos los siguientes interrogantes, el resultado obtenido:
- ¿será válido para cualquier gas que consideremos?;
- ¿para cualquier condición inicial en que el mismo se encuentre?; o sea,
- ¿siempre que se caliente un gas a presión cte. se expandirá a razón de 0.074 $cm^3$/ºC?

Sin dudas nos encontramos ante ¡¡¡ otro *problema!!!* ; que dejamos para otra ocasión.

**Hacia la autonomía en el aprendizaje**

Una vez resuelto un problema, proponemos una serie de problemas de naturaleza similar a los efectos de que el alumno los resuelva *solo*, tratando de aplicar las reglas *descubiertas*.
Insistimos que un punto crucial de todo este trabajo es la *estructura de la evaluación final*, que de ella depende muchas veces el éxito o fracaso de toda la propuesta. Que la misma debe ser presentada de tal forma que resulte otra instancia de entrenamiento de aquellas habilidades que impliquen el manejo y el control de los propios recursos cognitivos.

**Conclusiones**

En base a las experiencias llevadas a cabo con nuestros alumnos (primer año de la facultad) concluimos que, si bien los estudiantes presentan dificultades y resisten al principio esta forma de trabajo, sólo con persistencia de su uso en el tiempo, se podrán obtener los cambios pretendidos.
Creemos que una forma de promover el cambio es insistir en que los esfuerzos docentes se desplacen hacia una efectiva implementación de la enseñanza de la modelación; sin perder nunca de vista el papel fundamental de la formación en lo teórico-conceptual, manteniendo siempre el saludable equilibrio entre ambas actividades. Esto no es fácil ni sencillo, para ello el docente debe ser acompañado, estimulado, provisto de fuentes o recursos que faciliten su tránsito hacia otra forma de pensar su accionar y lo capaciten para el diseño de sus propias estrategias didácticas.

**Referencias Bibliográficas**

Bassanezi, R. C.(1990). Modelagem Aprendizagem. *Boletín Sociedad Brasilera de Matemática Aplicada*. San Pablo: Sociedad Brasilera de Matemática Aplicada.

Bonacina, M, Haidar, A., Quiroga, M., Sorribas, E. y Teti, C. (2006). Aprendizaje de las funciones a través de la resolución de problemas En Sagula, J. (Ed), *Memorias del VIII Simposio de Educación Matemática,* 243-264.Chivilcoy: EMAT

Bonacina, M, Haidar, A., Quiroga, M., Sorribas, E. y Teti, C.(2004).Las funciones en la resolución de problemas. En L. Díaz Moreno.(Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17,* 901-917. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Meichenbaum, D. (1977). *Cognitive behavioral modification, An integrative approach*. Nueva York: lenum Press.