

**CONTRIBUCIÓN DE LA ENSEÑANZA DE CONCEPTOS AL RAZONAMIENTO  
MATEMÁTICO  
UNA MIRADA DESDE TRES PERSPECTIVAS COGNITIVAS**

ANTHONY ANDRÉS OLAYA PANIAGUA  
WILLIAM DARIO TORO RIOS  
JORGE ELIECER VILLARREAL FERNÁNDEZ  
NATALIA ANDREA HERRERA MÉNDEZ

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA  
FACULTAD DE EDUCACIÓN  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA  
INTEGRACIÓN DIDÁCTICA IX  
MEDELLÍN  
2009

**CONTRIBUCIÓN DE LA ENSEÑANZA DE CONCEPTOS AL RAZONAMIENTO  
MATEMÁTICO  
UNA MIRADA DESDE TRES PERSPECTIVAS COGNITIVAS**

ANTHONY ANDRÉS OLAYA PANIAGUA  
WILLIAM DARIO TORO RIOS  
JORGE ELIECER VILLARREAL FERNÁNDEZ  
NATALIA ANDREA HERRERA MÉNDEZ

Asesora  
LUZ AMÉRICA FERNÁNDEZ ZEA  
Magister en Didáctica de las Matemáticas

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA  
FACULTAD DE EDUCACIÓN  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA  
INTEGRACIÓN DIDÁCTICA IX  
MEDELLÍN  
2009

## DEDICATORIAS

De Natalia:

Quiero dedicarle este trabajo a Dios por permitirme lograr tan importante objetivo en mi vida, a mi familia por su constante apoyo, comprensión durante esta etapa de estudio y por la formación que me han dado hasta el día de hoy.

De Jorge:

A mis padres por acompañarme de corazón en los giros que hay que dar en la vida antes de poder crear un sueño, a mis hermanos por su generoso amor, a mi bella por su amor y comprensión en las horas de vigilia, a mis compañeros en la lucha por la vida y al universo que, como siempre, conspiro para que el inicio del sueño se cumpliera.

De Anthony:

Le dedico este trabajo a mi madre por su apoyo durante todo este tiempo de formación, a mis compañeros por su apoyo incondicional y a Dios por estar siempre a mi lado.

De William:

A mis padres por su esfuerzo y apoyo para lograr que fuera un profesional, a mis hermanos y sobrinos y en especial a mi hermano Fredy Alejandro por su apoyo.

## **AGRADECIMIENTOS**

En este espacio queremos agradecerles a todas aquellas personas e instituciones que durante el proceso de este trabajo aportaron con su compañía, comentarios y formación a que los resultados fueran satisfactorios.

A la Universidad por brindarnos el espacio propicio para la reflexión y la formación en nuestra área.

A nuestra asesora la Magister Luz América Fernández por acompañarnos en este proceso tan importante para nuestra formación y por obtener tan importante resultado como es este trabajo.

Al lector del trabajo el Magister Rubén Darío, por los aportes tan valiosos que nos ha hecho durante la construcción de este texto y por el tiempo que de manera tan desinteresada nos ha brindado

A la Institución Educativa Escuela Normal Superior de Medellín por abrirnos sus puertas y permitirnos realizar la investigación allí.

A nuestros familiares por su apoyo durante todo este tiempo y por permitirnos asumir esta gran responsabilidad.

## CONTENIDO

	Pág.
INTRODUCCIÓN	
1. DISEÑO TEÓRICO	15
1.1 PROBLEMA	15
1.2 PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN	16
1.3 TAREAS DE INVESTIGACIÓN	16
1.4 OBJETIVO GENERAL	17
1.5 OBJETO DE ESTUDIO	17
1.6 CAMPO DE ACCIÓN	17
2. MARCO TEORICO	18
2.1 DESARROLLO COGNITIVO Y APRENDIZAJE EN LOS ADOLESCENTES EL PENSAMIENTO FORMAL Y EL APRENDIZAJE	18
2.2 APRENDIZAJE	22
2.3 RAZONAMIENTO	24

2.3.1	Concepciones de Razonamiento	25
2.3.2	razonamiento matemático	27
2.4	PROCESOS DE PENSAMIENTO	29
2.4.1	Procesos y Contenidos	29
2.4.2	Importancia del Desarrollo de los Procesos de Pensamiento como Competencia	30
2.4.3	Importancia del Docente en el Desarrollo de los Procesos de Pensamiento	31
2.5	¿QUÉ SON LOS PROCESOS DE PENSAMIENTO?	31
2.6	¿CUÁLES SON LOS PROCESOS DE PENSAMIENTO?	32
2.6.1	Observación	34
2.6.2	Descripción	35
2.6.3	Comparación	36
2.6.4	Relación	37
2.6.5	Clasificación	39
2.6.6	Conceptualización	40
2.6.7	Resolución de Problemas	41
2.6.8	Planteamiento de Hipótesis	42
2.6.9	Análisis	42
2.6.10	Síntesis	42
2.7	LOS CONCEPTOS	43
2.7.1	Enfoque Cubano	47
2.7.1.1	Componentes de un Concepto	47
2.7.1.2	Elaboración de Conceptos	52

2.7.2	Pedagogía Conceptual	55
2.7.3	Enseñanza para la Comprensión	58
2.7.3.1	Proyecto de Investigación	59
2.7.3.2	¿Qué Contenidos Vale la Pena Comprender? Contenidos Generativos	61
2.7.3.3	¿Qué Aspectos de esos Contenidos deben ser Comprendidos? Metas de Comprensión	61
2.7.3.4	¿Cómo Podemos Promover la Comprensión? Desempeños de Comprensión	63
2.7.3.5	¿Cómo Podemos Averiguar lo que Comprenden los Educandos? Evaluación Diagnóstica Continúa	64
3.	DISEÑO METODOLÓGICO	66
3.1	TIPO DE INVESTIGACIÓN	66
3.2	CARACTERIZACIÓN DE LA POBLACIÓN	66
3.3	TIPO DE MUESTRA	67
3.4	PROPUESTA METODOLÓGICA	67
3.5	INSTRUMENTOS	72
4.	DESCRIPCIÓN Y ANALISIS DE RESULTADOS	81
4.1	COMPARACIÓN RESULTADOS GRUPO CONTROL VS. GRUPOS INTERVENIDOS	81
4.1.1	Enseñanza para la Comprensión	81
4.1.1.1	Totales por Proceso y Nivel de Complejidad	81

4.1.1.2 Totales por Argumentación	86
4.1.2 Enfoque Cubano vs. Grupo Control	88
4.1.2.1 Totales por Proceso y Nivel de Complejidad	88
4.1.2.2 Totales por Argumentación	92
4.1.3 Pedagogía Conceptual vs. Grupo Control	94
4.1.3.1 Totales por Proceso y Nivel de Complejidad	94
4.1.3.2 Totales por Argumentación	98
4.2 ANALISIS DE RESULTADOS PRUEBA DIAGNÓSTICA Y DE SALIDA POR CADA GRUPO	99
4.2.1 Enseñanza para la Comprensión	99
4.2.1.1 Totales de Preguntas Contestadas	99
4.2.1.2 Comparación Totales Prueba Diagnóstica y de Salida	103
4.2.1.3 Comparación Totales prueba Diagnóstica y de Salida por Proceso y Nivel de Complejidad	105
4.2.1.4 Comparación Totales Prueba Diagnóstica Y De Salida Argumentación	108
4.2.2 Enfoque Cubano	111
4.2.2.1 Totales De Preguntas Contestadas	111
4.2.2.2 Comparación Totales Prueba Diagnóstica Y De Salida	114
4.2.2.3 Comparación Totales Prueba Diagnóstica Y De Salida Por Proceso Y Nivel De Complejidad	116
4.2.2.4 Comparación Totales Prueba Diagnóstica Y De Salida Argumentación	119
4.2.3 Pedagogia Conceptual	121
4.2.3.1 Totales de Preguntas Contestadas	121
4.2.3.2 Comparación Totales Prueba Diagnóstica y de Salida	124
4.2.3.3 Comparación Totales Prueba Diagnóstica y de Salida Por Proceso y Nivel De Complejidad	126
4.2.3.4 Comparación Totales Prueba Diagnóstica y de	



Salida Argumentación	129
4.2.4 Grupo Control	131
4.2.4.1 Totales de Preguntas Contestadas	131
4.2.4.2 Comparación Totales Prueba Diagnóstica y de Salida	134
4.2.4.3 Comparación Totales Prueba Diagnóstica y de Salida por Proceso y Nivel de Complejidad	136
4.2.4.4 Comparación Totales Prueba Diagnóstica y de Salida Argumentación	138
5. CONCLUSIONES	141
5.1 ENSEÑANZA PARA LA COMPRENSIÓN	141
5.2 ENFOQUE CUBANO	143
5.3 PEDAGOGÍA CONCEPTUAL	145
5.4 CONCLUSIONES GENERAL	148
6. RECOMENDACIONES	152
6.1 ENSEÑANZA PARA LA COMPRENSIÓN	152
6.2 ENFOQUE CUBANO	153
6.3 PEDAGOGÍA CONCEPTUAL	153
BIBLIOGRAFIA	155
ANEXOS	160

## LISTA DE ANEXOS

	Pág.
ANEXO 1. ACTIVIDAD DE PARABOLA	160
ANEXO 2. TÓPICOS GENERATIVOS	162
ANEXO 3. CONCEPTO DE PARABOLA	164
ANEXO 4. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE APLICACIÓN	168
ANEXO 5. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE APLICACIÓN 2	170
ANEXO 6. RECORDEMOS	174
ANEXO 7. DEFINICIONES PREVIAS	176
ANEXO 8. LEY DEL SENO	177
ANEXO 9. SECCIONES CÓNICAS: LA PARÁBOLA	181
ANEXO 10. LEYDEL SENO Y COSENO	185
ANEXO 11. EJERCICIOS PREPARATORIOS	187
ANEXO 12. FORMACIÓN DEL CONCEPTO	188
ANEXO 13. ELABORACIÓN DEL CONCEPTO	190

ANEXO 14. FIJACIÓN DEL CONCEPTO	194
ANEXO 15. FIJACIÓN DEL CONCEPTO DE PARÁBOLA	196
ANEXO 16. INSTRUMENTO DE OBSERVACIÓN	198
ANEXO 17. PRUEBA DIAGNOSTICA	201
ANEXO 18. PRUEBA DE SALIDA	206
ANEXO 19. EJEMPLO INSTRUMENTO APLICADO PRUEBA DIAGNOSTICA	210
ANEXO 20. EJEMPLO INSTRUMENTO APLICADO PRUEBA DE SALIDA	211

## INTRODUCCIÓN

Las matemáticas, lo mismo que otras áreas del conocimiento, están presentes en el proceso educativo, para contribuir al desarrollo integral de los estudiantes con la perspectiva de que puedan asumir los retos del siglo XXI. Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas proponen una educación matemática que propicie aprendizajes de mayor alcance y más duraderos que los tradicionales, que no sólo haga énfasis en el aprendizaje de conceptos y procedimientos sino en procesos de pensamientos ampliamente aplicables y útiles para aprender cómo aprender.

Mediante el aprendizaje de las matemáticas los estudiantes no sólo desarrollan su capacidad de pensamiento y reflexión lógica sino que, al mismo tiempo, adquieren un conjunto de instrumentos poderosísimos para explorar la realidad, representarla, explicarla y predecirla; en suma para actuar en ella y para ella. El aprendizaje de las matemáticas debe posibilitar al estudiante la aplicación de sus conocimientos fuera del ámbito escolar, donde debe tomar decisiones, enfrentarse y adaptarse a situaciones nuevas y exponer sus opiniones. Es necesario relacionar los contenidos de aprendizaje con la experiencia cotidiana de los alumnos, así como presentarlos y enseñarlos en un contexto de situaciones problemáticas y de intercambio de puntos de vista.

Para la consecución de estos objetivos es preciso que los estudiantes desarrollen altos niveles de razonamiento que les permitan enfrentarse a diversas situaciones a nivel académico y cotidiano y que puedan resolverlas a través de la razón.

En algunos enfoques de desarrollo cognitivo se ha comparado la inteligencia con estos niveles de razonamiento planteando que una persona que manejaba procesos a nivel superior como el análisis, la síntesis, la argumentación, etc.,

podría resolver una mayor cantidad de problemas y con mayores niveles de complejidad que otros.

Para el mejoramiento de estos procesos se utilizaron programas de mejoramiento de la inteligencia que tuvieron como base para su trabajo el desarrollar actividades por fuera de las aulas y de las áreas. Los resultados obtenidos fueron buenos frente al objetivo de mejorar el razonamiento de los estudiantes, pero el alejarse de las áreas hacía que también se perdieran posibilidades de avanzar a nivel académico.

El trabajo que se presenta a continuación tiene como objetivo el diseñar, aplicar y evaluar una propuesta de mejoramiento del razonamiento matemático de los estudiantes pero dentro del aula, es decir a partir de los conceptos que hacen parte del programa de matemáticas de tal forma que la enseñanza de estos conceptos permitan que los procesos de razonamiento mejoren. Mediante acciones interiorizadas-organizadas y coordinadas, elaborar la información procedente de las fuentes internas y externas, que permiten al ser humano enfrentar por sí mismo nuevas situaciones de aprendizaje.

Para esta aplicación se ha escogido tres enfoques cognitivos, el Enfoque Cubano, la Enseñanza para la Comprensión y la Pedagogía Conceptual, esto por la relación que tienen entre ellos, por ser cognitivos, y además por las diferencias que se pueden observar por el centro que cada enfoque ubica para el desarrollo del proceso en el aula, el primero centrado en la enseñanza y los otros dos centrados en el aprendizaje. En el trabajo se encuentra un recorrido teórico por cada uno de ellos además de un acercamiento a otros conceptos necesarios para la comprensión de lo realizado como: aprendizaje, razonamiento, concepto, etc.

Se realiza una intervención desde cada uno de los enfoques para la enseñanza de algunos conceptos matemáticos, luego de haber realizado un diagnóstico, el cual

se evalúa aplicando instrumentos de observación en el aula y una prueba de salida la cual se diseño con preguntas en las cuales se requerían procesos de razonamiento para resolverlo pero que no trataban sobre los temas trabajados en el aula. Esto con el fin de observar la aplicación de los procesos de razonamiento en situaciones que no eran, en ese momento, cercanas al estudiante pero que mostraban cada uno de los procesos y niveles trabajados durante la enseñanza de los conceptos

Al final del trabajo se pueden encontrar los análisis de los resultados obtenidos durante la intervención, así como algunas recomendaciones a los docentes para llevar a la práctica este tipo de actividades y las conclusiones del estudio realizado.

Esperamos que los resultados obtenidos se conviertan en un aliciente para los docentes que los lleven a proponerse la reflexión y transformación de sus prácticas de enseñanza, tal forma que estas se conviertan en un aporte a la formación de ciudadanos críticos y con altos niveles de razonamiento para que nuestro país deje de pensarse solo con la pasión.

Este trabajo pretender mostrar como a través de la enseñanza de conceptos matemáticos se mejora el razonamiento. Con el fin de lograr esto se implementaron las siguientes metodologías cognitivas: enseñanza para la comprensión, pedagogía conceptual y enfoque cubano, para la enseñanza de conceptos, con las cuales se logra en los estudiantes una participación activa en su aprendizaje.

## **1. DISEÑO TEÓRICO**

### **1.1 PROBLEMA**

Las observaciones en el aula de clase y el trabajo con los estudiantes del grado décimo de la Institución Educativa Normal Superior de Medellín mostraron dificultades en el nivel de los procesos de pensamiento que se utilizaban al resolver los problemas matemáticos o querer aprender un concepto, estas dificultades consistían en la no aplicación del proceso necesario para resolver la tarea planteada fuera ésta el comprender, el realizar, explicar o verificar.

Estas observaciones mostraron además que los procesos que manejaban los estudiantes no estaban acordes con los niveles que las teorías cognitivas plantean para su edad. El pensamiento formal propio de esta época aún no emergía y cada problema en el aula era resuelto solamente desde el punto de vista concreto.

Teniendo en cuenta esto se concluyó que era necesario mejorar el proceso de razonamiento matemático, es decir llevar al estudiante a que aplique los procesos mentales necesarios para llegar al aprendizaje del concepto, la resolución de problemas y siga avanzando hasta llegar a la argumentación, pero en medio del trabajo cotidiano en el aula, esto es elevar los niveles de razonamiento de los estudiantes y con ello equilibrar el desarrollo de su pensamiento a su edad.

A partir de este análisis se planteó la siguiente pregunta problematizadora que guía este trabajo:

¿Cómo contribuye la enseñanza de conceptos matemáticos al desarrollo del proceso de razonamiento matemático?

## **1.2 PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN**

¿Qué es un concepto?

¿Cómo se enseñan los conceptos?

¿Qué es el razonamiento matemático?

¿Qué estrategias se han implementado para desarrollar el razonamiento matemático?

¿Cómo se determina el desarrollo del razonamiento matemático?

## **1.3 TAREAS DE INVESTIGACIÓN**

Revisión bibliográfica de los diversos puntos de vista sobre los conceptos y su enseñanza.

Revisión bibliográfica sobre razonamiento matemático.

Revisión bibliográfica sobre el papel que cumple los diversos procesos de pensamiento en la enseñanza de los conceptos.

Realizar un análisis de las diversas estrategias utilizadas para el desarrollo del razonamiento matemático.

Realizar un diseño metodológico para la enseñanza de los conceptos, contribuyendo al desarrollo del razonamiento matemático.



Aplicar el diseño metodológico en los diferentes grupos del grado décimo de acuerdo con lo que se pretende.

#### **1.4 OBJETIVO GENERAL**

Diseñar, aplicar y evaluar una propuesta metodológica que permita desarrollar el razonamiento matemático a través de la enseñanza de conceptos.

#### **1.5 OBJETO DE ESTUDIO**

El proceso de enseñanza aprendizaje de los conceptos matemáticos.

#### **1.8 CAMPO DE ACCIÓN**

La enseñanza de los conceptos matemáticos.

## **2. MARCO TEORICO**

### **2.1 DESARROLLO COGNITIVO Y APRENDIZAJE EN LOS ADOLESCENTES - EL PENSAMIENTO FORMAL Y EL APRENDIZAJE**

En el libro De la lógica del niño a la lógica del adolescente, Inhelder y Piaget se propusieron dos objetivos fundamentales:

- Mostrar experimentalmente las diferencias cualitativas entre el funcionamiento intelectual del niño y el del adolescente; es decir, la existencia de un estadio con características específicas a partir de los 11-12 años;
- Demostrar que el modo de funcionamiento intelectual del adolescente es, como los anteriores, formalizable mediante la lógica de proposiciones.

En ningún caso se interrogaba a los sujetos acerca de las razones físicas o científicas en general que explicaban la resolución de la tarea; en cambio, ésta se empleaba para determinar si el sujeto poseía una determinada habilidad o estrategia. Es decir, dejando de lado el contenido del problema, se consideraba cómo razonaba el sujeto sobre su estructura.

Como resultado de analizar y formalizar la actuación de los sujetos de diferentes edades ante los problemas, Inhelder y Piaget sostienen que las operaciones formales, como estadio del desarrollo intelectual, se empezaban a adquirir a los 11-12 años, aproximadamente, y que se consolidaban hacia los 14-15. Según Inhelder y Piaget, el estadio de las operaciones formales tiene características bastante importantes.

Estas características se pueden clasificar en dos tipos: las funcionales y las formales o estructurales. Las primeras son rasgos generales del pensamiento

formal y representan formas, enfoques o estrategias para abordar y tratar los problemas. Las segundas son las estructuras lógicas que Piaget utilizó para formalizar el comportamiento de los sujetos ante los problemas que se les plantearon. Además de esto Inhelder y Piaget hablaron de "esquemas operacionales formales".

A continuación, se listan y describen las características funcionales del pensamiento formal.

Lo real es un subconjunto de lo posible	El razonamiento es hipotético-deductivo	El razonamiento es proposicional
<p>El niño que se encuentra en el estadio de las operaciones concretas sólo es capaz de pensar sobre los elementos de un problema tal como se presentan ante él; si - probablemente después de tanteos empíricos- concibe situaciones posibles adicionales, éstas son percibidas como una prolongación de lo real. Por el contrario, el sujeto de las operaciones formales suele enfocar la</p>	<p>Los sujetos de este estadio conciben las relaciones entre los elementos de un problema mediante un instrumento intelectual: las hipótesis que someten a prueba y, cuando no se confirman, desechan. Esta capacidad no se limita a una o dos hipótesis, sino que se extiende a varias de ellas. Para esto, aplican a la acción comprobatoria un razonamiento deductivo que permite saber cuáles son las consecuencias</p>	<p>Además de expresar las hipótesis mediante afirmaciones o enunciados que las representan, los sujetos de este estadio razonan sobre ellas -así como sobre los resultados de sus pruebas- convirtiéndolas también deductivamente en proposiciones; en efecto, las someten a un análisis lógico en el que utilizan la disyunción, la implicación, la exclusión y demás. Si los sujetos</p>

<p>resolución de un problema invocando todas las situaciones y relaciones causales posibles entre sus elementos; analiza lógicamente esas relaciones y trata de confrontarlas con la realidad mediante la experimentación.</p>	<p>verdaderas y exactas de las acciones realizadas. Así, no sólo conciben hipótesis o explicaciones posibles de los problemas -cosa que hacen algunos niños de los estadios preoperatorio y operatorio concreto-, sino que las manejan y seleccionan al comprobarlas sistemáticamente y someter los resultados a un análisis deductivo. En este análisis, cumple un papel esencial el llamado "esquema de control de variables", que consiste en mantener constantes todos los factores de un problema menos uno, que se va variando.</p>	<p>del estadio anterior realizan sus operaciones mentales directamente sobre los datos de la realidad, los sujetos del estadio de las operaciones formales convierten las operaciones directas o de primer orden en proposiciones y operan sobre ellas, realizando, por tanto, operaciones sobre operaciones. Es decir, las operaciones formales son operaciones de segundo orden. De hecho, la mayoría de los conceptos científicos hacen referencia a la relación entre dos conceptos que han debido comprenderse anteriormente.</p>
--	---	--

Desde este punto de vista, en el caso del estadio de las operaciones formales, se observa que los sujetos son capaces de resolver problemas que suponen no sólo

la realización de operaciones lógicas como la implicación, la disyunción y la exclusión, sino también los que implican estructuras o sistemas más amplios.

Estas afirmaciones de Piaget suponen reconocer, explícita o implícitamente, que los adolescentes y los adultos poseen un tipo de pensamiento que no funciona basándose solamente en la estructura de los problemas, sino también en su contenido; por lo tanto, el pensamiento no sería solamente "formal".

Además, si el pensamiento formal se adquiere en el área de especialización de cada sujeto, ¿qué tareas son las más adecuadas para conocer si se ha adquirido el pensamiento formal? ¿Qué influencia tiene la familiaridad en el nivel de resolución de tareas formales?

Diversas investigaciones, que han utilizado una amplia gama de tareas formales, parecen mostrar, a pesar de algunas fuertes discrepancias, que el pensamiento formal no es una estructura de conjunto. En efecto, unas tareas parecen resultar más fáciles que otras: como pueden presentarse con grados muy diferentes de complejidad (con más o menos cantidad de variables), su comprensión se produce a edades bien distintas.

La familiaridad que el sujeto tiene con la tarea también resulta ser una variable que incide en la resolución de aquélla. Pero diversas investigaciones han dado resultados diametralmente opuestos, unas plantean que si se tiene familiaridad con la tarea es más fácil su resolución, pero otra serie de investigaciones demostraron algo diferente: la familiaridad o experiencia con una tarea puede entorpecer su resolución si ha dado lugar a una serie de ideas previas cuya modificación resulta difícil para el sujeto.

En lo que respecta a las diferencias individuales, existen numerosos trabajos que indican la existencia de una clara relación entre la solución de tareas formales y la

llamada "dependencia-independencia de campo". Esta noción hace referencia a la capacidad de los sujetos para procesar información con autonomía del campo perceptivo externo; así, los sujetos con independencia de campo tienen una gran capacidad para separar los detalles de una configuración global. De este modo, los sujetos independientes de campo tendrían mayor facilidad para resolver las tareas formales que se presentan carentes de organización y requieren que el sujeto lleve a cabo una importante labor de estructuración de la información.

## **2.2 APRENDIZAJE**

Antes de iniciar con un trabajo de enseñanza se debe tener clara la forma en que se da el aprendizaje, ya que sin esta claridad la enseñanza puede dejar a un lado características importantes del proceso que el estudiante realiza perdiéndose con esto la oportunidad de mejorar posibilidades de éxito en la labor docente.

Los resultados de la investigación actual han puesto de relieve la relevancia del aprendizaje y, como consecuencia, la necesidad de cambiar el rostro del paradigma educativo, desplazando el centro de interés desde la enseñanza al aprendizaje, y desde el profesor al alumno<sup>1</sup>.

Los supuestos que subyacen a los paradigmas educativos existentes tienden a acentuar los factores externos al proceso de aprendizaje, como los recursos disponibles, el tiempo dedicado a la tarea o la información factual. Un paradigma centrado en el aprendizaje debe acentuar, en cambio, los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje<sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup> BELTRAN LLERA, Jesús. Psicología de la instrucción I. Variables y procesos básicos. Madrid: Síntesis, 1998. Pág. 68

<sup>2</sup> BELTRAN LLERA, Jesús. Procesos, estrategias y técnicas de aprendizaje. Madrid: Síntesis, 1993. Pág. 18.

Para este trabajo se toma como base del aprendizaje una teoría cognitiva de la adquisición donde el aprendizaje es el resultado o el efecto del pensamiento que procesa los materiales informativos presentados en el momento inicial del proceso de enseñanza – aprendizaje. Identificar los componentes de este proceso de aprendizaje no es más que identificar los distintos movimientos, fases o funciones del pensamiento al aprender. Enseñar, que es ayudar a aprender, no será otra cosa que enseñar a pensar, es decir, ayudar a desarrollar las distintas funciones del pensamiento, y no solo ayudar a almacenar contenidos. No se trata de enseñar a pensar al margen del currículo, sino de introducir estas ideas dentro de la enseñanza formal del currículo.

En este caso se está considerando el aprendizaje como una construcción de significados, donde el papel del estudiante es el que corresponde a un estudiante autónomo, auto – regulado, que conoce sus propios procesos cognitivos y tiene en sus manos el control del aprendizaje. El estudiante no se limita a adquirir conocimiento, sino que lo construye, usando la experiencia previa para comprender y moldear el nuevo aprendizaje. Consiguientemente, el profesor, en lugar de suministrar conocimientos, participa en el proceso de construir conocimiento junto con el estudiante; se trata de un conocimiento construido y compartido<sup>3</sup>.

Desde esta posición, se entiende claramente que los procesos centrales del aprendizaje son los procesos de organización, interpretación o comprensión del material informativo, ya que el aprendizaje no es una copia o registro mecánico del material, sino el resultado de la interpretación o transformación de los materiales de conocimiento. El estudiante procesa los contenidos informativos y. como

---

<sup>3</sup> BELTRAN LLERA, Jesús. Psicología de la instrucción I. Variables y procesos básicos. Madrid: Síntesis, 1998. Pág. 68.

resultado de este procesamiento, da sentido a lo que procesa, construye significados<sup>4</sup>.

## **2.3 RAZONAMIENTO**

Para referirse al razonamiento es necesario tener en cuenta diversas perspectivas que puedan dar luces a las posibles estrategias de intervención que permitan su desarrollo.

Desde el punto de vista literal en el diccionario se encuentra la definición de razonamiento como una “serie de conceptos encaminados a demostrar algo. Proceso mental o lingüístico por el cual a partir de una o varias proposiciones se deduce otra”<sup>5</sup>.

Desde el punto de vista filosófico, Charles S. Peirce plantea que “el razonamiento es un proceso en el que el razonador es consciente de que un juicio, la conclusión, es determinado por otro juicio o juicios, las premisas, de acuerdo con un hábito general de pensamiento, que puede que él no sea capaz de formular con precisión, pero que aprueba como conducente al conocimiento verdadero (es el conocimiento último en el que se espera que finalmente pueda descansar la creencia, sin ser perturbada por la duda, con respecto a la cuestión particular a la que su conclusión se refiere).

El razonamiento no comienza hasta que se forma un juicio; pues las operaciones cognitivas antecedentes no están sujetas a aprobación o desaprobación lógica, al ser subconscientes, o no lo suficientemente cercanas a la superficie de la consciencia, y por tanto incontrolables. El razonamiento, por lo tanto, comienza

---

<sup>4</sup> BELTRAN LLERA, Jesús. Procesos, estrategias y técnicas de aprendizaje. Madrid: Síntesis, 1993. Pág. 18.

<sup>5</sup> Diccionario básico de la lengua española. Grupo Editorial Norma. Bogotá. 1990. Pág. 640.



con las premisas que se adoptan como representando percepciones, o generalizaciones de tales percepciones. Todas las conclusiones del razonador deberían referirse solamente a las percepciones, o bien a proposiciones que expresen hechos de percepción. Pero esto no equivale a decir que las concepciones generales a las que llega no tengan valor en sí mismas<sup>6</sup>.

### **2.3.1 Concepciones de razonamiento**

A través de la Historia se han desarrollado múltiples teorías del razonamiento, las que merecen ser entendidas brevemente, para poder adentrarnos en nuestro trabajo

#### Concepción tradicionalista

Históricamente, el razonamiento se ha entendido como una facultad exclusiva de los seres humanos. El razonamiento era lo que delimitaba las diferencias entre ser humano o no serlo. Esta postura era la que mantenía Descartes y, hoy en día, la siguen manteniendo algunas personas. Sin embargo, esta posición se cuestiona con la teoría de la evolución y, a partir de aquí, algunos autores adoptan esta concepción.

#### Concepción evolucionista

Para el evolucionismo, el razonamiento es una actividad inferencial más que compartimos con algunos animales de nuestra escala evolutiva. La teoría de la evolución dice que no somos una especie al margen de las otras especies. A través de las investigaciones se observa que los chimpancés son capaces de

---

<sup>6</sup> Pierce, Charles S. Razonamiento. (1901). Traducción castellana de Sara F. Barrena. "Reasoning" corresponde a CP 2. 773-778. Pág. 1.

llevar a cabo procesos de razonamiento, por medio de la inferencia, por lo que se cuestiona la concepción tradicionalista.

### Concepción cognitiva

Para esta concepción, el razonamiento es aquella actividad que tiene un objetivo preciso pero que no suele usar procedimientos rutinarios. Los procesos deductivos no se realizan generalmente de forma automática. Es independiente del sustrato físico. Aunque animales y humanos realicen inferencias, es independiente del sustrato físico, ya que los computadores resuelven problemas de lógica, tanto inductivos como deductivos.

Los lineamientos curriculares hacen un planteamiento bastante general sobre la definición de razonamiento como “la acción de ordenar ideas en la mente para llegar a una conclusión”<sup>7</sup>, y hace una profundización en la definición de razonamiento matemático que más tarde se analizará. En esta definición es importante comprender que significan las ideas para el Ministerio para tener una mejor comprensión del proceso que se va a dar en la mente de los estudiantes.

La doctora Lourdes hace su planteamiento sobre el razonamiento a partir de la Lógica, dice que ésta estudia los productos de la actividad pensante que se conocen como las formas lógicas del pensamiento. Ellas son: los conceptos, los juicios, los razonamientos, las hipótesis y las teorías científicas.

Los juicios se consideran formas de pensamiento, que permite afirmar o negar situaciones o hechos respecto a la existencia de objetos, las relaciones entre objetos o relaciones entre el objeto y sus propiedades.

---

<sup>7</sup> COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Bogotá: El Ministerio, 1998. Pág. 54.

Por su parte los razonamientos desde el punto de vista lógico se definen como la forma de pensamiento mediante la cual, y a base de ciertas reglas de inferencia, de uno o varios juicios se obtiene un nuevo juicio, que se infiere de aquellos de modo necesario o con determinado grado de probabilidad. El razonamiento es el eslabón fundamental que permite pasar a nuevas formas de organización del conocimiento. De ahí su importancia como vía para la sistematización de este último.

Para el objetivo de este trabajo es necesario determinar un concepto y visión acerca del razonamiento, para esto tomaremos como base el que plantea que “el razonamiento es un proceso que permite a los sujetos extraer conclusiones a partir de premisas o acontecimientos dados previamente, es decir, obtener algo nuevo a partir de algo ya conocido”<sup>8</sup>.

En este caso se tomará lo ya conocido como los procesos de pensamiento que el individuo ha desarrollado y no un tema en específico, esto teniendo en cuenta que sin estos procesos es imposible que el sujeto sea capaz de obtener algo nuevo en su cerebro.

### **2.3.2 Razonamiento Matemático**

El razonamiento se entiende de manera general como la acción de ordenar ideas en la mente para llegar a una conclusión. En el razonamiento matemático es necesario tener en cuenta la edad de los estudiantes, su nivel de desarrollo y que cada logro alcanzado en un conjunto de grados se retoma y amplía en los conjuntos de grados siguientes.

---

<sup>8</sup> Carretero, 2004, pag. 25.

Razonar en matemáticas tiene que ver con el desarrollo de los procesos de pensamiento y su aplicación particular en cada uno de los pensamientos que componen la competencia matemática ya que éstos permitirán consolidar los elementos para poder procesar información, no a la manera memorística propiamente, sino con el objetivo de que favorezca la resolución de problemas, es decir, su utilización de una manera funcional en la vida.

Es así como, para el grado primero el niño debe estar en posibilidad de relacionar el qué y el cómo de una situación, que puede hacerlo a través de la observación y la descripción. En segundo y tercero debe responder, además a las diferencias y semejanzas, a través de la comparación. En cuarto y quinto a las posibles relaciones que se desprenden. Todo ello atravesado por la conceptualización, que alude a la significación de los conceptos adquiridos. Con esto puede resolver y plantear problemas. En el bachillerato se espera que plantee hipótesis a nivel de posibilidad de resolver los problemas, realice análisis, síntesis y se proyecte a la realización de razonamientos inductivos, deductivos e hipotéticos, para luego argumentar y contrastar teorías y leyes.

Acá es importante señalar que estos procesos: observación, descripción, comparación, clasificación, relación, etc., están en orden de complejidad, lo que implica que si un estudiante no está en condiciones de realizar una comparación, no puede responder a una pregunta que implique llevar a cabo una relación, esto en niveles semejantes de complejidad.

Es precisamente a partir de dichos elementos que un alumno podrá, en la básica secundaria, enfrentarse a la formulación de hipótesis y al análisis y argumentación a través de preguntas como: ¿qué pasaría si...?, ¿por qué...?, y ¿cuáles son las características de.....?

El conocer dicho proceso nos permite en nuestro quehacer profesional como docentes, no centrarnos únicamente en el contenido o conocimiento propiamente dicho, sino apuntar al desarrollo de procesos de pensamiento que son los que posibilitarán visualizar el desarrollo del proceso mental que el alumno utiliza y que favorece el logro del conocimiento estipulado.

## **2.4 PROCESOS DE PENSAMIENTO**

### **2.4.1 Procesos y Contenidos**

El contenido es, por definición: rígido y estático, pues es un producto terminado; son datos rígidos que no podemos modificar y que son aceptados por todo el mundo. Los procesos, por el contrario, son flexibles y crean alternativas, porque cada persona puede generar caminos diferentes para tener acceso a la misma información; son transferibles: un proceso utilizado en una área puede ser exportado para lograr otro conocimiento; tienden a formar competencia: uno de los objetivos del aprendizaje es formar gente competente, que en el terreno práctico demuestra aplicación de conocimientos en forma versátil.

Como plantea Paiva, “el desarrollo del pensamiento le permite a los seres humanos cuestionar su situación histórica y social, para leer su mundo, para poder interpretarlo desde su realidad, y a la vez intervenirlo para su beneficio”<sup>9</sup>. La academia o la escuela como una de las instituciones cultivadoras del pensamiento, tienen entonces como reto promover en los jóvenes el desarrollo de un pensamiento que les posibilite conocerse a si mismo y desarrollar habilidades para resolver los problemas planteados por sus entornos. Esto implica una exigencia para la educación y para cada una de las personas que están

---

<sup>9</sup> Paiva, Andrews. La educación liberadora de Paulo Freire y el desarrollo del pensamiento. Ponencia presentada en el III Simposio “El formador de formadores en los albores del siglo XXI”.

involucrados en ella: trascender las ideologías, objetivos, métodos y metodologías de tipo memorístico a unas basadas en el desarrollo de competencias que le permitan al individuo y a la sociedad conocer su realidad y transformarla.

Hablar de los procesos de pensamiento dentro del sistema actual de educación en Colombia, es hablar de una realidad construida, es decir que “la información existe en el medio pero profesores y estudiantes a través de la activación de sus procesos de pensamiento la interiorizan fortaleciendo su capacidad de pensar en diversas situaciones”, va perdiendo entonces viabilidad las propuestas de tipo memorístico que entregan la información ya elaborada para ser almacenada.

#### **2.4.2 Importancia del Desarrollo de los Procesos de Pensamiento como Competencia**

Desde este marco de las competencias, el desarrollo del pensamiento es importante porque:

- La reflexión le permite a las personas ubicar su lugar en el mundo, su rol en el entramado de relaciones diversas con sus semejantes.
- Conocer las capacidades de pensamiento permite potenciar las propias habilidades.
- Las capacidades de pensamiento permiten que la persona sea capaz de mirar y entender su mundo de forma independiente.
- Los procesos de pensamiento hacen parte del todo de una persona, integrándolos a su área social-emocional y espiritual.

### **2.4.3 Importancia del Docente en el desarrollo de los Procesos de Pensamiento**

El pensamiento puede desarrollarse si el medio facilita las condiciones para ello, esta perspectiva ubica al educador como facilitador en la construcción de nuevas realidades, de esta manera es importante que este sea flexible en escuchar cada una de las ideas o pensamientos de sus estudiantes para construir conjuntamente con ellos esa realidad; debe recordarse que la participación es un medio para posibilitarle al otro ser. El hablar de desarrollo de procesos de pensamientos implica no hablar de relaciones verticales, en esta medida estudiantes y docentes deben entrar en un intercambio dialogal en el cual ambos aprenden, cuestionan, reflexionan y participan en la búsqueda de significados.

Como dice Pontual frente al pensamiento de Freire “la curiosidad es el motor fundamental del proceso de construcción del conocimiento”<sup>10</sup>, de esta manera el papel fundamental del docente sería saber preguntar para promover la construcción de este conocimiento, es decir, el educador ha de motivar y ejercitar al educando para leer e interpretar su mundo, para que llegue a comprender su propia realidad como parte de su actividad de aprendizaje.

## **2.5 ¿QUÉ SON LOS PROCESOS DE PENSAMIENTO?**

“Los procesos de pensamiento son acciones interiorizadas-organizadas y coordinadas, por las cuales se elabora la información procedente de las fuentes internas y externas, que permiten al ser humano enfrentar por sí mismo nuevas situaciones de aprendizaje”<sup>11</sup>. Estas habilidades se van consolidando a lo largo del proceso de aprendizaje. Pueden presentarse en distintos niveles, de acuerdo con

---

<sup>10</sup> PONTUAL, Pedro. Paulo Freire. A cinco años de su muerte homenaje al gran educador.

<sup>11</sup> PARGA, Manuel. Pensamiento de orden superior en diseño: Aportes del enfoque cognitivo a los procesos de formación de competencias para diseñar.

el estadio de pensamiento del estudiante o con su nivel de abstracción. A esto se suma el estilo de aprendizaje particular del individuo y su tipo de inteligencia.

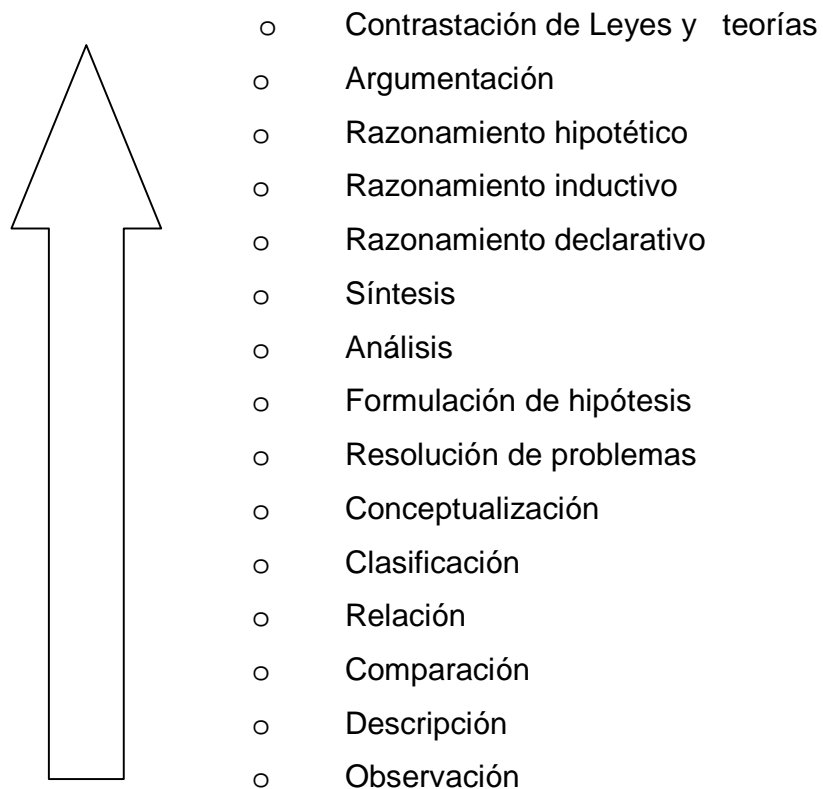
Los procesos de pensamiento pueden observarse en las distintas dimensiones del desarrollo humano, valga señalar: la dimensión comunicativa, corporal, cognitiva, socio-emocional, ética, espiritual y estética.

## **2.6 ¿CUÁLES SON LOS PROCESOS DE PENSAMIENTO?**

Diferentes teorías y teóricos proponen una variedad de procesos de pensamiento, este trabajo se fundamenta en los planteados por Margarita de Sánchez, las definiciones de algunos de los procesos, así como los procedimientos de adquisición tiene como base la citada autora. Se propone que la cadena del desarrollo de los procesos de pensamiento inicia con la observación y finaliza con la contrastación de leyes y teorías, cada proceso de pensamiento involucra los inmediatamente anteriores, es decir, para realizar una clasificación es necesario que la persona ya haya desarrollado la habilidad de realizar comparación, descripción y observación. Un proceso nos exige siempre que el anterior ya esté más consolidado, teniendo en cuenta que se esté en niveles semejantes de complejidad. Es importante que el docente conozca y maneje el procedimiento de cada proceso de pensamiento para que pueda determinar en sus estudiantes cuáles han desarrollado y cuáles no, y de esta manera definir las acciones a seguir para poder promover mayores habilidades cognitivas. Igualmente es importante tener claro que cada uno de estos pensamientos pueden presentarse en un nivel de desarrollo concreto o abstracto, cuando están en un nivel concreto es importante que el docente proporcione los medios al estudiantes para que este pueda llevarlos a nivel más complejo.



A continuación se muestra el gráfico de los procesos de pensamiento desde el más básico que es la observación hasta el más alto que es la contrastación de leyes y teorías:



Para la educación básica primaria se abordan desde la observación hasta el planteamiento o resolución de problemas, los otros se retoman más en secundaria, porque se espera que aproximadamente entre los 11 y 12 años el organismo haya alcanzado mayor madurez y experiencia, que le posibilitan mayores niveles de complejidad y abstracción. Es importante mencionar que los procesos de pensamiento no se desligan de las estrategias metacognitivas, pues estos nos exigen estar conscientes de las tareas que se realiza tener un conocimiento sobre los procedimientos necesarios para su realización y hacer verificación constante con el fin de identificar si las acciones son acordes a los

objetivos planteados. Se pueden definir los procesos de pensamiento de la siguiente manera:

### **2.6.1 Observación**

Es el proceso de pensamiento más elemental en los seres humanos y base fundamental para los otros procesos, que implica la identificación de las características y los estímulos de objetos y situaciones a través de los sentidos y la integración de estos en un todo que represente la imagen mental del objeto, es decir, la observación parte, en primer lugar de la reunión de datos sensoriales brutos y, a continuación, de su contenido, es decir: lo que uno ha visto, oído, entendido, sentido, etc. El proceso de observación es un proceso de identificación permanente del sujeto con su entorno. Hay un nivel abstracto que alude a las variables que no se ven, pero que se predicen; observar es hablar sobre el cómo y esto tiene diferentes niveles: concreta, abstracta, directa e indirecta. El individuo aprende la observación a través de su entorno, se guía mediante preguntas que van de lo general a lo particular.

Para realizar la observación se requiere mantener una atención sostenida, para realizar un examen minucioso y reflexionado de la situación observada. La observación concreta ocurre cuando realizamos el primer contacto con el objeto y la abstracta cuando podemos prescindir del objeto y recordamos sus características, es decir cuando nos hemos formado una representación mental del objeto.

- En el aula se debe promover la observación como un proceso activo que tiene un sentido, un fin propio.
- El tipo de observación que realiza una persona puede ser identificado a través de la descripción que realiza de la situación u objeto, de lo contrario se dificultaría su identificación.

- Es importante tener cuidado con confundir las observaciones con aquello que se imagina o se piensa acerca de un objeto o situación.
- La inferencia es un proceso importante pero no se debe confundir con la observación, una cosa es lo que se observa y otra lo que se infiere a partir de las características de los objetos observados.

### **Procedimiento para la observación**

- Definir el propósito de la observación.
- Identificar las características del objeto o situación.
- Anotar todas las características observadas.
- Retroalimentar, revisar y corregir posibles errores revisando el propósito, revisando las características observadas o ambos.

### **2.6.2 Descripción**

La descripción es el proceso empleado para representar objetos, personas o situaciones por medio del lenguaje escrito, gráfico o verbal, consiste en enumerar e integrar de manera ordenada las diferentes cualidades o propiedades que conforman el objeto de descripción. Para describir es necesario establecer un orden y utilizar un lenguaje claro y preciso. Las descripciones pueden ser concretas o estáticas cuando sólo se nombran los componentes de una gráfica o situación punto a punto, sin integrar los datos y características de todo lo que se observa. Son dinámicas o más complejas, cuando además se enuncian acciones y se enlazan los personajes entre sí, atribuyéndoles emociones, es decir cuando la construcción de la descripción se realiza de manera hilada; este tipo de descripción es importante para fortalecer los niveles de comprensión en los estudiantes. La descripción puede ser guiada por preguntas que guíen la

observación y ayuden a organizar las características: ¿Qué es?, ¿Qué tiene?, ¿Qué hace?, ¿Qué función realiza?, ¿Para que se hace?, ¿Para qué se usa?

### **Procedimiento para la descripción:**

- Definir el propósito.
- Hacer preguntas para organizar las ideas
- Hay que observar con mucha atención y seleccionar los detalles más importantes. Para esto es necesario tomar en cuenta las preguntas hechas
- Después de seleccionar los detalles, hay que organizar los datos siguiendo un orden, que podría ser:
  - De lo general a lo particular o al contrario.
  - De los primeros planos al fondo o al contrario.
  - De dentro a fuera o al contrario.
  - De izquierda a derecha o al revés.
  - Al describir hay que situar los objetos en el espacio con precisión. Se usarán expresiones como a la derecha, junto a, al fondo, detrás de, en el centro, alrededor...
- Verificar la falta de algún detalle importante.

### **2.6.3 Comparación**

La comparación es el proceso de observar para tratar de identificar las semejanzas y diferencias de los objetos, personas, situaciones entre otros. Para comparar características o situaciones debemos tomar una variable cada vez, hasta agotar las variables por considerar. Al comparar podemos utilizar dos tipos de rasgos:

a. Los rasgos diferenciales de cada objeto (comparación por diferencias). Son las características que distinguen a unos objetos de otros. En el proceso de

comparación por diferencias se toman pares de características en las que difieren los objetos o las situaciones. A estos pares de características se les denomina variables.

b. Los rasgos comunes a las cosas que comparamos (comparación por semejanza). Son las características que hacen que podamos agrupar a los seres en clases. Este tipo de comparación puede ser por semejanza idéntica o por semejanza similar.

#### **Procedimiento para realizar la comparación:**

- Definir el propósito
- Identificar las variables que se desean comparar.
- Observar los objetos.
- Identificar los pares de características en que difieren o se parecen dichos objetos.
- Anotar las características diferentes y parecidas en las variables correspondientes.
- Verificar cada variable para identificar si la comparación se realizó de manera adecuada.

#### **2.6.4 Relación**

En la relación se consideran dos características de manera simultánea y se establecen relaciones entre ellas mediante proposiciones. La diferencia entre la relación y la comparación, es que en la comparación se dan las características (ejemplo, Variable: edad: Juan tiene 24 y Sofía 20) y en la relación se da la conclusión acerca de la característica comparada (Ejemplo: Juan es mayor que Sofía). De esta manera las relaciones pueden mostrarnos relaciones de

semejanza, equivalencia o diferencia de las situaciones u objetos. Los criterios para las relaciones pueden ser de:

- Término a término
- De correspondencia
- De modo
- De tiempo
- De pertenencia
- De cantidad
- De causa-efecto
- De orden
- De espacio
- De contraste

#### **Procedimiento para establecer relaciones**

- Definir el propósito.
- Identificar las variables que se desean.
- Observar los objetos.
- Identificar los pares de características en que difieren o se parecen dichos objetos.
- Anotar las características diferentes y parecidas en las variables correspondientes.
- Establecer nexos entre las características de las variables que se comparan.
- Formular la relación.
- Verificar si la relación tiene que ver con el propósito planteado inicialmente.

Relacionar es un proceso mental muy importante, porque es un componente básico de la abstracción.

### 2.6.5 Clasificación

Permite construir agrupaciones, clases o categorías según criterios definidos, por ejemplo de forma, color, especie, entre otros y asignar atributos a dichas categorías. Para hablar de clasificación es necesario el concepto de clase; una clase es un grupo de elementos que comparten características esenciales<sup>12</sup> entre sí, ejemplo: un vaso, una jarra y una taza comparten una característica esencial: todos son recipientes. La clasificación debe cumplir dos condiciones:

- Un elemento no puede pertenecer a dos clases o grupos.
- Cada elemento deber ser ubicado en alguna de las clases.

Al igual que los demás procesos pueden darse en niveles concretos, como por ejemplo, tener en cuenta sólo criterios perceptivo-visuales a la hora de clasificar o más abstractos, como por ejemplo lo funcional y lo semántico (ejemplo medios de transporte, prendas de vestir, alimentos, animales, medios de comunicación, entre otras). Es importante, determinar en qué nivel se encuentra el estudiante para establecer el tipo de apoyo o actividad que le ayudará a consolidar el proceso.

#### **Procedimiento para la clasificación:**

- Identificar el propósito.
- Observar e identificar las semejanzas y diferencias y establecer relaciones entre ellas.
- Identificar las características esenciales para determinar las posibles clases que se pueden conformar.

---

<sup>12</sup> Las características esenciales son las características más importantes y compartidas entre un grupo de objetos, las cuales son necesarias identificar para establecer luego criterios de clasificación.

- Identificar las clases que pueden ser conformadas de acuerdo con las características esenciales.
- Formar las clases.
- Verificar para corregir los posibles errores.

La clasificación tiene diferentes aplicaciones, permite organizar ideas, reconocer aspectos relevantes e irrelevantes, facilita la identificación de cosas esenciales, ayuda a memorizar y a utilizar informaron de manera más precisa.

### **2.6.6 Conceptualización**

Es una habilidad de pensamiento que permite la abstracción de objetos, ideas, fenómenos, teorías, entre otros. La conceptualización atraviesa los demás procesos, puesto que el concepto es el elemento básico del pensamiento. Durante su desarrollo el individuo accede primero al pensamiento nocional, en el que se producen enunciados de carácter binario, es decir, en forma de afirmaciones y negaciones; de modo que niños de edades entre los 2 y los 6 años no suelen considerar los términos medios. Posteriormente, se avanza hacia el pensamiento conceptual donde es posible elaborar predicados de clases o relaciones entre cosas u otros conceptos, dando origen a las preposiciones y considerando términos intermedios. Se suele desarrollar entre los 6 y los 11 años.

No se debe confundir concepto con definición. El concepto es una representación general, abstracta, de un objeto o situación, susceptible de ser relacionada con otros, formando así una red significativa. Mientras que la definición es una afirmación que expresa las propiedades del concepto y, es por tanto, más puntual. En otras palabras, un estudiante puede poseer la noción o el concepto de un contenido pese a que no logre definirlo o verbalizarlo.



### **2.6.7 Resolución de Problemas**

Es una habilidad del pensamiento que permite transferir aprendizajes a otros contextos. Es un proceso ejercido en situaciones en las que un sujeto debe conseguir una meta, haciendo uso de un principio o regla conceptual. En términos restringidos, se entiende por solución de problemas, cualquier tarea que exija procesos de razonamiento relativamente complejos y no una mera actividad asociativa. Se considera que habitualmente cualquier persona pasa por tres fases a la hora de solucionar un problema y se las denomina: preparación, producción y enjuiciamiento. En la fase de preparación es cuando se hace un análisis e interpretación de los datos que tenemos. Muchas veces si el problema es muy complejo se subdivide en problemas más elementales para facilitar la tarea. En la fase de producción intervienen distintos aspectos entre los que hay que destacar la memoria, que se utiliza para recuperar todos los recursos que estén a nuestro alcance y que nos sirvan para llegar a una solución eventual. En la última fase de enjuiciamiento, lo que se hace es evaluar la solución generada anteriormente, contrastándola con nuestra experiencia, para finalmente darla como buena o no.

#### **Procedimiento para la resolución de problemas:**

1. Identificación del problema o preparación, es la fase en la cual el solucionador analiza el problema, intenta definirlo en forma clara y recoge hechos e información relevante al problema.
2. La incubación, es la fase en la cual el solucionador analiza el problema para reformularlo; se aísla la información relevante
3. La inspiración, es la fase en la cual la solución al problema surge de manera inesperada.
4. La verificación, es la fase que involucra la revisión de la solución.

### **2.6.8 Planteamiento de Hipótesis**

Es un enunciado que se propone como posible solución de un problema, es un tanteo, suposición, conjetura e inferencia. Aparece al plantear una posibilidad ¿Qué pasaría si...?, para plantear y verificar hipótesis se debe desarrollar habilidades para razonar de manera sistemática y disciplinada, abstraer relaciones a partir de las características de los objetos, efectuar comparaciones, hacer inferencias y llevar un registro mental de todas las deducciones mientras resuelve el problema.

### **2.6.9 Análisis**

Proceso que constituye una operación de pensamiento complejo que permite dividir un todo en sus partes, de acuerdo con la totalidad que se seleccione, es posible realizar análisis de partes, cualidades, funciones, relaciones, estructuras y operaciones. Permite dividir de manera sistemática y organizada, situaciones complejas en otras más simples o elementales.

### **2.6.10 Síntesis**

El proceso de síntesis en palabras de Margarita A. de Sánchez, es el que permite integrar elementos, relaciones, propiedades o partes para formar totalidades nuevas y con significación. Cada situación que se presenta amerita un modo único de llevar a cabo este proceso, por lo que no es posible determinar un procedimiento único. Sin embargo es posible que se construya un procedimiento general que se pueda particularizar según las necesidades de cada problema. El procedimiento general incluye la aplicación sucesiva del análisis y las síntesis de manera repetitiva hasta lograr el nivel de integración de la información deseada. Se pueden asimilar o definir conceptos mediante el estudio analítico-sintético de

las características de estos conceptos detallando rasgos, nexos y relaciones fundamentales comunes, luego se efectúa la síntesis de esos

## **2.7 LOS CONCEPTOS**

Las definiciones de concepto son variadas pero tienen características relacionadas que los hacen semejantes, lo mismo que algunos que los diferencian. Para el apoyo teórico de este trabajo se toman en cuenta algunas de estas definiciones, teniendo en cuenta aquellas que en nuestro medio han tenido importancia por su aplicación y desarrollo de propuestas para su construcción y elaboración.

A nivel general en la Web se encuentra una definición interesante “los conceptos son constructos u objetos mentales, por medio de los cuales comprendemos las experiencias que emergen de la interacción con nuestro entorno, a través de su integración en clases o categorías relacionadas con nuestros conocimientos previos. La palabra concepto proviene de la voz latina *conceptum* que significa concebido.

La formación del concepto está estrechamente ligada al contexto; esto significa que todos los elementos, incluyendo el lenguaje y cultura, y la información percibida por los sentidos que sea accesible al momento en que una persona construye el concepto de algo o alguien, influyen en la conceptualización. El conocimiento de la experiencia siempre es concreto, tiene una referencia a una cosa, una situación o algo que es único e irrepetible. Por otro lado, la experiencia siempre es intersubjetiva”<sup>13</sup>.

Para los creadores de la pedagogía conceptual, “un concepto es la reunión de todas las proposiciones predicables de una clase de objetos, de una clase de

---

<sup>13</sup> <http://es.wikipedia.org/wiki/Concepto>.

relaciones o de una clase de operaciones; la esencia del concepto son solo aquellas que resultan características y generales”<sup>14</sup>.

Se entiende por clase a todas aquellas cosas que pueden ser objetos, relaciones u operaciones que cumplen con las características del concepto. Ejemplo: El concepto triángulo cumple ser una clase de objetos, mientras que “mayor que” y “menor que” son clases de relaciones y las clases de operaciones son suma, resta, multiplicación, entre otros. Por lo tanto, todo concepto implica una relación entre clases, de la clase de la cual se habla y lo que se habla.

Los conceptos se originan cuando las nociones clasales, las clases aisladas, van estableciendo nexos con otras clases también aisladas produciéndose de esta manera entramadas de clase, es decir, sistemas clasificatorios, conceptos. Por tanto se puede afirmar que los conceptos sí son una entramada de clases, es decir, una agrupación de las cosas que cumplen con las características determinadas.

Los instrumentos conceptuales previos son agrupaciones organizadas de nociones y los instrumentos intelectuales corresponden a categorías; una categoría es un concepto de conceptos, es un sistema conceptual. Los estudiantes al nivel de la educación media ya deben estar en capacidad de reunir los conceptos aislados en sistemas complejos que lo contenga. Como dice la pedagogía conceptual, los objetos corresponden a organizaciones internas de nociones, las categorías a organizaciones externas interconceptuales.

Margarita A. de Sánchez define el concepto como “un ente abstracto que, bajo una denominación, agrupa objetos, eventos o situaciones con características comunes

---

<sup>14</sup> de Zubiría Samper, Julián. De Zubiría Samper, Miguel. Biografía del Pensamiento. Estrategias para el desarrollo de la inteligencia. Mesa Redonda Magisterio. Bogotá. 1995. Pág. 54.

o esenciales, denominadas también propiedades definitorias. Dichas características hacen que un objeto, evento o situación pertenezca a la categoría o clase que lo define”<sup>15</sup>.

Por lo anterior, es posible definir un concepto a partir de la clasificación el proceso consiste en identificar las características esenciales del conjunto de la clase que lo define y la palabra que lo identifica. También es posible realizar el proceso inverso, es decir, ubicar un elemento por sus características dentro de la clase de determinado concepto.

Werner Jungk define el concepto como “el reflejo mental de una clase de cosas, procesos, relaciones de la realidad objetiva o de la conciencia (o el reflejo de una clase de clases), sobre la base de sus características invariantes”<sup>16</sup>.

La doctora Lourdes Valverde define el concepto como una forma lógica de pensamiento, como los juicios, las hipótesis y las teorías científicas. Es un “reflejo ideal de las cualidades generales y esenciales de un objeto o fenómeno, de una clase, de una clase de clases o de relaciones entre individuos”<sup>17</sup>. La doctora Valverde cita a Guetmánova quien define el concepto como “una forma de pensamiento abstracto. En el concepto sólo se reflejan los indicios sustanciales de los objetos. Los indicios son lo que asemeja o distingue los objetos. Las propiedades y relaciones son indicios. Los indicios sustanciales son aquellos que son imprescindibles para formar el concepto y todos juntos son suficientes para distinguir un objeto de otro. Hay indicios distintivos y no distintivos”<sup>18</sup>.

---

<sup>15</sup> Sánchez, Margarita A. de. Desarrollo de habilidades del pensamiento: procesos básicos del pensamiento: guía del instructor. Editorial Trillas. México. 1991 (reimp. 2004).

<sup>16</sup> Jungk, Werner. Conferencias sobre Metodologías de la Enseñanza de la Matemática 2.

<sup>17</sup> Valverde, Lourdes. Zapata Correa, Álvaro. Formación de conceptos.

<sup>18</sup> *Ibíd.* Pág. 8.

Y la doctora Valverde culmina con la definición de concepto como “una forma del pensamiento que refleja los indicios sustanciales y distintivos de un objeto o de una clase de objetos homogéneos”<sup>19</sup>.

Reuniendo la definición de conceptos de Pedagogía conceptual, Margarita A. de Sánchez y la doctora Valverde, podemos decir que un concepto es una forma lógica de pensamiento donde están agrupadas las características generales y/o esenciales de un objeto, evento o clase.

A partir de estas definiciones y las relaciones entre ellas se presenta una propuesta de solución al problema de mejorar el razonamiento de los estudiantes a partir de la enseñanza de los conceptos. Esta propuesta tiene como base la utilización en la enseñanza de los conceptos de metodologías de tipo cognitivas ya que estas tienen como finalidad la movilización del pensamiento, cada una desde su perspectiva.

En la enseñanza a través de cada una de estas metodologías se buscó el que se pudieran manejar los procesos de pensamiento desde los niveles básicos (más fáciles) hasta niveles superiores (más complejos). A la vez que se manejaran tareas que fueran familiares para los estudiantes pero a la vez tareas que no lo fueran, esto con el fin de tener una dinámica en los procesos utilizados y permitir el que los dispositivos básicos de aprendizaje tengan también movilidad en su disposición.

Un punto muy importante en la propuesta fue el intento por desarrollar los procesos con independencia de campo, teniendo en cuenta que por las diferencias individuales podría haber dificultades para los estudiantes si el desarrollo de estos

---

<sup>19</sup> Ibíd. Pág. 9.

sólo se diera en los temas del área. Esto se consiguió a través de la exposición de las experiencias.

Para la propuesta se escogieron tres metodologías de tipo cognitivo, el enfoque cubano de la enseñanza de los conceptos, la pedagogía conceptual y la enseñanza para la comprensión. Estos tres enfoques tienen la característica que trabajan la enseñanza de los conceptos pero permitiendo diversas formas de enfrentar la clase. A continuación se mostrarán algunas de las características generales de cada enfoque.

## 2.7.1 Enfoque Cubano

### 2.7.1.1 Componentes de un Concepto

Según la doctora Valverde todo concepto tiene dos componentes: la intensión (contenido) y la extensión. La intensión (contenido) de un concepto hace referencia a las características esenciales y sirve también para clasificar los conceptos. La extensión de un concepto está formada por todos aquellos objetos que cumplen las características esenciales de éste. Entre la intensión y la extensión del concepto se puede establecer una ley de reciprocidad, la cual consiste en que a medida que aumenta las características del concepto disminuye el número de objetos que las cumplen, y viceversa.<sup>20</sup>

La siguiente situación nos sirve para ejemplificar lo antes dicho:

EXTENSIÓN	INTENSIÓN	EXTENSIÓN	INTENSIÓN
	Dado dos conjuntos no vacíos A y B, una		A cada ángulo centra o arco, le

---

<sup>20</sup> Zillmer, Wolfgang (1981, p.189)

FUNCIÓN	función $f$ de $A$ en $B$ , denotada por: $f: A \rightarrow B$ , es una relación que cumple las dos condiciones siguientes: <ul style="list-style-type: none"> <li>- Todo elemento de <math>A</math> tiene una imagen en <math>B</math>.</li> <li>- Cada elemento de <math>A</math> tiene una y solo una imagen en <math>B</math>.</li> </ul>	FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA	corresponde uno y sólo un punto trigonométrico.
---------	---	------------------------	---

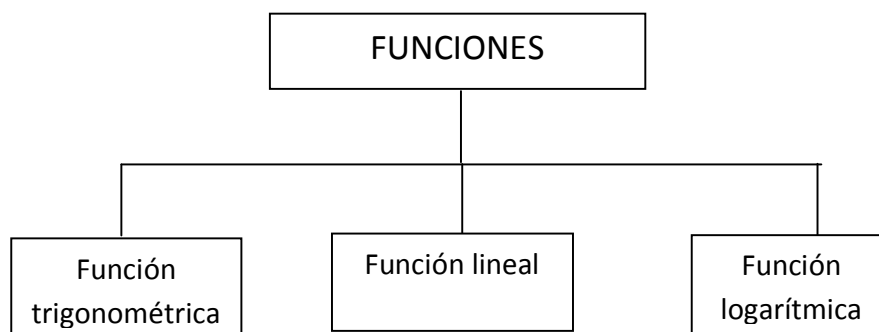
Si observamos el ejemplo anterior en la definición de función trigonométrica está inmersa la de función en general pero tiene una característica adicional.

Entre los conceptos se pueden establecer ciertas relaciones, para la doctora Valverde son:

1. CONCEPTOS SUPERIORES: son los que se originan al suprimir características esenciales al concepto inicial.
2. SUBCONCEPTO: son los que surgen al añadir características esenciales al concepto inicial.
3. CONCEPTOS COLATERALES: son los que no tienen en común ninguna característica esencial y tienen el mismo concepto superior.

Las relaciones propuestas por la doctora Valverde las podemos ver en el siguiente diagrama:





Adicional a las relaciones entre los conceptos que propone la doctora Valverde, encontramos que existen ciertas operaciones lógicas entre ellos, que son: dividir y definir.

**La división de conceptos:** esta operación consiste en obtener los subconceptos asociados a él, a partir de una razón de división. Existen ciertas reglas que hay que seguir para realizar una correcta división:

- 1) Al reunir la extensión de todos los subconceptos, se obtiene la extensión del concepto original.
- 2) Cada par de subconceptos no tiene elementos comunes.
- 3) Una división se puede efectuar sobre la base de una característica esencial (indicio).
- 4) La división debe ser continua, es decir no se pueden dar saltos.

De acuerdo con lo anterior se presenta la siguiente división para los conceptos matemáticos:

Conceptos de objetos: son los que hacen alusión a los objetos reales que se pueden caracterizar mediante representantes. Ejemplos: triángulo, círculo, cuadrado.

Conceptos de relación: son aquellos que permiten reconocer las relaciones que existen entre los objetos. Ejemplo: mayor que, menor que, igual a.

Conceptos de operación: se refieren a las acciones que se pueden efectuar con los objetos. Ejemplo: suma, resta, multiplicación.

**La definición:** es la segunda operación lógica que se puede realizar con los conceptos, por medio de esta y del lenguaje, se da cuenta la intensión de los mismos. Como es una operación lógica inicia con un enunciado y se enriquece con todas las propiedades hasta adoptar la intensión del concepto.

Los conceptos y su definición tienen una estrecha relación, sin embargo no son lo mismo.

La definición es el acto de definir, es decir, el reflejo verbal y escrito que se hace del concepto.

Definir un concepto significa explicitar algunas de las proposiciones que arman el contenido de un concepto.<sup>21</sup>

Werner Jungk entiende por definición lo siguiente:

- a. Una determinación de qué es un objeto, cómo se origina o cómo se reconoce.
- b. Una regla que establece cómo se utiliza un signo verbal; o
- c. Una determinación o una regla, que indica o establece qué significa o debe significar un signo verbal.

---

<sup>21</sup> De Zubiría, Miguel. De Zubiría, Julián. Biografía del Pensamiento, Estrategias para el desarrollo de la inteligencia. Mesa Redonda Magisterio. 1995, pág. 45.

Existen dos tipos de definiciones según Werner Jungk, que son:

Definición existencial: es donde el objeto a definir ya existe y se describe a través de sus características, y

Definiciones genéticas: en este caso se expresa cómo puede obtenerse el objeto a definir.

Pero la definición se puede representar como una equivalencia lógica entre dos elementos: el definiendum y el definiens.

El definiendum es lo que debe ser definido, ejemplo: triángulo, funciones trigonométricas, entre otros. Mientras que el definiens es la expresión mediante la cual se define.

Existen tres formas de construcción del definiens, que son:

- El definiens se compone del concepto superior y de características significativas.
- El definiens se compone de un número de axiomas que deben ser válidos para el objeto a definir (definición axiomática).
- El definiens se compone de una sucesión de indicaciones recursivas (definición inductiva).

Sin embargo para poder elaborar una definición en matemáticas y garantizar que el concepto quede correctamente definido, se debe tener en cuenta que:

1. En ambas partes de la definición existan siempre términos o formas proposicionales.

2. Haya el mismo número de variables, tanto en el definiendums, como en el definiens.

Los conceptos que aparezcan en el definiens deben ser conocidos. En particular no debe aparecer el definiendums en el definiens.

### **2.7.1.2 Elaboración de Conceptos**

Se entiende por elaboración de conceptos al proceso mediante el cual el maestro conduce a los estudiantes para el redescubrimiento del concepto, su definición y su fijación. Este proceso tiene tres fases, que son:

- 1) **Ejercicios preparatorios:** esta fase consiste en asegurar el nivel de partida, es decir, los conocimientos previos que se necesitan para el nuevo concepto.
- 2) **Formación de concepto.**
- 3) **Fijación del concepto.**

Antes de iniciar se le sugieren a los docentes determinar si el concepto va a ser definido o solamente se dará una descripción explicativa, esta última actividad se llama desde el punto de vista metodológico introducción al concepto.

El segundo aspecto a determinar se refiere a la vía que vamos a utilizar para elaborar el concepto. Para esto existen dos vías: la vía inductiva y la deductiva. Independiente de la vía que se escoja, siempre hay que tener en cuenta lo siguiente: asegurar el nivel de partida, motivar adecuadamente el tratamiento del nuevo concepto y orientar hacia el objetivo a los estudiantes.

Vamos a explicar cada una de las vías:

VÍA INDUCTIVA: en esta vía se parte de ejemplos, se buscan las características comunes de los objetos a investigar, se reconocen las características esenciales y la definición del concepto se elabora paso a paso.

PASOS:

1. Asegurar el nivel de partida, motivación y orientación hacia el objetivo.
2. Observar varios objetos materiales o materializados.
3. Comparar estos objetos y determinar las características esenciales.
4. Formar clases sobre la base de determinadas características esenciales
5. Definir el concepto.
6. Consideraciones perspectivas y retrospectivas.

VÍA DEDUCTIVA: en esta vía se parte de la definición del concepto y mediante la investigación de una serie de ejemplos se descubren la intensión y la extensión del concepto, en este caso se va de lo general a lo particular.

PASOS

1. Asegurar el nivel de partida, motivación y orientación hacia el objetivo.
2. Definir el concepto.
3. Observar varios objetos materiales o materializados para constatar que se constituyen en ejemplos del concepto definido.
4. Analizar representantes del concepto que resultan caso particulares “muy especiales”.
5. Consideraciones perspectivas y retrospectivas.

### **Fijación del Concepto**

Para esta fase la doctora Valverde tiene en cuenta a Ballester, S y otros, que consideran que los alumnos deben:

- Comprobar si un objeto o una situación representa o no un concepto, utilizando el sistema de características del concepto.
- Considerar o construir ejemplos y contraejemplos.
- Buscar otras formulaciones o apreciar otras formulaciones para la definición de un concepto. Formular la negación de la definición.
- Señalar casos límite y casos especiales.
- Subordenar el concepto en un sistema de conceptos conocidos, destacando relaciones entre ellos (conceptos superiores, subconceptos, colaterales).
- Derivar consecuencias de la definición.

Sin embargo para asimilar un concepto y por tanto fijar el conocimiento adquirido es importantes las siguientes acciones: identificar, realizar y aplicar conceptos.

**Identificar:** se entiende la determinación de la pertenencia o no pertenencia de objetos y relaciones a conceptos determinados. Naturalmente, para la identificación del concepto se utilizan ejercicios y se aumenta sistemáticamente su grado de dificultad<sup>22</sup>.

**Realizar:** en esta acción “se deben crear objetos o n-upios de objetos, o complementar o transformar los existente o relacionarlos, de manera que se originen representantes de conceptos dado”.<sup>23</sup>

La **aplicación** propone la doctora Valverde se deben analizar en dos sentidos: “la aplicación teórica” que tiene una relación indirecta con la práctica y que es adecuada para el desarrollo del pensamiento teórico de los estudiantes y la “aplicación práctica” que tiene una relación directa con el desarrollo científico técnico.

---

<sup>22</sup> Werner, Junk. Conferencias sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática. Ed. Pueblo y Educación. Cuba, 1981. Pág. 68.

<sup>23</sup> *Ibíd.* Pág.68.

La aplicación teórica se puede ver reflejada en solución de ejercicios, en la fundamentación de una proposición, en la demostración de teoremas, en la elaboración de algoritmo, entre otros.

### **2.7.2 Pedagogía Conceptual**

En la pedagogía conceptual también se establecen ciertas relaciones pero entre las clases, estas relaciones son:

1. **SUPRAORDINACIÓN:** la inclusión de una clase en otra más general. Por ejemplo: triángulo rectángulo está incluido en la clase más general de los triángulos. El concepto triángulo esta supraordinado al de triángulo rectángulo.
2. **INFRAORDINACIÓN:** es el proceso contrario al anterior. Por lo tanto, podríamos decir que al ser el triángulo rectángulo una expresión más particular de la clase general triángulo, está infraordinada al concepto más general triángulo, es decir el concepto triángulo rectángulo está incluido dentro del concepto más inclusivo previo.
3. **ISOORDINACIÓN:** se presenta cuando no existe contención sino intersección entre dos clases. Es decir, cuando ninguna de las dos está incluida dentro de la otra.

4. EXCLUSIÓN: la exclusión se presenta cuando las dos clases que caracterizan una proposición, no existe ni intersección, ni contención. Son por lo tanto dos clases independientes, es decir disyuntas.<sup>24</sup>

La Pedagogía conceptual propone la siguiente secuencia didáctica para la enseñanza de cualquier instrumento de conocimiento, en nuestro caso los conceptos: Aprehendizaje de las proposiciones aisladas (Lectura)

1) Comprensión y aplicación.

2) Profundización.<sup>25</sup>

La primera fase consiste en enseñar primero los conocimientos previos y constitutivos. Para esto se recurre a la lectura, tarea que llevan a cabo los estudiantes con escasa ayuda del profesor.

La comprensión hace referencia cuando el estudiante reconoce el carácter general, las cualidades particulares, diferencias del concepto con otros próximos y sus familias. Con esto el estudiante está en capacidad de aplicarlo, que debe ser hacia donde apunta el profesor una vez superada la extracción inicial de las proposiciones aisladas. Es decir, la tarea del profesor es propiciar las condiciones que evidencien que en efecto los estudiantes comprenden la clase general a la cual pertenece el concepto en cuestión, sus cualidades particulares, capta en qué se diferencia de otros conceptos muy semejantes y descubre sus familias o

---

<sup>24</sup> De Zubiría Samper, Julián. González Castañón, Miguel Ángel. Estrategias Metodológicas y Criterios de Evaluación. Fundación Alberto Merani, Fondo de Publicaciones Bernardo Herrera Merino. Bogotá, 1995, pág. 44 y 43.

<sup>25</sup> De Zubiría Samper, Miguel. Brito Albuja, José Guillermo y otros. Pedagogía Conceptual. Desarrollos filosóficos, pedagógicos y psicológicos. Fondo de Publicaciones Bernardo Herrera Merino. Fundación Alberto Merani. Bogotá, 1999. Pág. 52.



subclases. Esto se puede hacer mediante el método inductivo, es decir partiendo de lo particular para llegar a lo general.<sup>26</sup>

El método inductivo propone los siguientes pasos para su desarrollo:

1. Observación: consiste en poner a jugar los sentidos con el fin de determinar cuál es la información que se está suministrando.
2. Registro de hechos: a partir de la observación, el estudiante describirá que está sucediendo en cada situación planteada o gráfica, con el fin de determinar en que aspectos coinciden o se diferencian.
3. Análisis: consiste en establecer cuál es la característica que tienen en común las situaciones u objetos planteados.
4. Clasificación: en este paso se agrupan los datos que tienen una característica común y lo que no.
5. Planteamiento de hipótesis: en esta fase se propone que posible situación, hecho o concepto responde a la situación planteada.
6. Contrastación o comprobación: a partir del planteamiento de hipótesis, se entra a comprobar si cumple o no.

Otra tarea del profesor es colocar “cascaritas” problemas y presentar paradojas asociadas con el concepto a sus alumnos, con el fin de que identifiquen los elementos del concepto y lo diferencien de otros. No durante la evaluación sino durante la enseñanza.<sup>27</sup>

En el caso de la fase de profundización, esta se debe llevar a cabo cuando los conceptos son prerrequisitos genuinos de una secuencia conceptual o cuando son

---

<sup>26</sup> Ibíd. Pág. 52.

<sup>27</sup> Ibíd. Pág. 53.

conceptos base de un área determinada, solo en estos dos caso se profundiza en un concepto de resto es suficiente con que dominen el concepto.

### **2.7.3 Enseñanza para la Comprensión**

La base teórica de este apartado es tomada de la obra del profesor Walter Quispe Santos, información de sus obras se encuentra en la bibliografía. La comprensión es la habilidad de pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que uno sabe. Para decirlo de otra manera, la comprensión de un tópico es la "capacidad de desempeño flexible" con énfasis en la flexibilidad, o de otro modo es la capacidad de usar el conocimiento de maneras novedosas. La comprensión se puede dilucidar de dos formas: desde una visión vinculada al desempeño y desde una visión representacional.

En la visión de la comprensión vinculada con el desempeño, los criterios comunes para apreciar la comprensión en las personas desde el sentido común son: primero, poner su comprensión en juego, es decir, explicando, resolviendo un problema, construyendo un argumento, armando un producto; segundo, lo que los educandos responden no sólo demuestra su nivel de comprensión actual, sino que lo más probable es que los haga avanzar. Al trabajar por medio de su comprensión en respuesta a un desafío particular, llegan a comprender mejor, aquí se reconoce la comprensión por medio de un criterio de desempeño flexible.

La comprensión se presenta cuando la gente puede pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que sabe, en cambio, cuando un educando no va más allá de la memorización y el pensamiento y la acción rutinaria nos indica falta de comprensión, entonces comprender un tópico quiere decir ni más ni menos que ser capaz de desempeñarse flexiblemente en relación con el tópico: explicar, justificar, extrapolar, vincular y aplicar de maneras que van más allá del conocimiento y la habilidad rutinaria.

En la visión representacional de la comprensión se piensa la comprensión como algún tipo de representación, imagen o modelo mental que tienen las personas. Cuando se logra comprender algo se dice en el lenguaje cotidiano: "lo tengo", "veo lo que dice", "veo el sentido", "veo a través de ti", "veo la respuesta", "veo la trampa" estas expresiones vinculan la percepción con la comprensión; así, la comprensión como visión exige alcanzar una representación mental que capta lo que ha de comprenderse. Por lo tanto, la comprensión depende de adquirir o construir una representación adecuada de algún tipo, un esquema, modelo mental o imagen. Existen dos tipos diferentes de representaciones, en primer lugar tenemos los modelos mentales, este tipo de representaciones son objetos mentales que la gente manipula, maneja o recorre con el ojo de la mente, en segundo lugar están los esquemas de acción que considera que las representaciones están en el trasfondo, que el ojo interno no las inspecciona conscientemente sino que en cierta forma guían nuestras acciones. La comprensión puede darse a partir de la comprensión en acto que pasa por la prueba de desempeño flexible, porque todas las formas de comprensión son parciales, uno nunca entiende todo acerca de algo.

La enseñanza para la comprensión busca que a los educandos se les permita ser pensadores críticos, gente que plantea y resuelve problemas y que es capaz de sortear la complejidad, ir más allá de la rutina y vivir productivamente en este mundo en rápido cambio y se apoya con toda claridad en la convicción, de larga data, de que las escuelas deben comprometer a los alumnos de manera más intensa y contar con la comprensión como su pieza central.

### **2.7.3.1 Proyecto de Investigación sobre la Enseñanza para la Comprensión**

La mejor forma de promover la enseñanza para la comprensión se desarrolla asumiendo el currículo como un proyecto de investigación en la acción o acción

reflexión que supera las relación unidireccional de especialistas, docentes y alumnos donde no existe una práctica dialogante, al contrario las relaciones entre educadores y educandos se desarrollan a partir de decisiones unidireccionales.

El conocimiento, la capacidad o habilidad y la comprensión son los materiales que se intercambian en la educación, así como los valores que suponen los procesos de enseñanza y de aprendizaje, así las relaciones praxis – axiología son praxiológicas. La enseñanza para la comprensión involucra a los educandos en los desempeños de comprensión, para cuyo efecto es necesario responder a algunos interrogantes y elementos. Las preguntas claves determinan qué contenidos deben comprenderse identificando temas relevantes y pertinentes a través de temas generativos y organizando propuestas curriculares alrededor de ellas; además clarifica lo que los estudiantes tienen que comprender articulando metas claras centradas en comprensiones clave, motiva el aprendizaje de los educandos involucrándolos en desempeños de comprensión o capacidades que exigen que éstos apliquen, amplíen y sinteticen lo que saben, y controla y promueve el avance de los educandos por medio de evaluaciones diagnósticas continuas de sus desempeños o capacidades, habilidades, destrezas con criterios directamente vinculados con las metas de comprensión.

<b>Preguntas Clave</b>	<b>Elementos</b>
¿Qué contenidos vale la pena comprender?	Contenidos Generativos
¿Qué aspectos de esos contenidos deben ser comprendidos?	Metas de comprensión.
¿Cómo podemos promover la comprensión?	Desempeños de comprensión
¿Cómo podemos averiguar lo que	Evaluación diagnóstica continúa.

comprenden los alumnos?	
-------------------------	--

### **2.7.3.2 ¿Qué contenidos vale la pena comprender? Contenidos generativos**

Determinar el contenido del currículo socialmente relevante, culturalmente pertinente y personalmente significativo se vincula necesariamente con los intereses y necesidades, preocupaciones y experiencias que se ocupan los educandos en su vida cotidiana. La toma de decisiones sobre el currículo parte de las reflexiones de vincular el trabajo escolar y la vida cotidiana de los alumnos. Los educadores deben seleccionar el contenido y ajustar la forma del currículo para responder a las necesidades de los educandos. La selección de los contenidos no sólo debe ser información en cantidad y calidad, sino que debe involucrar a los alumnos en constantes espirales de indagación que los lleven desde un conjunto de respuestas hacia preguntas más profundas.

Los criterios que se recomiendan para seleccionar contenidos plantean como punto de partida que el tema generativo sea central para el dominio de la disciplina, que sea accesible e interesante para los educandos, que excite las pasiones intelectuales del docente y se conecte fácilmente con otros contenidos tanto dentro como fuera del dominio de un área curricular.

### **2.7.3.3 ¿Qué aspectos de esos contenidos deben ser comprendidos? Metas de comprensión**

Las metas de comprensión afirman explícitamente lo que se espera que los alumnos lleguen a comprender, es decir, definen de manera específica las ideas, procesos, relaciones o preguntas que los alumnos comprenderán mejor por medio de la investigación acción o acción reflexión.

Las capacidades específicas, se encuentran relacionadas con las características y naturaleza de las distintas áreas y las mismas vienen a constituir desempeños de comprensión que se traducen en competencias, habilidades, destrezas, y otros. En esta parte es necesario que los educadores realicen una distinción de las diferentes metas de comprensión, en ese caso, las capacidades fundamentales, de área y las específicas; así como, las metas finales y las intermedias, este tipo de reflexiones corresponde también con la configuración de los perfiles reales, potenciales e ideales, los perfiles reales nos permiten determinar la situación en que se encuentran los estudiantes, los perfiles potenciales son metas intermedias y los perfiles ideales vienen a constituir las metas finales después de la experiencia escolar. Cabe señalar que las metas de comprensión no son objetivos conductuales estrechos. Por eso es necesario responder al interrogante ¿qué es lo que queremos que los alumnos comprendan al final de su semestre, trimestre o de su año? Por lo que puede haber metas de comprensión de corto, mediano y largo plazo.

Finalmente, las metas de comprensión son explícitas y públicas. Explícitas porque deben ser claramente establecidas de acuerdo con los intereses y necesidades de los alumnos. Para atender a la diversidad de las mismas propongo la posibilidad de objetivos comunes y objetivos personales. Públicas, porque deben ser de conocimiento pleno de la comunidad escolar, lo que permitirá que todos conozcan hacia dónde se avanza y cuánto se ha conseguido. Por otro lado, las mismas deben estar dispuestas en una estructura compleja para señalar sus conexiones, relaciones, lo supraordenado y subordinado, lo principal y lo secundario, el objetivo general y el específico, la capacidad de área y la capacidad específica, las competencias de año y las de un periodo o de una experiencia de aprendizaje. Y por último, deben ser centrales en la materia o área, es decir, en las ideas, modalidades de investigación y formas de comunicación y diálogo que son condicionantes para la comprensión.

#### **2.7.3.4 ¿Cómo podemos promover la comprensión? Desempeños de comprensión**

Los desempeños de comprensión son las capacidades e inclinación de usar lo que uno sabe cuando actúa en la realidad natural y social. La comprensión por lo tanto se desarrolla y demuestra poniendo en práctica la comprensión, y los mismos parten de niveles simples hasta llegar a unos más complejos. El valor de los desempeños es central en el proceso y resultado, además de la evaluación diagnóstica en la educación. Este enfoque por lo tanto, centra más su atención en la actividad de los educandos y no tanto de los educadores, aquí la atención en los criterios, indicadores y sobre todo las actividades de desempeño son prioritarios. Las capacidades específicas de cada área cuando son extendidas, sintetizadas, o aplicadas o usadas de una u otra forma, además de manera creativa y novedosa a través de los desempeños representa las mejores evidencias de los mismos. En suma, se trata de responder al interrogante ¿Qué pueden hacer los estudiantes para desarrollar y demostrar su comprensión?

Es evidente que los educadores se encuentren con diferentes desempeños de comprensión debido a los ritmos y estilos de aprendizajes diversos y diferentes de los educandos. El reconocimiento de diferentes tipos de comprensión, también nos conduce a tener en cuenta de los desempeños preliminares o subdesempeños necesarios con el fin de desarrollar ideas y procesos que pueden sintetizar en el desempeño o producción textual. Así mismo, existe algo importante al que se debe prestar atención: los intereses de los alumnos y en el objetivo de las metas de comprensión para que las cadenas de desempeños fueran generativas y plantearan un desafío. En este aspecto hay tres categorías comunes. La primera etapa de exploración basada en la investigación inicial permite acercar a los educandos al principio de unidad, la presentación del todo del contenido o materia y al dominio del contenido generativo y sus experiencias previas. La segunda etapa se refiere a la investigación guiada donde los educandos utilizan sus ideas y

las diferentes modalidades de investigación que el educador considera centrales e importantes para la comprensión de las metas identificadas. Es necesario que el educador explicita como habíamos destacado antes el por qué de los contenidos que se aprende para que los educandos le den sentido a sus aprendizajes, la importancia y utilidad de las mismas. Existen habilidades básicas y complejas cuya gradualidad están en función directa de las metas de comprensión. Finalmente, el proyecto final de síntesis donde se exponen los resultados y los educandos demuestran con claridad el dominio de las metas establecidas. Las metas de comprensión pueden ser entendidas de diversas formas como fines, metas, capacidades, objetivos, propósitos y se articulan al alcance y a las dimensiones de comprensión mediante conocimientos, metas, propósitos y formas de expresión. Las actividades y experiencias que tienen lugar en el aula o fuera de ellas son concebidos como desempeños de comprensión sí solo sí desarrollan y demuestran la comprensión vía la investigación.

#### **2.7.3.5 ¿Cómo podemos averiguar lo que comprenden los educandos? Evaluación diagnóstica y continúa**

La forma de averiguar lo que comprenden los educandos es a través de la evaluación diagnóstica continua de desempeños en relación con las metas de comprensión. Un principio es importante al respecto: si la enseñanza es efectiva, la valoración del propio desempeño se vuelve casi automática. La evaluación es descriptiva, ya que el educador va registrando los avances en la comprensión de acuerdo con los estilos y ritmos de aprendizaje personalizados de los educandos, y luego podrá compararlos con las metas de comprensión que generalmente se prescriben en las formas de evaluación de la comprensión deseada e intencional. Aquí es necesario redimensionar el valor singular y social de la educación a través de la autoevaluación, coevaluación y heteroevaluación y las formas de evaluación meta, debido a que ayuda a integrar mejor la perspectiva holística de los



contenidos investigados, los instrumentos intelectuales y las operaciones intelectuales construidos en el aula o fuera de ella.

### **3. DISEÑO METODOLÓGICO**

#### **3.1 TIPO DE INVESTIGACIÓN**

El tipo de investigación es mixta, es decir, presenta datos cualitativos debido a que el análisis se hace descriptivamente por tratarse de una investigación de procesos educativos y el análisis se soporta con algunos datos cuantitativos.

El enfoque es cuasiexperimental ya que los grupos no fueron seleccionados al azar sino que estaban ya conformados.

De acuerdo con esto el diseño escogido para llevar a cabo la investigación fue: preprueba – postprueba – grupo control.

#### **3.2 CARACTERIZACIÓN DE LA POBLACIÓN**

La población son aproximadamente 160 estudiantes pertenecientes a los grados décimos de la Institución Educativa Escuela Normal Superior de Medellín, ubicada en el barrio Villa Hermosa al Nororiente de Medellín.

Las características de la población son: estudiantes entre los 15 y 17 años de edad, pertenecientes a los estratos 1, 2 y 3, ninguno con diagnóstico de enfermedades cognitivas.

Los estudiantes presentan diferencia a nivel económico y social, encontrando algunos con dificultades muy grandes en estos campos y otros que tienen solucionado sus necesidades básicas. Igualmente se identificaron algunos que pertenecen a tribus urbanas como: emos, punkeros, roqueros, entre otros.

Se debe tener en cuenta que del total de estudiantes, solo dos están repitiendo el grado décimo.

### **3.3 TIPO DE MUESTRA**

El tipo de muestra seleccionado es no probabilístico ya que los grupos estaban conformados desde el inicio del año lectivo, por tanto no se podían hacer cambios. Otros factores que influyeron en que fuera este tipo de muestra es que los investigadores van a intervenir en el grupo seleccionado de acuerdo a su disponibilidad horaria.

Por lo anterior, el total de la muestra intervenida fue de 120 estudiantes pertenecientes a los grados 10°A, 10°B y 10°C, e l grado 10°D fue seleccionado como grupo control. Sin embargo, la aplicación de los instrumentos se realizó a un total de 69 estudiantes, debido a que estos fueron los que se hicieron presentes en ambas pruebas: diagnóstica y de salida, esta última se llevo a cabo en horario extraclase.

### **3.4 PROPUESTA METODOLÓGICA**

La propuesta metodológica consta del diseño y estructuración de las clases de acuerdo con lo que propone: la enseñanza para la comprensión, el enfoque cubano y la pedagogía conceptual, cada una de estas metodologías es aplicada por separado en los grupos seleccionados para la muestra.

Cada una de estas se implementaron en la enseñanza de los conceptos de parábola y razones trigonométricas, este último en su nivel de aplicación, con el fin de determinar los cambios generados en el razonamiento matemático.

El tiempo dedicado a la intervención fue aproximadamente de 20 horas de clase, distribuidas así: 14 horas en razones trigonométricas en su fase de aplicación (ley del seno y del coseno) y 6 horas en el concepto de parábola.

A continuación se explica que actividades se realizaron en la intervención y el diseño de las clases de acuerdo con cada metodología, es de anotar que al final del trabajo sobre el concepto de parábola se aplicó un taller igual a los tres grupos de intervención, lo mismo que al de control, Ver anexo 1:

### **Enseñanza para la Comprensión**

La enseñanza para la comprensión se caracteriza por tener cuatro fases, las cuales se propone aplicar de la siguiente manera:

Primero se diseñaron las preguntas esenciales o temas generativos que guían el desarrollo de las clases sobre los teoremas del seno y del coseno y el concepto de parábola, las metas de comprensión y los desempeños de comprensión (Ver anexo 2).

Para poder cumplir con la consecución de estos desempeños la intervención se realizó en las siguientes etapas: La primera fase es la exploración donde se explica a los estudiantes la tarea a realizar, se presenta el problema a resolver y se indaga sobre las posibilidades que tienen los alumnos para enfrentarse al problema, qué nociones y conceptos se manejan y qué procedimientos se tienen claros, además la actitud que tienen los estudiantes para enfrentar la tarea; además de esto se arman los equipos de trabajo con los roles que cumplirá cada uno de los estudiantes, para la enseñanza del concepto de parábola (ver anexo 3) y para la enseñanza del concepto de razones trigonométricas en su última fase (ver anexo 4). En la segunda fase, investigación guiada, los estudiantes enfrentan el problema teniendo como base para esto los conocimientos iniciales y con la

posibilidad de la búsqueda de información que se requiera; aquí el papel del docente fue importante guiando el proceso (ver anexo 3A y 5). En la tercera fase del proceso, el proyecto de síntesis, por medio de exposiciones de los equipos de trabajo se presenta a todo el grupo de estudiantes los resultados a los que llegó cada uno de los equipos y se dan los debates sobre cada propuesta formalizando el docente los procesos realizados y encontrando dificultades, aciertos, errores y aciertos (Ver anexo 3B y 5).

La aplicación se realizó con los siguientes pasos que conforman las fases anteriormente explicadas:

1. Actividad previa: el profesor da al grupo una breve introducción a la tarea, con el propósito de ubicar a los estudiantes en contextos similares a la actividad; destacando la importancia que representa su participación en el desarrollo de la sesión. Se plantea el problema a resolver para que los estudiantes comiencen a relacionar la introducción realizada con los conceptos previos manejados por ellos.
2. Trabajo en equipos: se organizan en equipos, procurando que en cada uno haya estudiantes con distintos niveles de desempeño, que tengan la posibilidad de interactuar entre ellos y los demás equipos, así como de expresar y comunicar sus ideas. Al concluir el periodo asignado al trabajo por equipos, cada uno entrega su reporte de solución.
3. Presentaciones: cada equipo presenta a todo el curso su solución a la tarea, permitiendo que los miembros de los demás equipos pregunten libremente a quienes exponen.
4. Discusión colectiva: el profesor promueve la discusión colectiva entre los estudiantes, con la idea de analizar ventajas y desventajas de los diferentes

métodos de solución presentados y, cuando sea necesario, realiza una sistematización de las ideas e identifica posibles extensiones del problema.

5. Trabajo individual: enseguida, a partir de la discusión colectiva, los estudiantes tienen la posibilidad de volver a la actividad y aplicar los nuevos entendimientos que se generaron como producto de la interacción y abordan individualmente la tarea.
6. La evaluación se realizó sobre el trabajo en equipo, el reporte escrito de la resolución de las tareas, los exámenes realizados sobre los conceptos, el grado de participación de los estudiantes durante las clases.

### **Pedagogía Conceptual**

Esta estrategia metodológica propone tres fases para la enseñanza de los conceptos, que son:

- 1) Aprehendizaje de las proposiciones aisladas:** para esta fase se les entregó un documento llamado “Recordemos” a los estudiantes, con los conocimientos previos para la enseñanza del concepto de parábola (ver anexo 6), en la clase se resolvieron las dudas generadas en la lectura, para el concepto de razones trigonométricas en su nivel de aplicación, se realizó a través del dialogo heurístico (ver anexo 7), ya que venían trabajando este tema durante el año escolar.
- 2) Comprensión:** en esta fase se utilizó el método inductivo y el dialogo heurístico para la enseñanza de razones trigonométricas en su fase de aplicación (ver anexo 8), para la enseñanza del concepto de parábola se apoyo en actividades didácticas como la papiroflexia y cortes al cono,

igualmente se apoyo con el dialogo heurístico y unas preguntas orientadoras (ver anexo 9).

- 3) Aplicación:** para esta fase se propone llevar ejercicios y problemas donde los estudiantes apliquen los procesos de pensamiento, es decir, que observen, describan, comparen situaciones y variables y utilicen los conceptos aprendidos con el fin de llegar a la solución. Para la última fase de la enseñanza de razones trigonométricas se llevaron varios ejercicios y problemas de este tipo (ver anexo 8) y para el concepto de parábola se aplico un taller en común para todos los grupos (ver anexo 1)

### **Enfoque Cubano**

Este enfoque se desarrollo en los siguientes pasos: ejercicios preparatorios, formación del concepto y fijación del concepto; propuestos así:

- 1. Ejercicios preparatorios:** para el concepto de razones trigonométricas en su fase de aplicación (ley del seno y del coseno) se realizó una actividad de reconocimiento de las diferentes partes del triángulo y las razones trigonométricas en triángulos rectángulos (ver anexo10). Para el concepto de parábola se realizó por medio del dialogo en el concepto de distancia entre punto – punto y punto – recta (ver anexo 11).

Estas dos actividades se desarrollaron con el fin de que todos los estudiantes estén al mismo nivel ya que se evidenció que no manejan estos conceptos, es decir se aseguró el nivel de partida.

- 2. Formación del concepto:** para esta fase se utilizó la vía inductiva, para el caso de la leyes del seno y coseno se realizó la demostración apoyándose en el dialogo heurístico (ver anexo 12).

El concepto de parábola se desarrolló mediante la construcción de regla y cuerda, esta herramienta nos permite identificar las características principales para construir el concepto y sus propiedades, además de la deducción de su expresión matemática (ver anexo 13).

**3. Fijación del concepto:** en esta última fase, se aplicó actividades con ejercicios y problemas, con los cuales se evidencia que aplican, realizan e identifican el concepto (ver anexo 14).

Se presenta para este enfoque la preparación de dos clases que se llevaron a cabo para trabajar el concepto de parábola, siguiendo los pasos propuestos por este (ver anexo 15)

### 3.5 INSTRUMENTOS

Para determinar los avances en los estudiantes durante el proceso de intervención se propone utilizar los siguientes instrumentos:

#### **OBSERVACIÓN** (Ver anexo 16)

Para registrar las observaciones en las diferentes clase se utilizó el siguiente formato:

<b>TIPO DE INSTRUMENTO:</b>	<u>OBSERVACIÓN</u>
<b>FECHA:</b>	_____
<b>GRADO:</b>	_____
<b>ESTUDIANTE:</b>	_____
<b>CONCEPTO:</b>	_____



PROCESO DE PENSAMIENTO A MEDIR		
INDICADORES	SI	NO
OBSERVACIÓN		

NOMBRE DEL OBSERVADOR

---

Este instrumento se puede utilizar para tomar datos de toda la clase o para realizar seguimientos a algunos alumnos sobre procesos esenciales que se estén trabajando. Inicialmente se hace la caracterización del grupo o del estudiante, la fecha, el concepto a trabajar y el o los procesos a trabajar como esenciales en esa clase, así como los indicadores que me demuestran los procesos, es decir que permiten que estos procesos se visualicen. El observador analiza las actitudes, los procedimientos y desempeños que en general o particularmente realicen los estudiantes y los consigna en las observaciones, así como las dificultades que se presentaron. Este instrumento es base para la preparación de nuevas clases ya que permite funcionar como diagnóstico del programa de mejoramiento.

## PREPRUEBA (Ver anexo 17)

Consiste en la aplicación de una prueba que nos va a dar una idea de cuáles son los procesos de pensamiento que utilizan los estudiantes en el razonamiento matemático.

En esta prueba se evaluaron los siguientes procesos de pensamiento e indicadores de cada uno:

PREGUNTA	PROCESO DE PENSAMIENTO A MEDIR
1	RELACIÓN
2	COMPARACIÓN (NOCIÓN DE ÁREA POR RECUBRIMIENTO)
3	COMPARACIÓN (DIFERENCIA DE NIVEL, MÁS ALTO)
4	RELACIÓN
5	PLANTEAMIENTO DE HIPÓTESIS
6	RELACIÓN
7	PLANTEAMIENTO DE HIPOTESIS
8	COMPARACION
9	RELACIÓN
10	COMPARACIÓN
PREGUNTA	INDICADORES DE LA PRUEBA
1	Establece los nexos esenciales entre las variables del problema
2	Establece diferencias y semejanzas entre variables
3	Establece diferencias y semejanzas entre variables
4	Establece los nexos esenciales entre las variables del problema
5	Plantea y verifica posibles soluciones al problema
6	Establece los nexos esenciales entre las variables del problema

7	Plantea y verifica posibles soluciones al problema
8	Resuelve problemas partiendo de lo particular a lo general
9	Establece los nexos esenciales entre las variables del problema
10	Propone enunciados como posibles soluciones a un problema.

### **POSPRUEBA (Ver anexo 18)**

Esta prueba se aplicó después de haber realizado la intervención en los diferentes grupos, con el objetivo de medir el mejoramiento de los procesos de pensamiento que los estudiantes utilizan para el razonamiento matemático.

Es de aclarar, que los procesos se analizan en preguntas que evalúan el razonamiento matemático en situaciones diferentes a las trabajadas en la clase, para determinar cómo este se da en condiciones diversas al área y a la vida cotidiana que es el objetivo planteado para la matemática por los Lineamientos Matemáticos.

Las preguntas que se evaluaron fueron tomadas de los Lineamientos Curriculares, pruebas de ingreso a la Universidad de Antioquia y de problemas de razonamiento de programas de mejoramiento de la inteligencia.

Los procesos evaluados y el registro de datos se consignarán en el siguiente formato:

**TIPO DE INSTRUMENTO:** PRUEBA DE SALIDA

**FECHA:** 22 DE JULIO DE 2008

**GRADO:** 10°B

<b>PREGUNTA</b>	<b>PROCESO DE PENSAMIENTO A MEDIR</b>
-----------------	---------------------------------------

1	PLANTEAMIENTO DE HIPÓTESIS					
2	COMPARACIÓN					
3	COMPARACIÓN (NOCIÓN DE ÁREA POR RECUBRIMIENTO)					
4	COMPARACIÓN					
5	RELACIÓN					
6	COMPARACIÓN					
7	RELACIÓN					
8	RELACIÓN					
9	PLANTEAMIENTO DE HIPÓTESIS					
10	RELACIÓN					
PREGUNTA	BUENAS	BIEN ARGUMENTADAS	MAL ARGUMENTADAS	NO ARGUMENTADAS	MALAS	NC
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
<b>TOTAL</b>	0	0	0	0	0	0

Para diligenciar este formato se debe realizar lo siguiente:

- Fecha: se ingresa la fecha en que se llevo a cabo la prueba.
- Grado: es el grupo donde se esta realizando la prueba.
- Procesos: hace referencia a los procesos que se están evaluando en cada pregunta.

- Buena: hace referencia a la cantidad de respuestas correctas a cada una de las preguntas de la prueba. Estas se dividieron en:
  - Bien argumentadas: es la cantidad de respuestas con una argumentación válida.
  - Mal argumentada: hace referencia a la cantidad de preguntas con una argumentación que no corresponde a lo preguntado.
  - No argumenta: es la cantidad de preguntas que no fueron argumentadas.
- Malas: hace referencia a la cantidad de respuestas incorrectas a cada una de las preguntas de la prueba.
- No contestadas: hace referencia a la cantidad de preguntas que no fueron contestadas.

Igualmente se registrará los resultados por cada estudiante, para esto se utilizará el siguiente formato (Ver anexo 19 Y 20):

**TIPO DE INSTRUMENTO: PRUEBA DE SALIDA**

**FECHA:**

**GRADO:**

**ESTUDIANTE:**

---



---



---

ASPECTOS A MEDIR	
PREGUNTA	PROCESOS
1	PLANTEAMIENTO DE HIPÓTESIS
2	COMPARACIÓN
3	COMPARACIÓN (NOCIÓN DE ÁREA POR RECUBRIMIENTO)
4	COMPARACIÓN
5	RELACIÓN
6	COMPARACIÓN

	7	RELACIÓN			
	8	RELACIÓN			
	9	PLANTEAMIENTO DE HIPÓTESIS			
	10	RELACIÓN			
<b>PREGUNTA</b>		<b>INDICADORES DE LA PRUEBA</b>	<b>SI</b>	<b>NO</b>	<b>NC</b>
	1	Propone enunciados como posibles soluciones a un problema.			
	2	Propone enunciados como posibles soluciones a un problema.			
	3	Establece diferencias y semejanzas entre variables			
	4	Establece diferencias y semejanzas entre variables			
	5	Establece nexos esenciales entre las variables para resolver el problema.			
	6	Establece diferencias y semejanzas entre variables			
	7	Establece nexos esenciales entre las variables para resolver el problema.			
	8	Establece nexos esenciales entre las variables para resolver el problema.			
	9	Propone enunciados como posibles soluciones a un problema.			
	10	Establece nexos esenciales entre las variables para resolver el problema.			

NOMBRE

---

Para diligenciar este formato se debe realizar lo siguiente:

- Fecha: se ingresa la fecha en la cual se realizo la prueba.

- Grado: grupo al que pertenece el estudiante.
- Estudiantes: se ingresa el nombre del estudiante que se esta evaluando.
- Procesos: hace referencia a los procesos que se están evaluando en cada pregunta.
- Indicadores: como cada pregunta tiene un nivel a este le corresponde un indicador, aquí se pone el indicador y de ahí se procede a lo siguiente: se marca con una X la opción SI cuando el estudiante resuelve bien el punto, se marca con una X la opción NO cuando el estudiante no resuelve bien el punto y se marca con una X la opción NC cuando el estudiante no responde la pregunta.

Se tuvo en cuenta la opción No contesta porque no se puede determinar en que nivel de razonamiento matemático esta el estudiante, debido a que pueden haber otros factores que determinaron en que el estudiante no contestara la pregunta.

Para hacer las comparaciones pertinentes entre la preprueba y la postprueba se ha creado una lista de indicadores que nos permitirá medir que tanto ha avanzado cada estudiante. Estos indicadores fueron hechos para cada uno de los niveles del razonamiento matemático.

Los indicadores son:

**OBSERVACIÓN:** Identifica las variables y datos del problema.

**DESCRIPCIÓN:** Representa gráficamente la situación planteada.

**COMPARACIÓN:** Establece diferencias y semejanzas entre variables.

**RELACIÓN:** Establece nexos esenciales entre las variables para resolver el problema.

**CLASIFICACIÓN:** Forma clases pertinentes de acuerdo con las características esenciales.

**RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS:** Resuelve el problema haciendo uso de un principio o regla conceptual.

**PLANTEAMIENTO DE HIPÓTESIS:** Propone enunciados como posibles soluciones a un problema.

**ANÁLISIS:** Divide de manera sistemática y organizada situaciones complejas en otras más simples o elementales.

**SÍNTESIS:** Integra elementos, relaciones, propiedades, o partes para formar entidades o totalidades nuevas y significativas.



#### 4. DESCRIPCIÓN Y ANALISIS DE RESULTADOS

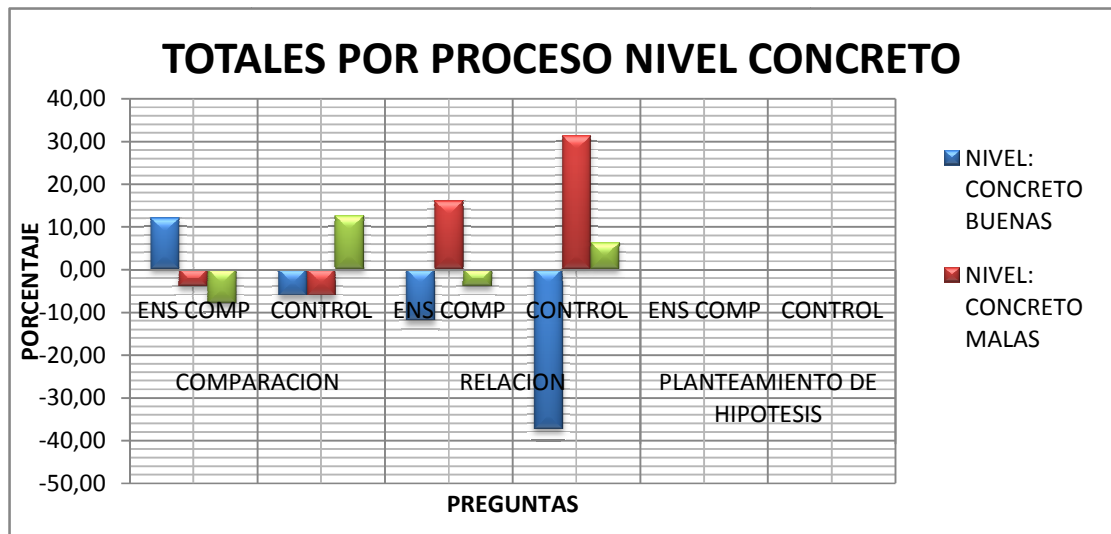
##### 4.1 COMPARACIÓN RESULTADOS GRUPO CONTROL VS. GRUPOS INTERVENIDOS

###### 4.1.1 Enseñanza Para La Comprensión Vs. Grupo Control

###### 4.1.1.1 Totales Por Proceso Y Nivel De Complejidad

###### NIVEL: CONCRETO

		BUENAS	MALAS	NC
COMPARACIÓN	ENS COMP	12,00	-4,00	-8,00
	CONTROL	-6,25	-6,25	12,50
RELACIÓN	ENS COMP	-12,00	16,00	-4,00
	CONTROL	-37,50	31,25	6,25
PLANTEAMIENTO DE HIPÓTESIS	ENS COMP	0,00	0,00	0,00
	CONTROL	0,00	0,00	0,00



El gráfico muestra el comportamiento del grupo control y el grupo intervenido bajo el enfoque de Enseñanza para la Comprensión (EpC) según los procesos de razonamiento y nivel de este en la prueba de salida. La barra de color verde indica las preguntas no contestadas de estos procesos, las azules las respuestas buenas y las rojas las respuestas malas.

Como se puede observar en el nivel de comparación el grupo control disminuyó el total de preguntas contestadas correctamente en un 6.25% con respecto a lo presentado en la prueba de entrada (los datos completos de la prueba de entrada y salida del grupo control y del grupo intervenido se pueden encontrar en los análisis por enfoque) mientras que el grupo intervenido aumento en un 12% el porcentaje de preguntas correctas en este nivel. Esto permite determinar una mejora en este proceso de razonamiento, es decir frente al establecimiento de diferencias y semejanzas entre variables, lo cual es base para poder determinar posibles relaciones en los procesos de análisis de problemas para su resolución.

En el proceso de relación hay un decrecimiento en el porcentaje de preguntas correctas en ambos grupos, lo interesante es ver que mientras el descenso en el

grupo control fue de un 37.5%, para el grupo intervenido este descenso estuvo en el orden del 12%.

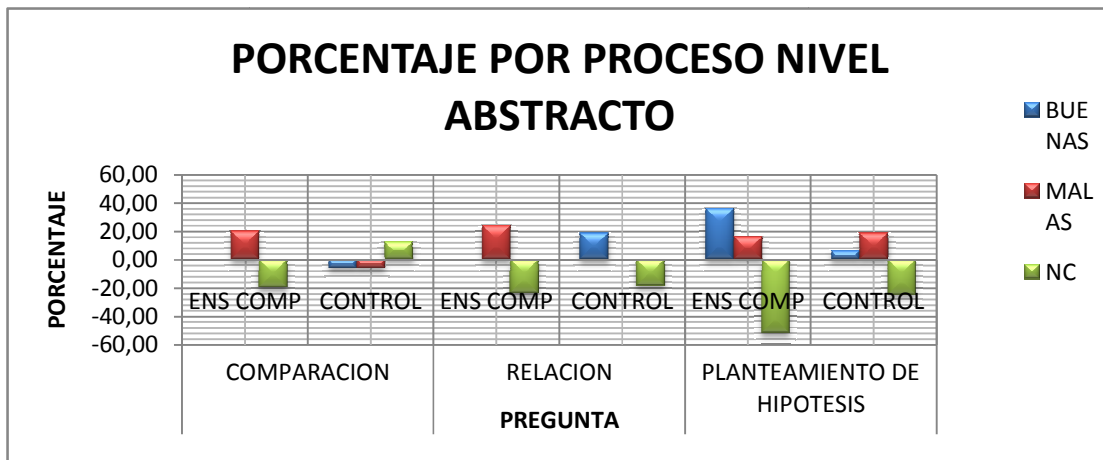
Para el planteamiento de hipótesis en este nivel no se realiza comparación ya que no se encuentra un par entre la prueba diagnóstica y la prueba de salida

Estos resultados muestran que los estudiantes mejoraron en sus posibilidades de encontrar semejanzas y diferencias entre las variables de un problema, cuando estas variables son concretas, es decir cuando se refieren a características básicas de los objetos que intervienen en el problema, pero que en el momento de encontrar nexos entre estas variables tienen dificultades. Esto puede considerarse razonable ya que el proceso de relación tiene mayor nivel de complejidad que la comparación.

A nivel abstracto los resultados son los siguientes:

**NIVEL: ABSTRACTO**

		<b>BUENAS</b>	<b>MALAS</b>	<b>NC</b>
COMPARACIÓN	ENS COMP	0,00	20,00	-20,00
	CONTROL	-6,25	-6,25	12,50
RELACIÓN	ENS COMP	0,00	24,00	-24,00
	CONTROL	18,75	0,00	-18,75
PLANTEAMIENTO DE HIPÓTESIS	ENS COMP	36,00	16,00	-52,00
	CONTROL	6,25	18,75	-25,00



El gráfico mantiene las características del anterior en lo que tiene que ver con las convenciones, pero los resultados mostrados son los de los procesos de razonamiento a nivel abstracto, es decir con la necesidad de que estos procesos se realicen teniendo en cuenta los conceptos inmersos en cada una de las preguntas.

En este caso se puede observar que el grupo intervenido mantiene el número de preguntas correctas que tenía en la prueba de salida en los procesos de comparación y relación, mientras que en estos procesos el grupo control muestra un descenso en la comparación y un avance en la relación. Esto puede ser contradictorio ya que el proceso de relación es de mayor complejidad y para poder realizarlo es necesario que se realicen antes las comparaciones, en este caso, entre los conceptos inmersos en el problema para determinar los más relevantes y sobre esta base encontrar las semejanzas entre ellos lo que guiará el proceso de relación. Estas diferencias, pueden mostrar una posibilidad de azar en los resultados de este proceso. Para determinar que tanto el azar pudo intervenir en estos resultados se analizan más adelante los resultados frente a la argumentación que se hizo de las preguntas que estuvieron correctas.

En el proceso de planteamiento de hipótesis el grupo control mostró un aumento del 6.25% y el grupo intervenido un aumento del 36%. Estos porcentajes permiten inferir una mejora significativa en la capacidad de los estudiantes del grupo intervenido para plantear y verificar posibles soluciones a los problemas planteados a nivel abstracto. Este resultado era de esperarse ya que el centro del desarrollo de esta intervención estuvo en la indagación de posibles soluciones, el planteamiento de estas, su sustentación, el llevarlas a cabo, verificar el grado de validez de lo propuesto y proponer posibles mejoras a estas propuestas.

En el proceso de razonamiento este nivel juega un papel primordial pues es el inicio de procesos de análisis de mayor nivel, ya que sobre la base de las posibles soluciones se realiza la división del problema para su resolución. En este sentido lo que se vislumbra son unos estudiantes que ante un problema arriesgan una posible solución y la ponen en práctica teniendo en este caso la posibilidad de equivocarse y tener que plantear una nueva posibilidad haciendo que el proceso de razonamiento se mantenga activo y realizando rastreos por cada uno de los procesos anteriores a este.

Revisando cada uno de los procesos evaluados en las pruebas se puede observar que en general se mejoró en todos los procesos, mostrándose de esta manera un avance en el razonamiento, es decir se logra que problemas que requieren procesos de pensamiento a nivel abstracto sean primero enfrentados por más estudiantes (lo cual se observa en la disminución de las preguntas no contestadas), y resueltos de mejor manera también por un mayor número de estudiantes.

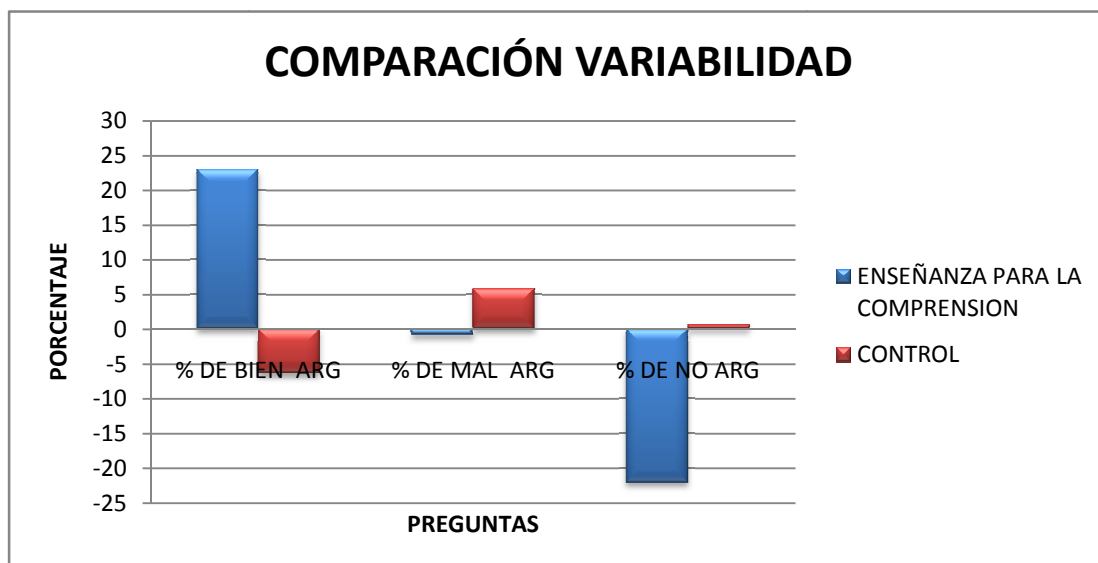
Habría en este caso un dato algo contradictorio y es el que exista una mejora en la relación a nivel abstracto, es decir descubriendo y aplicando los nexos entre los conceptos involucrados en cada uno de estos problemas y no hacerlo con los nexos entre características de objetos como en el caso del nivel concreto, una

posible explicación a estos resultados puede ser el interés que se puso en la intervención a la relación que se debía buscar entre los conceptos matemáticos ya estudiados para la resolución de los problemas planteados y para poder formar nuevos conceptos.

#### 4.1.1.2 Totales Por Argumentación

Las siguientes gráficas y tablas muestran los datos totales de las preguntas según hallan sido argumentadas correctamente, incorrectamente y no argumentadas. Hay que aclarar que estos datos se tomaron de las preguntas que fueron contestadas de manera correcta. Los resultados se muestran por número de preguntas y en porcentaje.

	% DE BIEN ARG	% DE MAL ARG	% DE NO ARG
<b>ENSEÑANZA PARA LA COMPRENSIÓN</b>	23,01	-0,9	-22,11
<b>CONTROL</b>	-6,41	5,84	0,57



Como se puede observar en la tabla y el gráfico frente a la variabilidad en el porcentaje de preguntas correctas con una argumentación correcta, el grupo intervenido logra un avance de 23.01% en contraste con el grupo control que disminuye este nivel en 6.41%. Este avance en la cantidad de respuestas argumentadas muestra una mejora en el nivel de razonamiento, el estudiante no solo resuelve el problema sino que además es capaz de explicar lo que hace, o por lo menos intenta dar una explicación a lo realizado.

Se observa también una disminución en el porcentaje de preguntas mal argumentadas en el grupo intervenidos de 0.9%, mientras que el grupo control aumento este porcentaje en un 5.84% y además tuvo un pequeño aumento en el número de respuestas no argumentadas de 0.57%, estos datos podrían verificar el aumento de la tendencia a contestar por azar del grupo control que puede ser una explicación a que en el análisis anterior se notara la contradicción de contestar correctamente más preguntas de un nivel más complejo que las más sencillas.

En general estos datos muestran que hubo una mejora en la posibilidad de explicación de lo realizado. El poder explicar aquello que se ha comprendido y realizado correctamente muestra que el nivel de la competencia ha aumentado. En las pruebas realizadas no se revisó si los estudiantes habían llegado al nivel de verificación de procesos realizados.

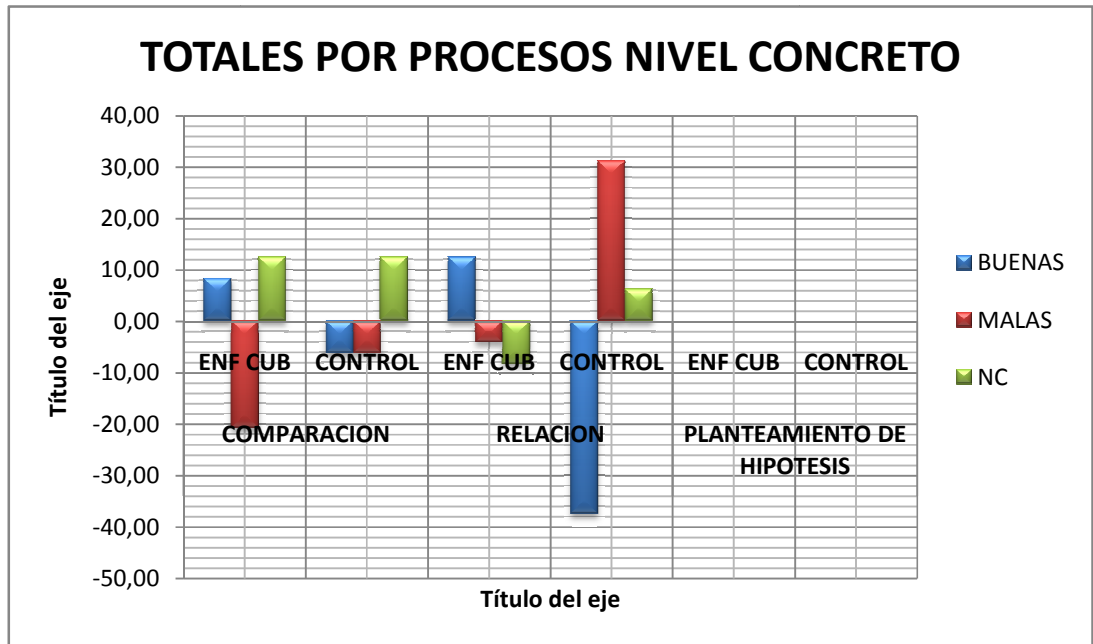
#### 4.1.2 Enfoque Cubano Vs. Grupo Control

##### 4.1.2.1 Totales Por Proceso Y Nivel De Complejidad

###### NIVEL: CONCRETO

		BUENAS	MALAS	NC
COMPARACIÓN	ENF CUB	8,33	-20,83	12,50
	CONTROL	-6,25	-6,25	12,50
RELACIÓN	ENF CUB	12,50	-4,17	-8,33
	CONTROL	-37,50	31,25	6,25
PLANTEAMIENTO DE HIPÓTESIS	ENF CUB	0,00	0,00	0,00
	CONTROL	0,00	0,00	0,00





El gráfico muestra el comportamiento del grupo control y el grupo intervenido bajo el Enfoque Cubano (EC) según los procesos de razonamiento y nivel de este en la prueba de salida. Como se puede observar en el nivel de comparación el grupo control disminuyó el total de preguntas contestadas correctamente en un 6.25% con respecto a lo presentado en la prueba de entrada (los datos completos de la prueba de entrada y salida del grupo control y del grupo intervenido con el enfoque cubano se pueden encontrar en los análisis por enfoque) mientras que el grupo intervenido aumento en un 8.33% el porcentaje de preguntas correctas en este nivel. Esto permite determinar una mejora en este proceso de razonamiento, es decir frente al establecimiento de diferencias y semejanzas entre variables, lo cual es base para poder determinar posibles relaciones en los procesos de análisis de problemas para su resolución.

En el proceso de relación hay un crecimiento en el porcentaje de preguntas correctas en el grupo intervenido con el enfoque cubano en un 12.5% mientras que el grupo control registró un descenso en el porcentaje de preguntas correctas de este procesos de un 37.5%.

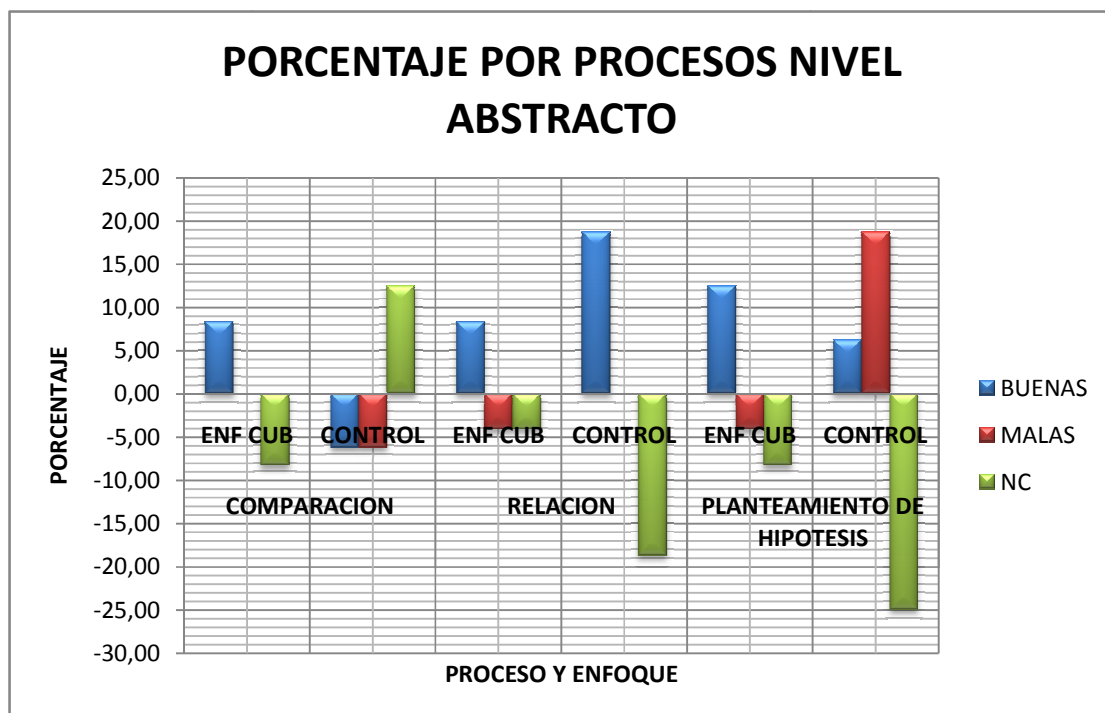
Para el planteamiento de hipótesis en este nivel no se realiza comparación ya que no se encuentra un par entre la prueba diagnóstica y la prueba de salida

Estos resultados muestran que los estudiantes mejoraron en sus posibilidades de encontrar semejanzas y diferencias entre las variables de un problema, cuando estas variables son concretas, es decir cuando se refieren a características básicas de los objetos que intervienen en el problema, y que además mejoraron en la posibilidad de encontrar nexos entre estas variables. Esto puede considerarse razonable un avance significativo ya que el proceso de relación tiene mayor nivel de complejidad que la comparación.

A nivel abstracto los resultados son los siguientes:

#### **NIVEL: ABSTRACTO**

		<b>BUENAS</b>	<b>MALAS</b>	<b>NC</b>
COMPARACIÓN	ENF CUB	8,33	0,00	-8,33
	CONTROL	-6,25	-6,25	12,50
RELACIÓN	ENF CUB	8,33	-4,17	-4,17
	CONTROL	18,75	0,00	-18,75
PLANTEAMIENTO DE HIPÓTESIS	ENF CUB	12,50	-4,17	-8,33
	CONTROL	6,25	18,75	-25,00



El gráfico mantiene las características del anterior en lo que tiene que ver con las convenciones, pero los resultados mostrados son los de los procesos de razonamiento a nivel abstracto, es decir con la necesidad de que estos procesos se realicen teniendo en cuenta los conceptos inmersos en cada una de las preguntas.

En este caso se puede observar que en el grupo intervenido aumenta el número de preguntas correctas que tenía en la prueba de salida en los procesos de comparación en un 8.33% mientras que el grupo control lo reduce en un 6.25%, por lo tanto hay una mejoría en la capacidad de los estudiantes de encontrar las semejanzas y diferencias entre conceptos y utilizarlas para resolver problemas. En la relación se aumento en un 8.33%, guardando una correspondencia con el aumento en el proceso anterior, los estudiantes encuentran nexos entre los conceptos que intervienen el problema y usan estos nexos para resolver los problemas planteados. En estos procesos el grupo control muestra un descenso

en la comparación y un avance en la relación. Esta contradicción esta analizada en la comparación realizada entre el grupo control y el grupo intervenido.

En el proceso de planteamiento de hipótesis el grupo control mostró un aumento del 6.25% y el grupo intervenido un aumento del 12.5%. Estos porcentajes permiten inferir una mejora significativa en la capacidad de los estudiantes del grupo intervenido con el enfoque cubano para plantear y verificar posibles soluciones a los problemas planteados a nivel abstracto.

Revisando cada uno de los procesos evaluados en las pruebas se puede observar que en general se mejoró en todos los procesos, mostrándose de esta manera un avance en el razonamiento, es decir se logra que problemas que requieren procesos de pensamiento a nivel abstracto sean primero enfrentados por más estudiantes (lo cual se observa en la disminución de las preguntas no contestadas), y resueltos de mejor manera también por un mayor número de estudiantes.

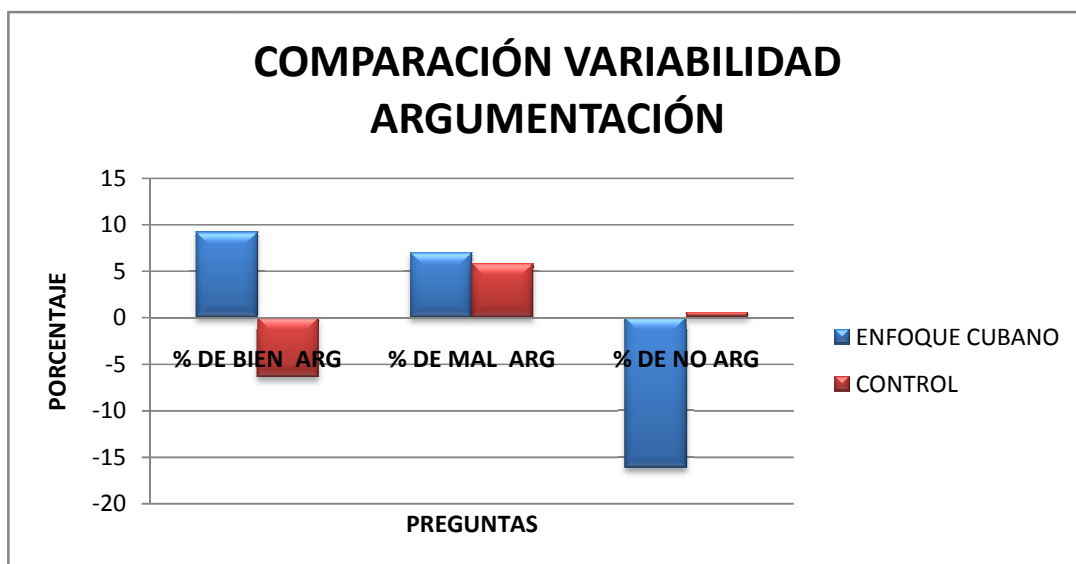
Lo que caracteriza los resultados de la intervención desde el enfoque cubano, es la constancia en el mejoramiento en cada uno de los procesos, aunque el avance sea mayor en un proceso como el planteamiento de hipótesis que es más complejo que la comparación y la relación, estas diferencias se pueden ubicar en el porcentaje de error que se puede tener por la posibilidad de resolución de las preguntas desde el azar. El razonamiento desde cada uno de estos procesos mejora en un nivel significativo con relación al tiempo en que se realizó la aplicación.

#### **4.1.2.2 Totales Por Argumentación**

Las siguientes gráficas y tablas muestran los datos totales de las preguntas según hayan sido argumentadas correctamente, incorrectamente y no argumentadas.

Hay que aclarar que estos datos se tomaron de las preguntas que fueron contestadas de manera correcta. Los resultados se muestran por número de preguntas y en porcentaje.

	% DE BIEN ARG	% DE MAL ARG	% DE NO ARG
<b>ENFOQUE CUBANO</b>	9,19	7,02	-16,20
<b>CONTROL</b>	-6,41	5,84	0,57



Como se puede observar en la tabla y el gráfico frente a la variabilidad en el porcentaje de preguntas correctas con una argumentación correcta el grupo intervenido logra un avance de 9.19% en contraste con el grupo control que disminuye este nivel en 6.41%. Este avance en la cantidad de respuestas argumentadas muestra una mejora en el nivel de razonamiento, el estudiante no solo resuelve el problema sino que además es capaz de explicar lo que hace, o por lo menos de intentar dar una explicación a lo realizado.

Se observa también un aumento en el porcentaje de preguntas mal argumentadas en el grupo intervenido con el enfoque cubano del 7.02%, mientras que el grupo control aumento este porcentaje en un 5.84%. El que se presenten aún niveles bajos de argumentación puede ser una explicación del aumento de procesos más complejos por encima de procesos más simples, es decir puede haber una intervención del azar en estas diferencias.

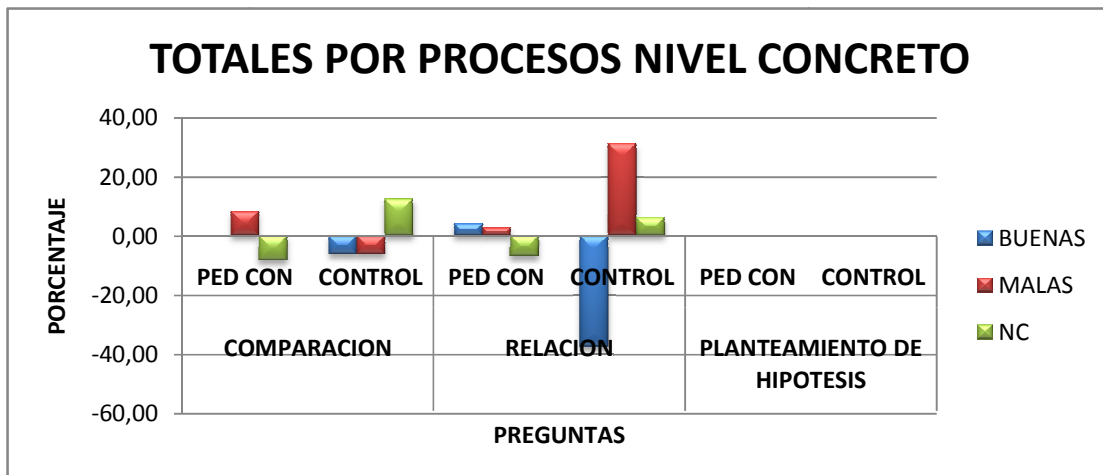
En general estos datos muestran que hubo una mejora en la posibilidad de explicación de lo realizado. El poder explicar aquello que se ha comprendido y realizado correctamente muestra que el nivel de la competencia ha aumentado. En las pruebas realizadas no se revisó si los estudiantes habían llegado al nivel de verificación de procesos realizados.

#### 4.1.3 Pedagogía Conceptual Vs. Grupo Control

##### 4.1.3.1 Totales Por Proceso Y Nivel De Complejidad

###### NIVEL: CONCRETO

		BUENAS	MALAS	NC
COMPARACIÓN	PED CON	0,00	8,33	-8,33
	CONTROL	-6,25	-6,25	12,50
RELACIÓN	PED CON	4,17	2,78	-6,94
	CONTROL	-37,50	31,25	6,25
PLANTEAMIENTO DE HIPÓTESIS	PED CON	0,00	0,00	0,00
	CONTROL	0,00	0,00	0,00



El gráfico muestra el comportamiento del grupo control y el grupo intervenido bajo el enfoque de Pedagogía Conceptual (PC) según los procesos de razonamiento y nivel de este en la prueba de salida. Como se puede observar en el nivel de comparación el grupo control disminuyó el total de preguntas contestadas correctamente en un 6.25% con respecto a lo presentado en la prueba de entrada (los datos completos de la prueba de entrada y salida del grupo control y del grupo intervenido con pedagogía conceptual se pueden encontrar en los análisis por enfoque) mientras que el grupo intervenido se mantuvo en el porcentaje de preguntas correctas en este nivel, es decir no mejoró ni empeoró. Esto permite determinar una constancia en este proceso de razonamiento, es decir frente al establecimiento de diferencias y semejanzas entre variables, lo cual es base para poder determinar posibles relaciones en los procesos de análisis de problemas para su resolución.

En el proceso de relación hay un aumento en el porcentaje de preguntas correctas en el grupo intervenido con pedagogía conceptual, mientras que el grupo control disminuyó en un 37.5%.

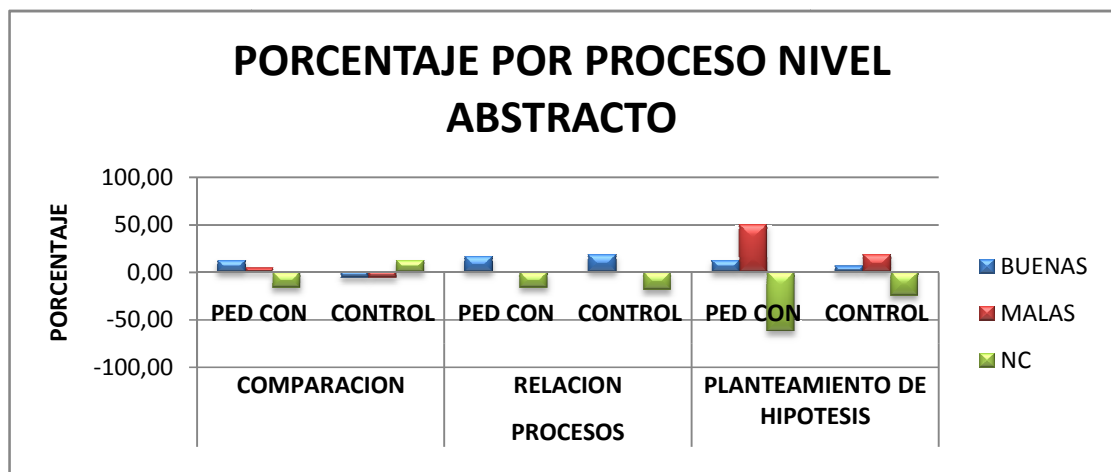
Para el planteamiento de hipótesis en este nivel no se realiza comparación ya que no se encuentra un par entre la prueba diagnóstica y la prueba de salida

Estos resultados muestran que los estudiantes se mantienen en sus posibilidades de encontrar semejanzas y diferencias entre las variables de un problema, cuando estas variables son concretas, es decir cuando se refieren a características básicas de los objetos que intervienen en el problema, y que han aumentado sus posibilidades de encontrar nexos entre estas variables. Este avance hace parte de un mejoramiento en el razonamiento.

A nivel abstracto los resultados son los siguientes:

**NIVEL: ABSTRACTO**

		BUENAS	MALAS	NC
COMPARACIÓN	PED CON	12,50	4,17	-16,67
	CONTROL	-6,25	-6,25	12,50
RELACIÓN	PED CON	16,67	0,00	-16,67
	CONTROL	18,75	0,00	-18,75
PLANTEAMIENTO DE HIPÓTESIS	PED CON	12,50	50,00	-62,50
	CONTROL	6,25	18,75	-25,00





El gráfico mantiene las características del anterior en lo que tiene que ver con las convenciones, pero los resultados mostrados son los de los procesos de razonamiento a nivel abstracto, es decir con la necesidad de que estos procesos se realicen teniendo en cuenta los conceptos inmersos en cada una de las preguntas.

En este caso se puede observar que el grupo intervenido con pedagogía conceptual mejora el número de preguntas correctas que tenía en la prueba de salida en los procesos de comparación y relación, mientras que en estos procesos el grupo control muestra un descenso en la comparación y un avance en la relación. El análisis de esta situación se encuentra en la comparación del grupo control y el grupo intervenido.

En el proceso de planteamiento de hipótesis el grupo control mostró un aumento del 6.25% y el grupo intervenido un aumento del 12.5%. Estos porcentajes permiten inferir una mejora significativa en la capacidad de los estudiantes para plantear y verificar posibles soluciones a los problemas planteados a nivel abstracto.

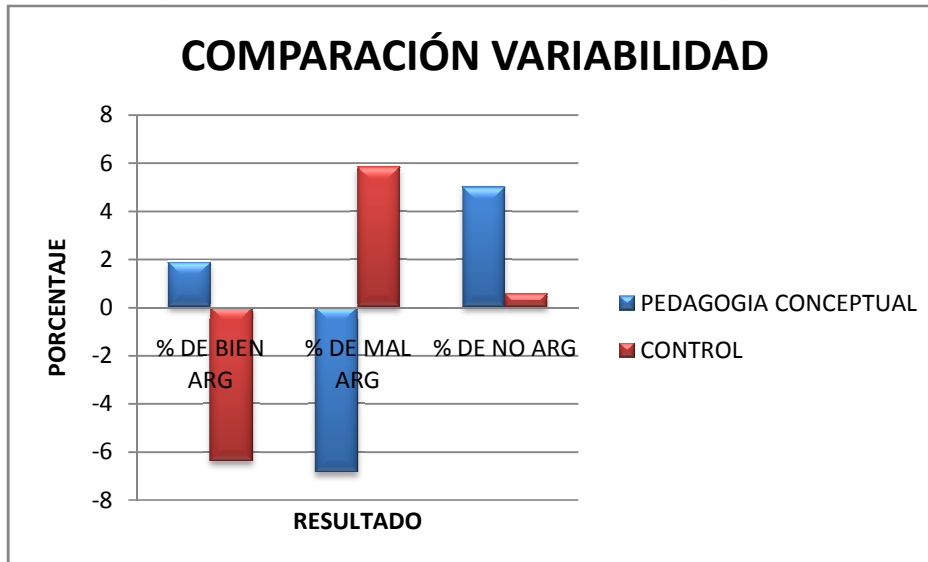
El mayor avance lo tuvo en el proceso de relación de lo cual se puede deducir un trabajo interesante frente a los nexos entre los conceptos y como estos nexos intervienen en la resolución de los diferentes problemas.

Revisando cada uno de los procesos evaluados en las pruebas se puede observar que en general se mejoró en todos los procesos, mostrándose de esta manera un avance en el razonamiento, es decir se logra que problemas que requieren procesos de pensamiento a nivel abstracto sean primero enfrentados por más estudiantes (lo cual se observa en la disminución de las preguntas no contestadas), y resueltos de mejor manera también por un mayor número de ellos.

#### 4.1.3.2 Totales Por Argumentación

Las siguientes gráficas y tablas muestran los datos totales de las preguntas según hayan sido argumentadas correctamente, incorrectamente y no argumentadas. Hay que aclarar que estos datos se tomaron de las preguntas que fueron contestadas de manera correcta. Los resultados se muestran por número de preguntas y en porcentaje.

	% DE BIEN ARG	% DE MAL ARG	% DE NO ARG
<b>PEDAGOGÍA CONCEPTUAL</b>	1,88	-6,88	5
<b>CONTROL</b>	-6,41	5,84	0,57



Como se puede observar en la tabla y el gráfico frente a ha variabilidad en el porcentaje de preguntas correctas con una argumentación correcta el grupo PC

logra un avance de 1.88% en contraste con el grupo control que disminuye este nivel en 6.41%. Este avance en la cantidad de respuestas argumentadas muestra una mejora en el nivel de razonamiento, el estudiante no solo resuelve el problema sino que además es capaz de explicar lo que hace, o por lo menos de intentar dar una explicación a lo realizado.

Se observa también una disminución en el porcentaje de preguntas mal argumentadas en el PC de 6.88%, mientras que el grupo control aumento este porcentaje en un 5.84% y además tuvo un aumento en el número de respuestas no argumentadas de 5%. Estos resultados muestran la permanencia en el nivel de argumentación y un poco avance en el trabajo desde este enfoque, lo que muestra estudiantes con capacidad de resolver los problemas pero con dificultades para explicar. Esto quiere decir que frente al nivel de competencia hace falta aun avanzar hacia el objetivo de verificar procesos.

## **4.2 ANALISIS DE RESULTADOS PRUEBA DIAGNÓSTICA Y DE SALIDA POR CADA GRUPO**

### **4.2.1 Enseñanza Para La Comprensión**

#### **4.2.1.1 Totales De Preguntas Contestadas**

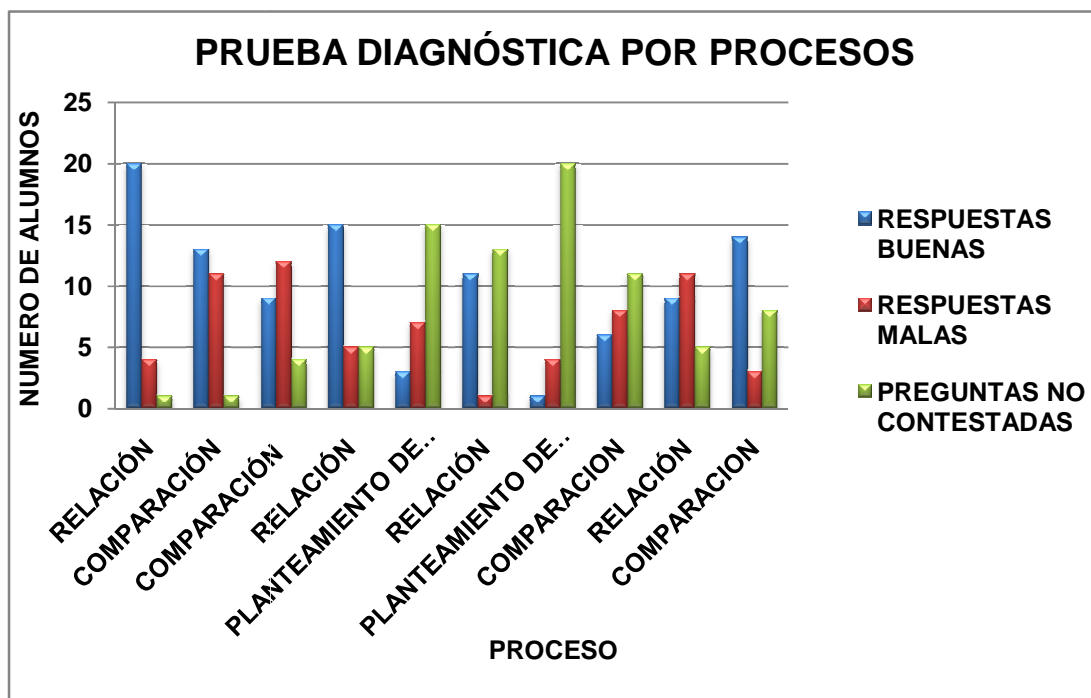
Los siguientes gráficos muestran la cantidad de preguntas contestadas de manera correcta, incorrecta y no contestadas de la prueba diagnóstica y de salida. La tabla esta dividida por pregunta y proceso de pensamiento que es la forma como se esta realizando la medición del nivel de razonamiento.

La primera tabla que se presenta corresponde a la prueba diagnóstica:

## PRUEBA DE ENTRADA

PROCESO DE PENSAMIENTO	RESPUESTAS BUENAS	RESPUESTAS MALAS	PREGUNTAS NO CONTESTADAS
RELACIÓN	20	4	1
COMPARACIÓN	13	11	1
COMPARACIÓN	9	12	4
RELACIÓN	15	5	5
PLANTEAMIENTO DE HIPÓTESIS	3	7	15
RELACIÓN	11	1	13
PLANTEAMIENTO DE HIPÓTESIS	1	4	20
COMPARACIÓN	6	8	11
RELACIÓN	9	11	5
COMPARACIÓN	14	3	8
	101	66	83

La comparación entre preguntas contestadas de manera correcta, incorrecta y no contestadas se realiza en la siguiente gráfica:



Teniendo en cuenta estas preguntas y sus respuestas se puede concluir que en general los estudiantes del grado 10<sup>o</sup> C manejan la relación como proceso de pensamiento de mayor nivel, es decir que los estudiantes encuentran nexos entre las variables que se encuentran en el problema y usan estos nexos para resolverlo, esta relación varía entre ellos en el nivel de abstracción que cada uno tiene y que se muestra en las preguntas que contestaron bien y en la forma en que argumentaron cada una de estas respuestas, la mayoría presenta un razonamiento a nivel concreto donde no se tienen en cuenta los conceptos aprendidos en otros momentos sino solamente los pasos que se realizan y los nexos realizados son entre variables concretas, es decir elementos de la vida cotidiana, tampoco se manejan niveles de complejidad en el número de variables utilizadas para argumentar ya que solo se usan una o dos variables teniendo los problemas posibilidades de relacionar más variables.

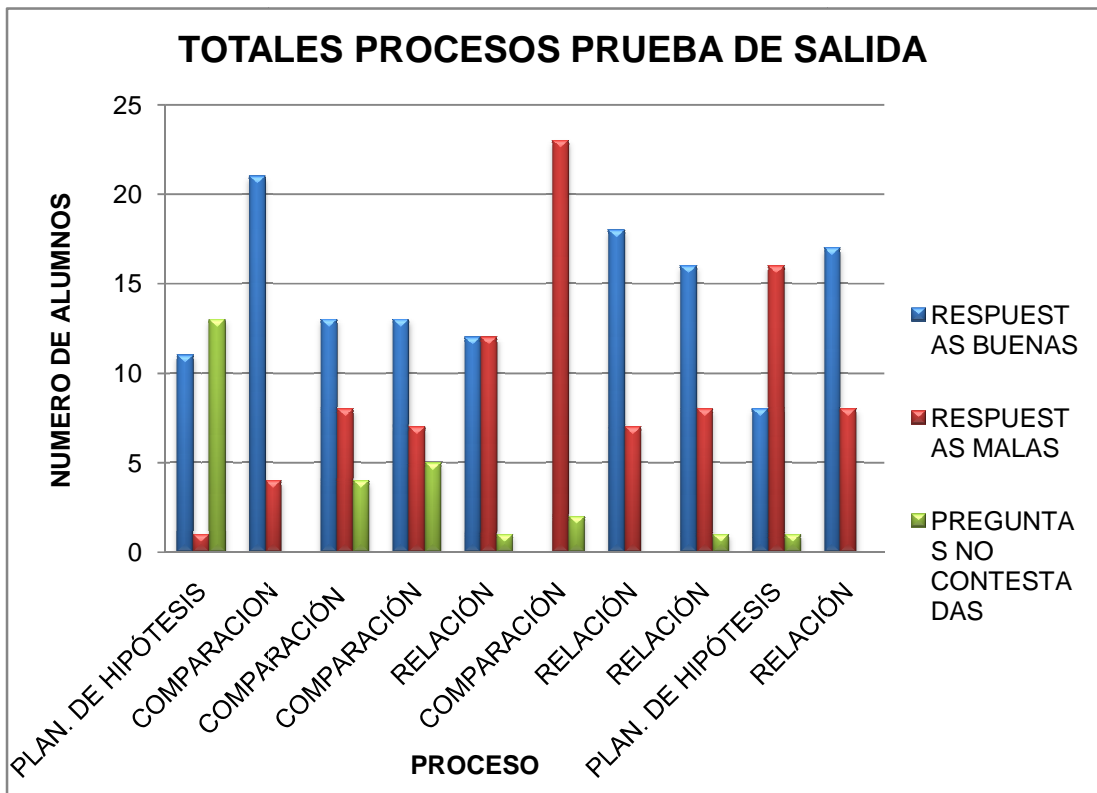
Tomando el total de preguntas y de estudiantes, es decir en un balance general, se contestaron correctamente el 40.4% de las preguntas, para este dato

solamente se tuvo en cuenta el número de las preguntas correctas, no si la mayoría eran de uno u otro ítem.

La siguiente tabla corresponde a la prueba de salida:

PROCESO DE PENSAMIENTO	RESPUESTAS BUENAS	RESPUESTAS MALAS	PREGUNTAS NO CONTESTADAS
PLAN. DE HIPÓTESIS	11	1	13
COMPARACIÓN	21	4	0
COMPARACIÓN	13	8	4
COMPARACIÓN	13	7	5
RELACIÓN	12	12	1
COMPARACIÓN	0	23	2
RELACIÓN	18	7	0
RELACIÓN	16	8	1
PLAN. DE HIPÓTESIS	8	16	1
RELACIÓN	17	8	0
	129	94	27

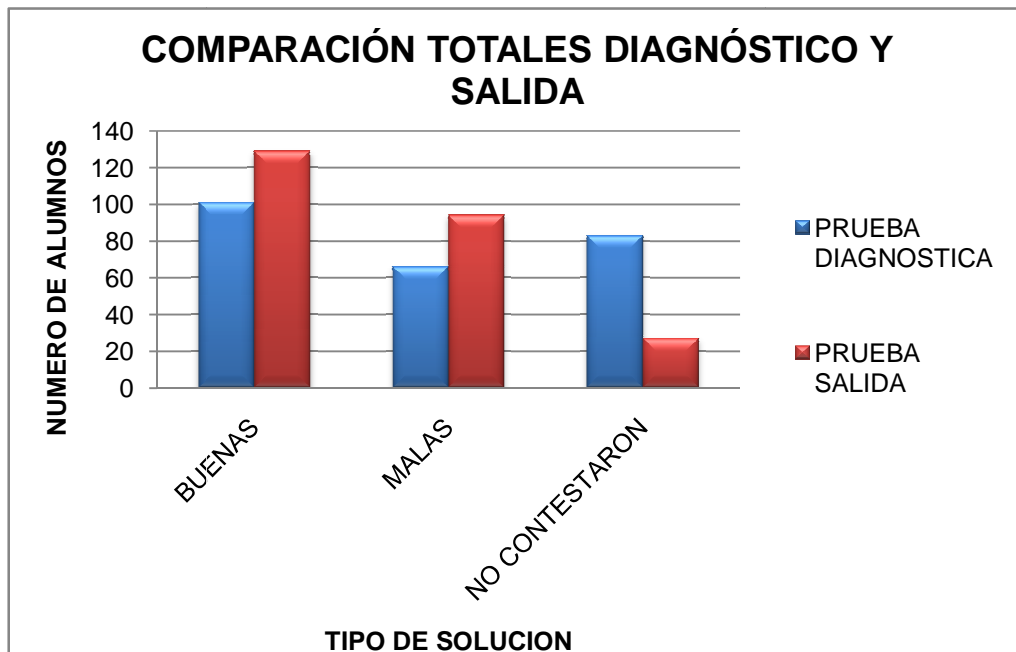
La comparación entre preguntas contestadas de manera correcta, incorrecta y no contestadas en la prueba de salida se compara en la siguiente tabla:



#### 4.2.1.2 Comparación Totales Prueba Diagnóstica Y De Salida

La siguiente tabla y gráfico muestra los totales de preguntas correctas, incorrectas y no contadas en ambas pruebas y su comparación se representan en el gráfico.

PREGUNTAS	BUENAS	MALAS	NO CONTESTARON
PRUEBA DIAGNOSTICA	101	66	83
PRUEBA SALIDA	129	94	27



Para la prueba de salida el total de preguntas que fueron contestadas correctamente corresponden al 51,6% determinándose de esta manera un aumento del 11,2% con respecto a la prueba diagnóstica. Las preguntas contestadas incorrectamente aumentaron pero disminuyó el número de preguntas no contestadas. Estos datos permiten inferir que los estudiantes mejoraron en la rapidez para contestar las preguntas, además de intentar resolverlas arriesgando posibilidades aunque resultaran incorrectas, esto es muy importante para el caso de la resolución de problemas ya que hay una búsqueda de soluciones y el error permite nuevos comienzos en los procesos de razonamiento, nuevos caminos para llegar a conclusiones.

Estos resultados tienen como elemento determinante la forma de trabajo que se realizaba en el aula, donde el estudiante enfrentaba de manera individual o en equipo los problemas planteados y donde el docente dirigía la actividad pero



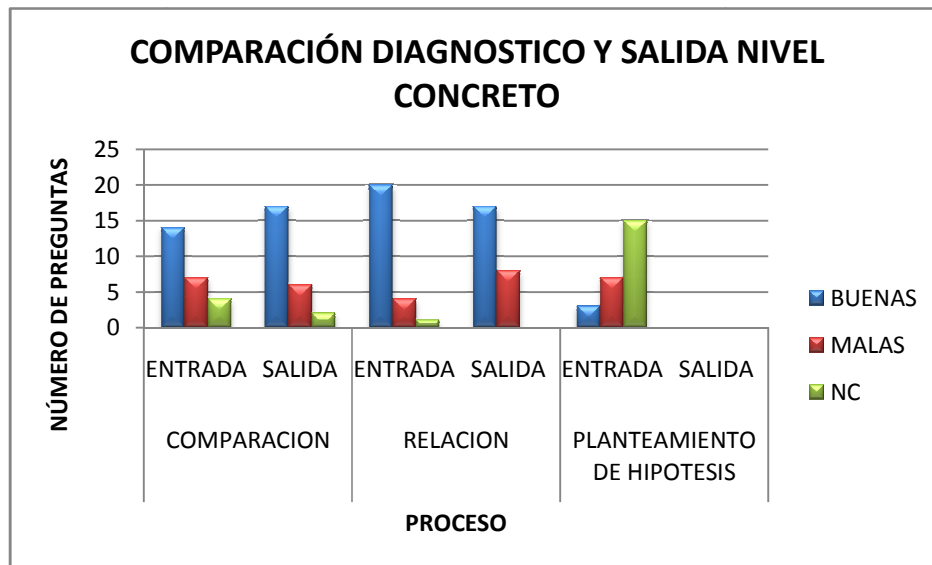
permitía que la indagación autónoma fuera un elemento esencial en el trabajo realizado.

Se deben tener en cuenta los datos presentados frente a la complejidad de las preguntas en lo relativo a la abstracción o falta de ella que fuera necesaria para responder las preguntas De acuerdo con esto se realizó una separación entre el nivel de las preguntas desde lo concreto y desde lo abstracto. Los resultados en las pruebas diagnóstica y de salida para el grado 10 C fueron los siguientes:

#### 4.2.1.3 Comparación Totales Prueba Diagnóstica Y De Salida Por Proceso Y Nivel De Complejidad

##### NIVEL: CONCRETO

		BUENAS	MALAS	NC
COMPARACIÓN	ENTRADA	14	7	4
	SALIDA	17	6	2
RELACIÓN	ENTRADA	20	4	1
	SALIDA	17	8	0
PLANTEAMIENTO DE HIPÓTESIS	ENTRADA	3	7	15
	SALIDA	0	0	0



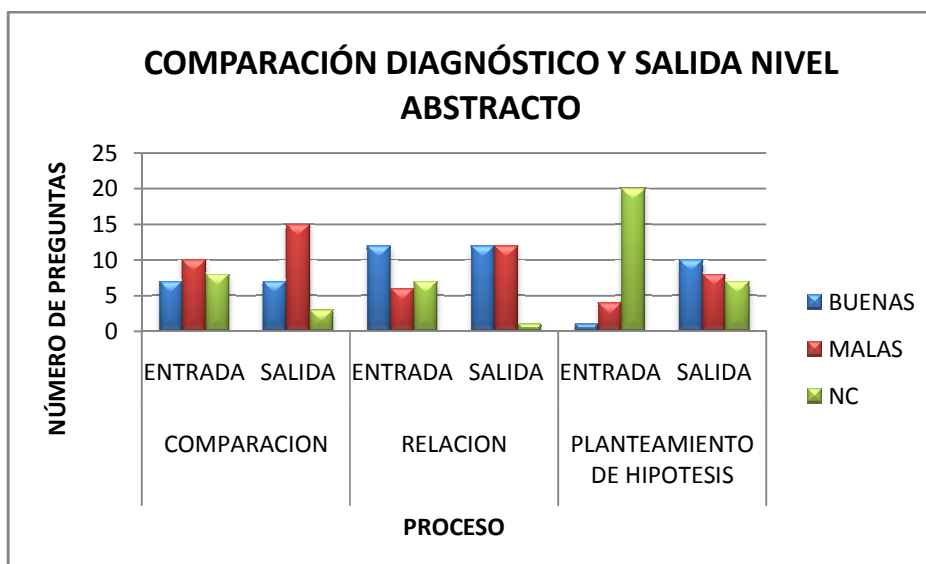
Se observa un aumento en el número de preguntas con respecto a la prueba diagnóstica bien contestadas en los procesos de comparación y relación en el nivel concreto. En la comparación se aumento de 14 en la prueba diagnóstica a 17 en la prueba de salida, mejorándose en el proceso y disminuyendo el número de preguntas mal contestadas. Para el proceso de relación se disminuyó el número de preguntas correctas pasando de 20 en la prueba de entrada a 17 en la prueba de salida. Para el planteamiento de hipótesis no se realiza análisis por no tener un par concreto en la prueba de salida.

Esto quiere decir que los estudiantes mejoraron en sus posibilidades de encontrar semejanzas y diferencias entre las variables de un problema, cuando estas variables son concretas, es decir cuando se refieren a características básicas de los objetos que intervienen en el problema, pero que en el momento de encontrar nexos entre estas variables tienen dificultades. Esto puede considerarse razonable ya que el proceso de relación tiene mayor nivel de complejidad que la comparación.

A nivel abstracto los resultados son los siguientes:

## NIVEL: ABSTRACTO

		BUENAS	MALAS	NC
COMPARACIÓN	ENTRADA	7	10	8
	SALIDA	7	15	3
RELACIÓN	ENTRADA	12	6	7
	SALIDA	12	12	1
PLANTEAMIENTO DE HIPÓTESIS	ENTRADA	1	4	20
	SALIDA	10	8	7



En este caso en el proceso de comparación se mejoró en un 22.2% con respecto a la prueba diagnóstica y en un 50% se disminuyó el porcentaje de preguntas no contestadas. Para el proceso de relación se mejoró el porcentaje de preguntas correctas en un 33.3% con respecto a la prueba diagnóstica y se observa una disminución en la cantidad de preguntas incorrectas y no contestadas. En el procesos de planteamiento de hipótesis las preguntas correctas pasaron de 2 a 5, lo cual muestra un gran avance en este proceso, también disminuyeron las preguntas incorrectas y las no contestadas.

Habría en este caso un dato algo contradictorio y es el que exista una mejora en la relación a nivel abstracto, es decir descubriendo y aplicando los nexos entre los conceptos involucrados en cada uno de estos problemas y no hacerlo con los nexos entre características de objetos como en el caso del nivel concreto.

Un avance importante está en el planteamiento de hipótesis y que lo que se vislumbra es unos estudiantes que ante un problema arriesgan una posible solución y la ponen en práctica teniendo en este caso la posibilidad de equivocarse y tener que plantear una nueva posibilidad haciendo que el proceso de razonamiento se mantenga activo y realizando rastreos por cada uno de los procesos anteriores a este.

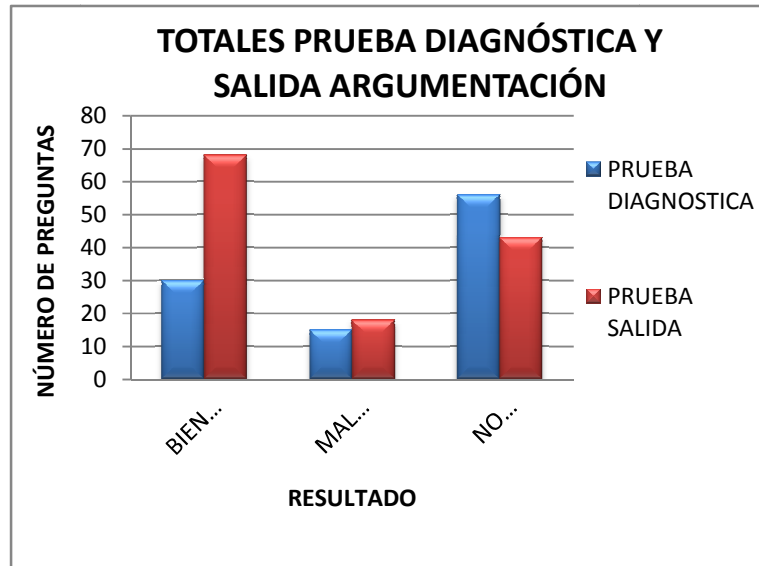
#### 4.2.1.4 Comparación Totales Prueba Diagnóstica Y De Salida Argumentación

Las siguientes gráficas y tablas muestran los datos totales de las preguntas según hayan sido argumentadas correctamente, incorrectamente y no argumentadas. Hay que aclarar que estos datos se tomaron de las preguntas que fueron contestadas de manera correcta. Los resultados se muestran por número de preguntas y en porcentaje.

#### NÚMERO DE PREGUNTAS ARGUMENTACIÓN

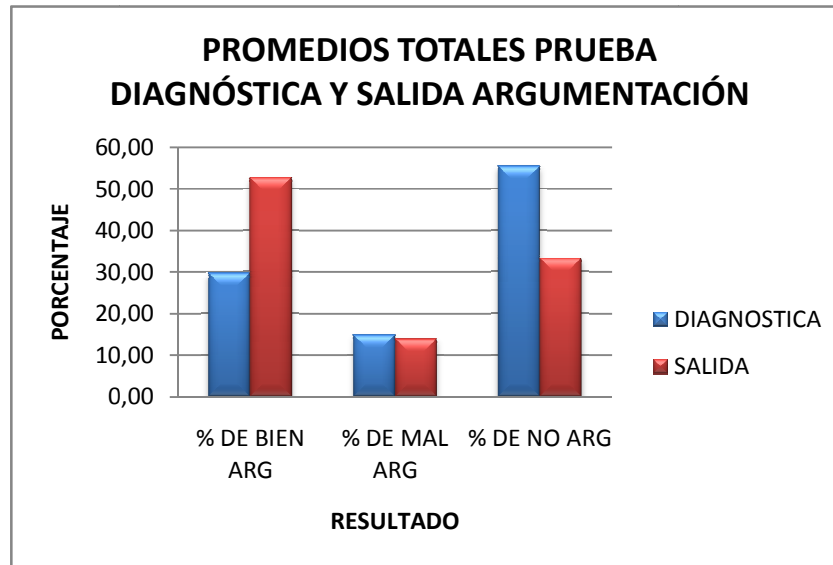
PREGUNTAS	BIEN ARGUMENTADAS	MAL ARGUMENTADAS	NO ARGUMENTADAS	BUENAS
PRUEBA DIAGNOSTICA	30	15	56	101
PRUEBA	68	18	43	129

<b>SALIDA</b>			
---------------	--	--	--



**PORCENTAJES DE ARGUMENTACIÓN**

	% DE BIEN ARG	% DE MAL ARG	% DE NO ARG
<b>DIAGNÓSTICA</b>	29,70	14,85	55,45
<b>SALIDA</b>	52,71	13,95	33,33



En el caso de la argumentación de las preguntas, el avance de los estudiantes de 10 C es notable. Mientras en las prueba de diagnóstica se argumentaron 45 preguntas que corresponden al 44.5% de las preguntas contestadas correctamente que en este caso fueron 101; para la prueba de salida el número de preguntas contestadas correctamente fueron 129 y se argumentaron 86 lo cual corresponde al 66.6% de este total, lo cual muestra un avance del 22.5%. Este avance en la cantidad de preguntas argumentadas muestra una mejora en el nivel de razonamiento, el estudiante no solo resuelve el problema sino que además es capaz de explicar lo que hace, o por lo menos de intentar dar una explicación a lo realizado.

Sin embargo no todas las argumentaciones son correctas, para este caso en la prueba diagnóstica en 30 preguntas se argumentó correctamente el proceso planteado lo que corresponde al 29.7% del total de argumentaciones de las preguntas correctamente contestadas; para la prueba de salida esta cantidad de preguntas pasó a 68, lo que corresponde al 52.71% del total de argumentaciones de las preguntas contestadas de manera correcta, aumentando el porcentaje en

un 30%. Estos dato si muestran que hubo una mejora en la posibilidad de explicación de lo realizado.

#### 4.2.2 Enfoque Cubano

##### 4.2.2.1 Totales De Preguntas Contestadas

Los siguientes gráficos muestran la cantidad de preguntas contestadas de manera correcta, incorrecta y no contestadas de la prueba diagnóstica y de salida. La tabla está dividida por pregunta y proceso de pensamiento que es la forma como se está realizando la medición del nivel de razonamiento.

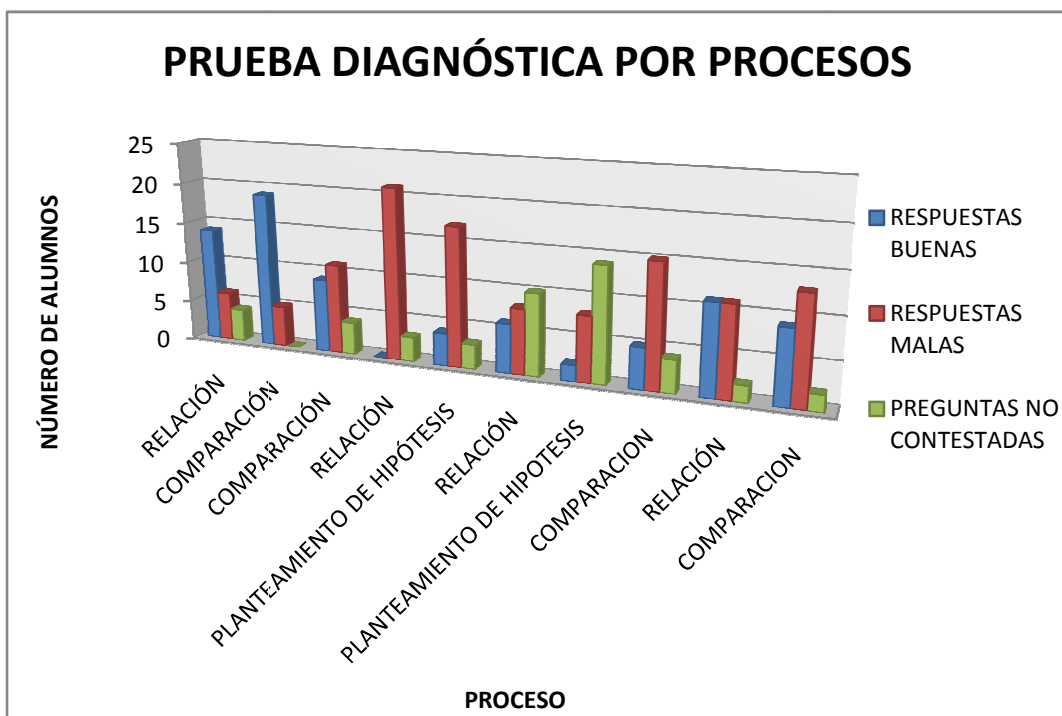
La primera tabla que se presenta corresponde a la prueba diagnóstica:

#### PRUEBA DE ENTRADA

PROCESO DE PENSAMIENTO	RESPUESTAS BUENAS	RESPUESTAS MALAS	PREGUNTAS NO CONTESTADAS
RELACIÓN	14	6	4
COMPARACIÓN	19	5	0
COMPARACIÓN	9	11	4
RELACIÓN	0	21	3
PLANTEAMIENTO DE HIPÓTESIS	4	17	3
RELACIÓN	6	8	10
PLANTEAMIENTO DE HIPÓTESIS	2	8	14
COMPARACIÓN	5	15	4
RELACIÓN	11	11	2

COMPARACIÓN	9	13	2
	79	115	46

La comparación entre preguntas contestadas de manera correcta, incorrecta y no contestadas se realiza en la siguiente gráfica:



Teniendo en cuenta estas preguntas y sus respuestas se puede concluir que en general los estudiantes del grado 10<sup>o</sup> A manejan la comparación como proceso de pensamiento de mayor nivel, es decir que los estudiantes encuentran diferencias y semejanzas entre las variables del problema y las utilizan para resolverlo. La relación se encuentra en el segundo lugar entre los procesos utilizados también con un buen nivel, de esta manera se analiza que los estudiantes encuentran nexos entre las variables que se encuentran en el problema y usan estos nexos para resolverlo, esta relación varía entre ellos en el nivel de abstracción que cada uno tiene y que se muestra en las preguntas que contestaron bien y en la forma en



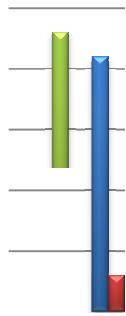
que argumentaron cada una de estas respuestas, la mayoría presenta un razonamiento a nivel concreto donde no se tienen en cuenta los conceptos aprendidos en otros momentos sino solamente los pasos que se realizan y los nexos realizados son entre variables concretas, es decir elementos de la vida cotidiana, tampoco se manejan niveles de complejidad en el número de variables utilizadas para argumentar ya que solo se usan una o dos variables teniendo los problemas posibilidades de relacionar más variables.

Tomando el total de preguntas y de estudiantes, es decir en un balance general, se contestaron correctamente el 32.9% de las preguntas, para este dato solamente se tuvo en cuenta el número de las preguntas correctas, no si la mayoría eran de uno u otro ítem.

La siguiente tabla corresponde a la prueba de salida:

PROCESO DE PENSAMIENTO	RESPUESTAS BUENAS	RESPUESTAS MALAS	PREGUNTAS NO CONTESTADAS
PLAN. DE HIPÓTESIS	0	1	23
COMPARACIÓN	21	3	0
COMPARACIÓN	13	10	1
COMPARACIÓN	10	6	8
RELACIÓN	8	12	4
COMPARACIÓN	9	11	4
RELACIÓN	16	7	1
RELACIÓN	16	5	3
PLAN. DE HIPÓTESIS	9	13	2
RELACIÓN	19	3	2

La comparación en  
contestadas en la p



#### 4.2.2.2 Comparaci

La siguiente tabla y  
y no contadas en a

PREGUNT
PRUEBA
DIAGNOST

ERROR: ioerror  
OFFENDING COMMAND: image

STACK:

## **5. CONCLUSIONES**

### **5.1 ENSEÑANZA PARA LA COMPRESIÓN**

El enfoque de Enseñanza para la Comprensión permitió un avance en el razonamiento de los estudiantes el cual se deja ver en el desarrollo de cada uno de los procesos de pensamiento que estaban siendo trabajados y evaluados durante la intervención. Esta activación de los procesos pone al estudiante en la capacidad de enfrentar situaciones de la vida cotidiana, de las matemáticas y de otras áreas de manera consciente y profunda.

El proceso de abstracción dentro del enfoque tiene una vía más natural en el caso de la intervención realizada, inductiva, lo cual permite un trabajo sobre cada uno de los procesos de razonamiento, fortaleciendo paso a paso los niveles de razonamiento, teniendo además el docente la posibilidad de verificar en que proceso se encuentra el estudiante y el nivel en cada procesos.

El aumento en la cantidad y calidad de las preguntas argumentadas es otra muestra de la mejora en el proceso de razonamiento, hay un paso del nivel de comprensión y uso al nivel de explicación de lo realizado desde las matemáticas, lo cual a nivel cognitivo significa un desarrollo cognitivo más cercano al que debería tener el adolescente.

Las formas de trabajo del enfoque permiten que los estudiantes asuman su aprendizaje de manera autónoma, es decir que gran parte del peso del proceso se encuentra en la capacidad de indagación y de creatividad que muestren en el desarrollo de las actividades. Es por esto que el proceso en el que más avance se vio fue en el planteamiento de hipótesis, ya que por la forma de trabajo el estudiante estaba enfrentado todo el tiempo a problemas que requerían el que se

arriesgaran propuestas de resolución, se aplicaran y analizaran las posibilidades de cada una en la consecución del objetivo.

El estudiante genera un manejo de lenguajes del pensamiento, es decir, se habitúa a trabajar con términos que estimulan la reflexión como predecir, formular hipótesis, sustentar, creer y dar instrucciones en las que usa expresiones que estimulan el pensamiento y que permiten establecer relaciones causa – efecto.

El enfoque permite al estudiante estructurar una mentalidad abierta, mantenerla en contacto con variados puntos de vista y crear ciertas disposiciones naturales, como la flexibilidad ante el conocimiento, la disposición para ser intelectualmente amplio y arriesgado, para tener una curiosidad intelectual constante, para la búsqueda de comprensión y esclarecimiento, para la planificación y la estrategia, para ser intelectualmente cuidadoso y para buscar y evaluar razones.

En la Enseñanza para la Comprensión además de aprender los instrumentos cognitivos, los estudiantes se vuelven más afectivos ya que en la misma cotidianidad de la clase esta implícita esta dimensión dada la interacción que se tiene permanentemente. El docente debe estar atento y preparado para orientar procesos emocionales con instrumentos propios para hacerlo.

El proceso de evaluación (autoevaluación, coevaluación y heteroevaluación) recobró su sentido, en cuanto dejó de ser solo un momento, para multiplicarse en oportunidades que le permitieron al estudiante celebrar el camino recorrido, reflexionar y criticar las estrategias escogidas y recibir la retroalimentación necesaria que le facilita seguir adelante.

Al proponer otros contextos de aula, el enfoque permite un acercamiento a otras cogniciones, a otras formas de construir los conceptos, permitiendo esto que diferentes esquemas mentales tengan diferentes maneras de racionalizar cada una de las actividades.

El enfoque privilegia las diferencias en el aula, viéndolas como un valor que permite que el aprendizaje se pueda dar en diferentes niveles. La diferencia en este caso permite que los estudiantes se mantengan en la zona de desarrollo próximo, situación altamente deseable para que se puedan dar los procesos de aprendizaje.

El papel del docente en este enfoque es primordial. Direcciona las discusiones y centraliza las conclusiones sin permitir que la construcción conceptual se aleje de los planteamientos del área pero permitiendo que sean exploradas diversas posibilidades de resolución y de aprendizaje. Además su papel de evaluador permanente exige nuevas responsabilidades frente a la planeación de cada una de las fases del enfoque, es por esto que debe dedicar especial cuidado a cada una de ellas teniendo los conceptos a trabajar y los procesos a conseguir como guía académica para conseguirlo.

Es interesante el logro en el trabajo en equipo, pese a un comienzo difícil, el enfoque consiguió que los equipos de trabajo se organizaran, se distribuyeran y redistribuyeran los roles dentro de los equipos y llegar al final de los trabajos para la discusión general. No sin problemas, el trabajo en equipo fue un impulsador del mejoramiento del razonamiento ya que permite la interacción entre pares de diferentes capacidades donde el efecto de estas discusiones y diferencias es un reacomodamiento a nivel cognitivo individual para cumplir con los requerimientos que el equipo esta realizando.

## **5.2 ENFOQUE CUBANO**

La aplicación en el aula del Enfoque Cubano para la Enseñanza de conceptos presentó unos resultados muy favorables frente al razonamiento. Cada uno de los procesos involucrados en el razonamiento se mejoró, pudiéndose observar un

avance constante y sistemático. El porcentaje de crecimiento en los procesos más complejos fue más alto que los procesos más simples lo cual permite determinar un nivel de razonamiento alto y más cerca a lo que la teoría cognitiva plantea para el adolescente.

El mejoramiento en los procesos permite también que la elaboración de los conceptos se realice de forma más natural, es decir, no se va solamente a memorizar sino que la activación de los procesos permite que los conceptos sean elaborados paso a paso, partiendo de niveles iniciales propios de cada estudiante y asegurando que los conocimientos (temas) necesarios para un mejor elaboración de los conceptos puedan ser garantizados.

Los niveles de argumentación mejoraron de manera considerable y hubo una disminución en las preguntas no argumentadas y un aumento en las mal argumentadas, frente a estos resultados se puede concluir que los estudiantes lograron ganar en capacidad de explicar los procesos que están inmersos en cada uno de los problemas planteados. En el nivel de competencia esto los ubica por encima de la adquisición y el uso y los pone a un paso de la verificación de los procesos.

Un punto importante para concluir es que desde este enfoque se mostró una mayor profundidad conceptual de los estudiantes, las diferentes fases en que se divide y se lleva a cabo el proceso de enseñanza garantiza que en cada uno de los momentos el estudiante presente niveles altos de comprensión para pasar al siguiente nivel, es un enfoque centrado en la elaboración de los conceptos y a esto es lo que se le da mayor importancia.

Para el docente el proceso se convierte en un reto por la profundidad ya que es necesario un manejo del área que permita movilidad en las formas de la enseñanza ya que al enfrentarse a las diferencias a nivel cognitivo entre sus

estudiantes es necesario que la respuesta tenga la posibilidad de generar avances y comprensiones a cada uno de estos niveles. Esto solo se logra si se tiene la fortaleza conceptual que permita descentrar los procesos.

El Enfoque Cubano fortalece el nivel conceptual de los estudiantes ya que hace hincapié en el aprendizaje riguroso y preciso del conocimiento, forma a los estudiantes para resolver con claridad problemas complejos, pero que tienen una solución precisa.

Para que el profesor, pueda enseñar a pensar a sus alumnos, es decir los lleve a mejorar en su razonamiento, debe dotarse de procedimientos que propicien este objetivo, entre los que se encuentran, los procedimientos heurísticos, y para ello es conveniente que se desarrolle con él una verdadera instrucción heurística, la que permitirá el aprendizaje consciente de estos procedimientos de búsqueda del conocimiento.

### **5.3 PEDAGOGÍA CONCEPTUAL**

La intervención realizada mediante el enfoque de Pedagogía Conceptual logró avances significativos en el nivel de razonamiento de los estudiantes, tanto a nivel concreto como abstracto. Esto se puede observar en los resultados de la prueba de salida, las observaciones realizadas en el aula y el desarrollo del trabajo, donde los procesos de pensamiento se vieron modificados por la forma en que se realizó la aplicación.

Esta forma de trabajo tuvo como centro su desarrollo sobre el método inductivo lo cual permitió que se partiera en el proceso de enseñanza sobre los procesos de pensamiento básicos que el estudiante maneja y no sobre contenidos que pueden no haber sido asimilados con anterioridad.



En lo abstracto fue importante el nivel de relación logrado entre conceptos lo que permitió la búsqueda de variadas posibilidades para la resolución de los problemas planteados en las pruebas diagnóstica, de salida y en el aula. Este nivel permitió un acercamiento a lo que teóricamente se ha conocido como el proceso cognitivo del adolescente que era uno de los problemas encontrados durante el proceso de observación.

El mejoramiento del proceso de relación a nivel abstracto permite concluir que los estudiantes se encuentran en capacidad de construir nuevos conceptos y categorías a partir de otros que ya han interiorizado.

El papel del docente tiene una importancia primordial, ya que es su responsabilidad el realizar las posibles relaciones que puedan surgir en la clase y guiar estas relaciones hacia el objetivo buscado, de tal forma que a partir de las diversas posibilidades que surgen de los estudiantes se pueda construir los conceptos requeridos.

La argumentación de los problemas también mejoró de forma considerable a través de la aplicación del enfoque. La prueba de salida muestra una mejoría significativa en la cantidad de preguntas que se argumenta y en la calidad de estas argumentaciones. El argumentar de manera correcta la solución de un problema muestra un mayor nivel en la competencia para resolver situaciones. Esto demuestra que además de comprender el problema, lo resuelve y explica la solución dada, esto lleva a un aumento en la capacidad del razonamiento y da la posibilidad de avanzar a niveles superiores de la competencia, es decir, pasar a verificar y constatar las soluciones dadas.

Los estudiantes presentan mejoría en el número de respuestas correctas, esto se debe a que esta metodología permite que el estudiantes sea un ser activo en su

aprendizaje, además le permite identificar cuales han sido los posibles errores que ha cometido para poder solucionarlos.

Aprender un concepto supone en el sujeto la capacidad de elaborar una misma respuesta ante objetos o fenómenos que, siendo diferentes en determinadas dimensiones, poseen determinados elementos comunes, relaciones similares o se basan en atributos de criterios dados, bien sea adquiridos por la experiencia directa del sujeto o por la mediación del lenguaje, por esto la Pedagogía Conceptual se convierte en instrumento básico para esta elaboración del concepto ya que permite a cada estudiante analizar, desde su punto de vista las actividades realizadas y sobre esta base formar el concepto que luego es puesto en común con sus pares y refinado en la discusión.

El papel del docente en el enfoque es muy importante, teniendo en cuenta la forma de trabajo en el aula y la necesidad de verificar procesos, no puede ser solamente acompañante del proceso, cumple funciones intencionales y participa activamente. Entre las responsabilidades que se pueden observar están: ubicar los logros en la zona de desarrollo proximo de los estudiantes, asociar las nuevas enseñanzas al aprendizaje de un saber hacer, relacionar las enseñanzas con el logro, ejemplificar correctamente y suficientemente, hacer uso de recursos cognitivos, realizar actividades para demostrar la importancia de alcanzar los logros propuestos, desarrollar la enseñanza con una secuencia clara, intervenir el clima del aula de tal forma que permita que el estudiante pueda realizar los procesos cognitivos y afectivos.

En el caso del estudiante se puede concluir que el rol del estudiante en el enfoque es muy activo y exigente ya que es él quien debe hacer la transferencia de lo que aprende a la vida cotidiana, hacer esfuerzo consciente y permanente de aplicar las herramientas de a cultura para el aprendizaje y apasionarse por lo que aprende.

## 5.4 CONCLUSIONES GENERALES

Para enseñar a pensar se necesita una nueva propuesta pedagógica y esto, a su vez, requiere de una nueva organización de las aulas y de las escuelas, que puedan dar lugar a modos distintos de enseñar. Si se quiere tener escuelas capaces de enseñar de un modo diferente, se debe aceptar el desafío de no sólo modificar la propuesta pedagógica “en las aulas” sino idear otras maneras de “hacer escuela”.

Desde lo epistemológico y lo social la escuela tiene la oportunidad de reposicionarse, hay que formar educadores con una mirada proactiva. La gran pregunta sería ¿cómo hacemos para revisar los contenidos escolares de manera de poder insertar la contemporaneidad como contenido de reflexión en la escuela? Ya no tenemos que pensar los contenidos como cobertura de información – hoy la información está en todos lados – sino pensarlos más como estrategias de reflexión y recolección de información.

La enseñanza de conceptos a partir de enfoque cognitivos permiten el desarrollo del razonamiento matemático activando los procesos de pensamiento necesarios para el aprendizaje del concepto elevando el nivel de competencia en cada uno de estos procesos, hasta la explicación de los procesos realizados.

Además del mejoramiento del proceso de razonamiento que se describe en las conclusiones por enfoque y en los análisis de los datos, se observa que cada uno desarrolla sustancialmente la capacidad de crítica de los estudiantes y de las posibilidades de hacer relaciones no solamente en las matemáticas sino en la vida cotidiana, lo cual es una condición indispensable para ganar competencias para la vida y lograr ciudadanos autónomos.

Cada uno de estos enfoques permite la variación en los puntos de entrada, de tal forma que en las intervenciones realizadas se encuentran puntos de entrada lógicos, experimentales, literarios y en el desarrollo de las intervenciones otros puntos de entrada que enriquecen la intervención y permiten que los estudiantes desde sus capacidades puedan enfrentar la situación y desde allí avanzar a otras cumbres.

La diversidad de los enfoques permite el acercamiento a otras cogniciones que se encuentran distribuidas en cada una de las situaciones y ambientes en que se estén impartiendo la enseñanza y realizando los aprendizajes, esto es importante en la medida en que el estudiante tiene la posibilidad de enfrentarse a situaciones diversas de aprendizaje donde pone en juego sus capacidades y puede desarrollar otras habilidades que no tenía por la forma en que trabajaba cotidianamente.

Cada uno de los enfoques, además, centra su aplicación en puntos específicos propios de los objetivos que plantean, por ello y viendo como en su aplicación el enriquecimiento es integral, no es bueno “casarse” con un solo enfoque sino intentar que en el transcurso de las clases se puedan poner en juego diferentes perspectivas, teniendo en cuenta los objetivos que se tengan, el contexto en que se estén moviendo los docentes y estudiantes, los conceptos a trabajar, los niveles de razonamiento que se quieran desarrollar y todo lo que rodea el proceso de enseñanza. Es así que se puede concluir que la enseñanza para la comprensión mejora, como en este caso, el planteamiento de hipótesis, el que estas hipótesis se verifiquen, se resuelvan los problemas y se propongan nuevas posibilidades de resolución; el Enfoque Cubano mostró una manera excelente de profundizar en los conceptos, lo cual podría convertirse en una debilidad del enfoque anterior, esto debido a la sistematicidad en la planeación y llevada a cabo de las actividades de clase; la Pedagogía Conceptual permitió un ordenamiento de la mente de los estudiantes, el que enfrente el aprendizaje de una manera lógica y sistemática, con posibilidades de realimentación y verificación de los procesos.

El aprendizaje comprensivo de las matemáticas, como se busca en estas intervenciones, implica que los alumnos conjeturen, que realicen abstracciones, no descontextualizadas, de las propiedades matemáticas, que expliquen razonamientos, que validen sus aciertos y que discutan y cuestionen su modo de pensar y el de los demás.

Otro punto importante en lo que concierne a los resultados obtenidos es el referido al trabajo metacognitivo. El control y la regulación son aspectos de la metacognición que tienen que ver con las decisiones sobre cuándo y cómo resolver un problema matemático, cuáles son las acciones a seguir, el control de esas acciones y el control de esas acciones y la evaluación de los progresos, planes, acciones y resultados. La clave está en el modo en que se utiliza el conocimiento y no en lo que se conoce. De esta manera es posible que los estudiantes lleguen a ser buenos observadores, analizadores, asesores y evaluadores de su comportamiento y conocimiento.

En general se puede plantear que además de mejorar el proceso de razonamiento, la enseñanza de los conceptos desde los enfoques cognitivos permiten que haya un mejoramiento en el aprendizaje de los estudiantes, esto debido a que el centro de la intervención realizada se da en torno a los procesos que el estudiante utiliza para aprender, no solo a los contenidos que se deben aprender. Es decir que la enseñanza no se centra en el desarrollo de contenidos sino que usa los contenidos como campo de acción para el trabajo con los procesos de pensamiento con lo cual avanza el aprendizaje y se desarrolla el razonamiento.

Este mejoramiento en las posibilidades del aprendizaje reduce, de manera significativa, las barreras que el estudiante tiene para aprender, lo mismo que las que el entorno le pone. Al mejorar en los procesos necesarios para aprender, el

estudiante predispone su mente para el procesamiento de la información que se va a presentar; al prepararse las actividades de enseñanza a partir de los enfoques cognitivos se presenta la información de tal forma que se parta de los procesos que el estudiante maneja y no de aquellos que no maneja; al presentarse la información desde diversos puntos de entrada, se permite que cada estudiante ubique la mejor forma para acceder a ella; y al desarrollarse la actividad de manera sistemática se activan cada uno de los procesos requeridos para que se de el aprendizaje y por lo tanto el ordenamiento de las ideas, razonamiento, fluye de manera correcta.

## **6. RECOMENDACIONES**

### **6.1 ENSEÑANZA PARA LA COMPRESIÓN**

El la aplicación de la intervención se recomienda a los docentes tener en cuenta que:

Cuando ya se hayan generado los desempeños de comprensión, se deben ordenar en secuencia a fin de asegurarse que se lleven a cabo a lo largo de la unidad. Se recomienda que la secuencia sea teniendo en cuenta los procesos de pensamiento ya que de esta forma se respeta el nivel de razonamiento de los estudiantes y se van mejorando desde el nivel que maneja cada estudiante.

Al planear se debe pensar en desempeños que den ocasión de explorar el tópico generativo y la comprensión que tienen los estudiantes sobre el tópico; otros que se centren en la comprensión de problemas o aspecto concretos del tópico generativo importantes para el docente; desempeños complejos que permiten que los estudiantes sinteticen y demuestren la comprensión.

Para la enseñanza de los desempeños de comprensión el docente ayuda a establecer conexiones entre los desempeños y las metas de comprensión. Estas conexiones ayudan a mejorar los procesos de relación, en este caso a medida que se comprende la organización de la aplicación y las actividades con lo que se quiere conseguir, se establecen nexos entre variables y conceptos.

El docente debe estar atento al progreso de los estudiantes, escuchar sus preguntas, sus confusiones y sus inquietudes las que deben ser tratadas en grupos de discusión o en clases magistrales. Hay que pedir razones a las respuestas de los estudiantes, que ofrezcan pruebas que respalden las respuestas, que realicen predicciones durante los procesos de discusión y que

escriban reflexiones acerca de sus desempeños, este trabajo es el que mejora los procesos de argumentación y lleva a los estudiantes a pensar en otras posibilidades lo que mueve la activación de los procesos y el mejoramiento del razonamiento.

## **6.2 ENFOQUE CUBANO**

Para mejorar el dialogo heurístico utilizado se deben tener en cuenta algunos requisitos como son: escoger la palabra correcta para formular la pregunta, formular la pregunta con claridad y precisión, la pregunta debe corresponder a la capacidad de rendimiento de los alumnos, no abusar de preguntas alternativas (de si o no), tratar con mucho cuidado las preguntas de definición y evitar preguntas en cadena, la pregunta debe formularse de tal manera que estimule a los alumnos a pensar y no solo a reproducir conocimientos ya asimilados, debe estar dirigida en una forma tan precisa que muestre a los alumnos la dirección del razonamiento y no los confunda, el docente debe darle tiempo al alumno para reflexionar la pregunta y su respuesta.

Como es sabido, la motivación juega un papel importante en el acercamiento de los estudiantes hacia el conocimiento, por lo tanto se debe proponer actividades que de una u otra forma motiven al estudiante en su proceso de aprendizaje, es de anotar que aunque ello hace parte del mismo enfoque no se tuvo en cuenta.

## **6.3 PEDAGOGÍA CONCEPTUAL**

Para la aplicación de esta metodología se recomienda:

Utilizar preguntas que desequilibren al estudiante en los ejercicios, con el fin de mantenerlo activo y motivado en el desarrollo de la clase. Estas preguntas no se deben hacer en las evaluaciones.



Aplicar pruebas básicas que me permitan evidenciar que los estudiantes si comprenden el concepto y lo aplican, recuerden que la intensión no es desmotivar al estudiante.

Utilizar ayudas didácticas que permitan construir el concepto y a la vez generar un ambiente propicio para su aprendizaje.

## BIBLIOGRAFÍA

- BELTRAN LLERA, Jesús. Psicología de la instrucción I. Variables y procesos básicos. Editorial Síntesis. Madrid. 1998.
- BELTRAN LLERA, Jesús. Procesos, estrategias y técnicas de aprendizaje. Editorial Síntesis. Madrid. 1993.
- CARRETERO, M. y GARCIA MADRUGA, J.A. Lecturas de psicología del pensamiento Razonamiento, solución de problemas y desarrollo cognitivo, Madrid, Ediciones Alianza. 2004.
- COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Bogotá: El Ministerio, 1998.
- DE ZUBIRÍA SAMPER, Julián y De Zubiría Samper, Miguel. Biografía del Pensamiento, Estrategias para el desarrollo de la inteligencia. Mesa Redonda Magisterio. 1995.
- DE ZUBIRÍA SAMPER, Julián y González Castañón, Miguel Ángel. Estrategias Metodologías y Criterios de Evaluación. Fundación Alberto Merani, Fondo de Publicaciones Bernardo Herrera Merino. Bogotá, 1995, pág. 44 y 43.
- DE ZUBIRIA SAMPER, Miguel. Enfoques pedagógicos y didácticas contemporáneas. editorial es Fundación internacional de Pedagogía conceptual. Alberto Merani. Bogotá. 2003.
- DE ZUBIRÍA SAMPER, Miguel. Brito Albuja, José Guillermo y otros. Pedagogía Conceptual. Desarrollos filosóficos, pedagógicos y psicológicos.

Fondo de Publicaciones Bernardo Herrera Merino. Fundación Alberto Merani. Bogotá, 1999.

- DICCIONARIO BÁSICO DE LA LENGUA ESPAÑOLA. Grupo Editorial Norma. Bogotá. 1990.
- GARDNER, Howard. Kornhaber, Mindy L. Wake, Warren K. Inteligencia. Múltiples Perspectivas. Editorial Aique. Buenos Aires. 2000.
- JUNGK, Werner. Conferencias sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática. Ed. Pueblo y Educación. Cuba, 1981.
- JUNGK, Werner. Conferencias sobre Metodologías de la Enseñanza de la Matemática 2.
- PAIVA, Andrews. La educación liberadora de Paulo Freire y el desarrollo del pensamiento. Ponencia presentada en el III Simposio “El formador de formadores en los albores del siglo XXI”. Valencia, 13 y 14 de mayo de 2004.
- PARGA, Manuel. Pensamiento de orden superior en diseño: Aportes del enfoque cognitivo a los procesos de formación de competencias para diseñar. Encuentro latinoamericano. Universidad de Palermo. 2007.
- PERRONE, Vito. “¿Cómo podemos preparar nuevos docentes?”, en Stone, M. Enseñanza para la comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica, Paidós, buenos Aires, 1999.
- PONTUAL, Pedro. Paulo Freire. A cinco años de su muerte homenaje al gran educador.

- PIERCE, Charles S. Razonamiento. (1901). Traducción castellana de Sara F. Barrena. "Reasoning" corresponde a CP 2.
- Quispe Santos, Walter. "Constructivismo, dilemas e innovaciones" en Candidus Revista de Educación, Año 1 N° 1. Caracas, Venezuela. 2000.
- Quispe Santos, Walter. "La descentralización curricular" en Investigación Educativa Año 7 N° 12 págs 41 – 54 Universidad de San Marcos, Lima. 2003.
- Quispe Santos, Walter et al. La enseñanza de la comprensión lectora. Monográficos, UGEL San Román, Juliaca. 2004.
- Quispe Santos, Walter & Mamani, Bartolomé. No se educa para el silencio sino para la comunicación. Monográficos, UGEL San Román, Juliaca. 2004.
- SÁNCHEZ, Margarita A. de. Desarrollo de habilidades del pensamiento: procesos básicos del pensamiento: guía del instructor. Editorial Trillas. México. 1991 (reimp. 2004).
- SCHMELKES DEL VALLE, Silvia. La combinación de estrategias cuantitativas y cualitativas en la investigación educativa: reflexiones a partir de tres estudios. En: Revista Electrónica de Investigación Educativa. Volumen 3. No 2. 2001.
- STONE WISKE, Martha. la enseñanza para la comprensión. Vinculación entre la investigación y , la práctica, Paidós, Buenos Aires, 1999.

- REICHARDT, Charles S. y Cook, Thomas D. Más allá de los métodos cualitativos versus los cuantitativos. En: Estudios de Psicología. No 11. 1982.
- RESNICK, Lauren y Kopfer, Leopold. Currículum y cognición. Editorial Aique. Buenos Aires. 1997.
- VALVERDE, Lourdes y Zapata Correa, Álvaro. Formación de conceptos.
- VASCO, Carlos. El debate recurrente sobre la investigación cuantitativa y la cualitativa. En: Nómadas. No 18. Abril de 2003.
- VILLARREAL, Jorge y Muñoz, Maribel. Procesos de Pensamiento. Documento de trabajo Unidad de Atención Integral de Medellín. Documento sin editar.
- ZILLMER, Wolfgang. Complementos de metodología de la enseñanza de la matemática. Editorial de libros para la educación. La Habana Cuba.1981, p.189.

## PAGINAS WEB

- <http://www.bibliociencias.cu/gsd/collect/libros/index/assoc/HASH0174/138d28e8.dir/doc.pdf> , 08 - 08 - 2009
- <http://www.programabecas.org/numero/9.9.htm>. 08 - 08 - 2009
- [http://www.dimensioneducativa.org.co/aa/img.../Paulo\\_Freire.doc](http://www.dimensioneducativa.org.co/aa/img.../Paulo_Freire.doc)

## ANEXO 1

### ACTIVIDAD DE PARÁBOLA

1. Dadas las siguientes características escriba la ecuación correspondiente.

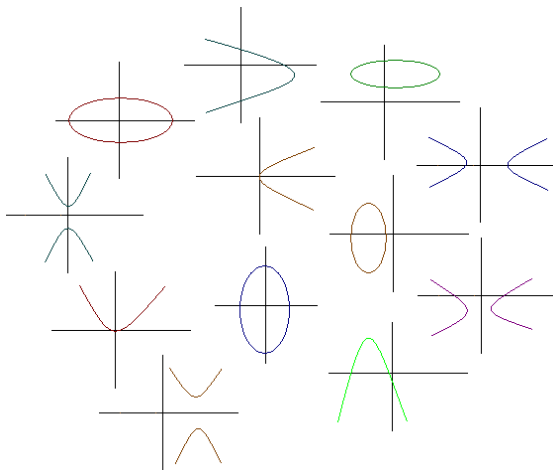
a) Eje focal y, abre hacia abajo, su vértice es el origen,  $p = 5$  cm.

b) Eje focal x, abre hacia la derecha, su vértice es  $(4, 5)$ ,  $p = 2$  cm

2. Dada la siguiente ecuación enuncie las características de la curva y gráfiquela.

$$(y - 2) = \frac{(x + 4)^2}{8}$$

3. Identifique cuál de las siguientes gráficas representan una parábola.



4. De las siguientes ecuaciones, ¿cuáles de ellas representan la ecuación de la parábola?

- a.  $4x + y^2 = 0$                       c.  $(x - 5)^2 = 4p(y - 2)$   
b.  $16x^2 + 4y^2 = 64$

5. En las siguientes oraciones conteste F y V, en caso de ser falsa justifique su respuesta.

- a. La parábola se define como el lugar geométrico del conjunto de los puntos que tienen diferente distancia a una recta fija llama directriz. \_\_\_\_
- b. El eje focal se define como la recta paralela a la directriz y que pasa por el foco. \_\_\_\_\_
- c. El eje focal es el único eje de simetría de la parábola. \_\_\_\_
- d. El vértice es el punto donde se interceptan el eje de la parábola y la curva. \_\_\_\_



## **ANEXO 2**

### **PREGUNTAS ESENCIALES O TEMA GENERATIVOS**

¿Es posible medir edificios o estructuras de gran altura, sin tener que subirse a ellos, utilizando los conceptos matemáticos aprendidos y otras herramientas matemáticas?

¿Cuál es el principio geométrico de funcionamiento de una antena parabólica?

¿Qué otras aplicaciones de los conceptos trabajados, se pueden encontrar en la vida real?

### **LOS PROPÓSITOS DE LA COMPRENSIÓN**

- Reconocer y contrastar propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Seno y Coseno).
- Aplicar y justificar criterios de congruencias y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas.
- Usar representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.
- Describir y modelar situaciones mundo real usando relaciones trigonométricas.
- Reconocer las características esenciales de la parábola y sus aplicaciones.

### **DESEMPEÑOS DE COMPRENSIÓN**

1. Interpreta correctamente los datos.
2. Realiza gráficas pertinentes para desarrollar la tarea, según su interpretación.
3. Cuando se le brinda un gráfico ubica los datos en forma acertada.
4. Resuelve la ecuación que se plantea.
5. Utiliza la razón trigonométrica seno, coseno o tangente cuando sea requerida.
6. Resuelve correctamente la tarea, es decir, llega a la respuesta esperada.

7. Aplica correctamente la ley de senos o la ley de cósenos.
8. Explica que la medida del segmento que pasa por el punto C perpendicular al trayecto que camina la persona es la menor distancia entre los dos puntos.
9. Indica cómo encontrar el ángulo o los ángulos necesarios para resolver la tarea.
10. Determina el ángulo de incidencia del sol, a partir de las sombras producidas por éste.
11. Propone ejemplos en los cuales muestra la utilidad de las razones trigonométricas.
12. Justifica la utilidad de resolver problemas de este tipo.
13. Relaciona los ejercicios propuestos con las experiencias de la vida cotidiana.
14. Justifica la congruencia de ángulos entre paralelas.
15. Demuestra la ley de senos o la ley de cosenos.
16. Se ha preguntado la veracidad de las fórmulas de la trigonometría que utiliza.
17. Escribe las pruebas (o intentos de éstas) con rigurosidad matemática.
18. Diferencia la parábola de otras cónicas.
19. Reconoce las características esenciales de la parábola.
20. Comprende las aplicaciones de la parábola en situaciones reales.

### ANEXO 3

## CONCEPTO DE PARÁBOLA

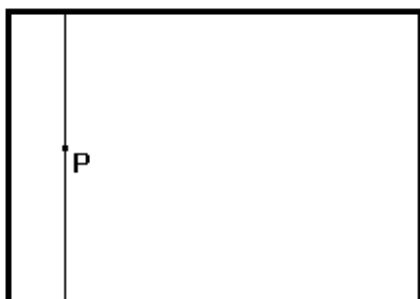
OBJETIVO: Por medio del sentido del tacto y la vista; en un ambiente creativo y recreativo el alumno construirá e identificará las cónicas como envolventes de tangentes; utilizando para ello la papiroflexia con un fin didáctico.

Situación problema: Construir la parábola mediante doblado de papel.

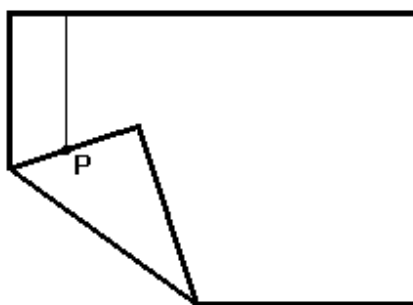
Algoritmo de construcción, (indicaciones dadas por el profesor verbalmente):

### PARÁBOLA.

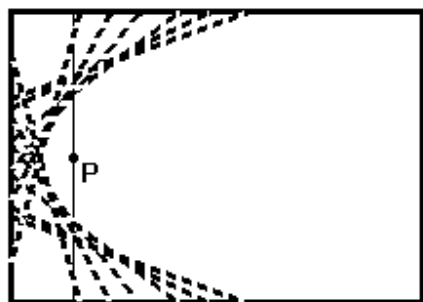
Tomar una hoja rectangular y a unos 3 cm de uno de los lados menores traza una paralela a éste. Tome un punto **P** sobre esa recta más o menos centrado.



Doble la hoja de forma que el lado señalado pase por el punto **P**.

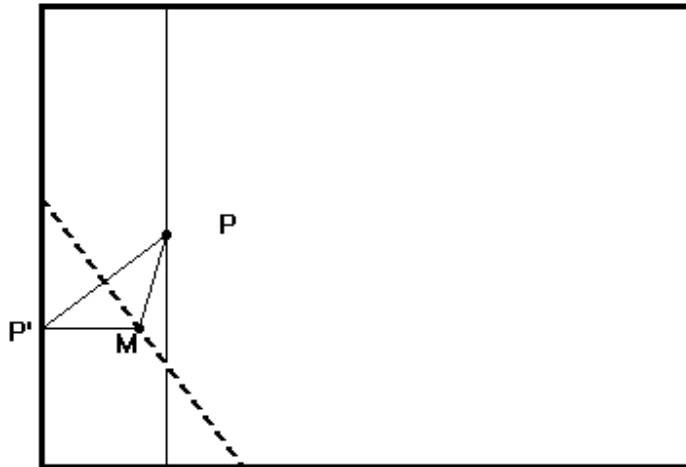


Desdoble y marque con lápiz el dobles. Repite y dibuja los dobleces variando el punto de apoyo sobre el lado de un extremo a otro.



Observe como se va delimitando una figura.

♣ Fíjese en un dobléz. Marque en el lado el punto **P'** que al doblar cae sobre **P** y desdoble.



**M** al lado.

Desde **P'** trazamos una paralela al lado hasta cortar al dobléz en el punto **M**. Es claro que la longitud de **MP** es igual a la de **MP'**, pero esta última es la distancia de

### **ANEXO 3A**

Presentación de los trabajos terminados ante el grupo.

#### Análisis de la actividad

- 1) ¿Qué nombre le das a los dobleces que hiciste?
  - 2) ¿Cada doblez tiene la misma longitud?
  - 3) ¿Cómo determinas la longitud?
  - 4) ¿Qué unidad de medida utilizaste?
  - 5) Delinee con color verde la curva que se formó.
  - 6) Marque con color azul uno de los dobleces.
  - 7) Marque con color rojo el punto de intersección entre la curva obtenida y el doblez coloreado de azul.
  - 8) ¿Qué nombre matemático recibe la curva delineada, la recta y el punto de intersección?
  - 9) Mida la distancia del punto fijo al punto de intersección y de este al borde de la hoja.
  - 10) Repite los pasos 5, 6, 7 y 9.
- ¿Qué relación se puede establecer entre las medidas halladas?

## **ANEXO 3B**

Después de esta actividad se comenzaron a encontrar otras de las características de la parábola para luego llegar a la ecuación. Este momento es posible realizarle variaciones según el nivel que muestren los estudiantes. La mejor opción puede ser llegar a las ecuaciones de la parábola a través de un diálogo heurístico.

Enseguida se realizaron las gráficas que representaban las ecuaciones encontradas y se realizó un conversatorio donde se aclararon las dudas y se sacaron las conclusiones.

Luego se realizó un taller donde se intentó revisar el nivel de comprensión de los estudiantes del concepto trabajado. Este taller se encuentra en los anexos.

## **ANEXO 4**

### **RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE APLICACIÓN**

#### **Objetivos:**

- Organizar los equipos de trabajo para iniciar la resolución de la tarea.
- Organizar la normatividad de funcionamiento de cada equipo de trabajo.
- Introducir la tarea a realizar.
- Lograr la motivación suficiente para el cumplimiento de la tarea.

La aplicación se inicia con la conformación de los grupos de trabajo, nombrando coordinadores iniciales de cada equipo teniendo como criterio para esta elección el rendimiento que han mantenido durante los dos periodos anteriores.

La primera fase inicia con el nombramiento de las cabezas de cada equipo de trabajo para que entre ellos escojan los estudiantes que van a pertenecer a cada uno. Cada equipo de trabajo va a nombrar un supervisor, un expositor, un secretario, un controlador del tiempo y un observador. Al concluir el periodo asignado al trabajo por equipos, cada uno entrega su reporte de solución.

Los equipos deben redactar un manual de normas de funcionamiento que debe nacer del consenso entre todos los miembros y que tendrá vigencia por el tiempo en que se esté trabajando con la solución de triángulos.

Se realiza la introducción a la tarea, con el propósito de ubicar a los estudiantes en contextos similares a la actividad; destacando la importancia que representa su participación en el desarrollo de la sesión.

La tarea en este caso tiene que ver con la medición de la altura de la torre de la parte frontal del colegio. La tarea es esa, encontrar la altura de la torre utilizando

los recursos que puedan utilizar. Después de realizar las mediciones necesarias se debe realizar un reporte escrito de cada grupo donde se explique el proceso a realizar, los conceptos utilizados, las dificultades que se presentaron frente a la tarea y al trabajo en los equipos.



## ANEXO 5

### RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE APLICACIÓN 2

#### Objetivos:

- Interpretar correctamente los datos.
- Hacer los dibujos pertinentes para realizar la tarea, según su interpretación.
- Cuando se le brinda el dibujo coloca los datos en forma acertada.
- Resuelve la ecuación que se plantea.
- Utilizar la razón trigonométrica seno, coseno o tangente cuando sea requerida.
- Resolver correctamente la tarea, es decir, llega a la respuesta esperada.
- Indicar cómo encontrar el ángulo o los ángulos necesarios para resolver la tarea.
- Determinar el ángulo de incidencia del sol, a partir de las sombras producidas por éste.
- Encontrar utilidad a las razones trigonométricas.
- Justificar la utilidad de resolver problemas de este tipo.
- Con ayuda de los ejercicios propuestos, conectar lo que han aprendido con las experiencias de la vida cotidiana.

La clase comienza preguntando acerca de la forma en que se realizó el trabajo y cómo les había ido en la actividad. Algunos estudiantes plantearon desavenencias con sus compañeros de equipo por falta de trabajo. Se realizó una pequeña discusión sobre esto ya que no se hacían cumplir las recién conciliadas normas de los equipos, realizadas por ellos mismos. Algunos estudiantes, sobre todos los coordinadores iniciales de los equipos, pidieron cambiarse de equipos. Por el momento se dejaron los equipos como estaban buscando mejorar su funcionamiento y un aprendizaje en este tipo de trabajo.

En el siguiente momento se le solicita a cada equipo que presente a la clase su solución al problema planteado, permitiendo que los demás equipos pregunten libremente a quienes exponen. La idea es que el profesor promueva la discusión colectiva entre los estudiantes, con la idea de analizar ventajas y desventajas de los diferentes métodos de solución presentados y, cuando sea necesario, realizar una sistematización de las ideas e identificar posibles extensiones del problema.

Frente a esto algunos equipos expusieron las dificultades que tuvieron y que no les permitieron culminar con la tarea. Estas dificultades tienen como centro la falta de relación entre los conceptos trabajados con anterioridad y la tarea propuesta ya que se presentaban dificultades por falta de datos, por no saber realizar algún tipo de medición o querer aplicar conceptos o herramientas no posibles para este caso como el Teorema de Pitágoras.

Se realizó una exposición de un grupo que realizó la tarea aplicando las razones trigonométricas y haciendo una aproximación para el ángulo de elevación, realizó un dibujo del problema ubicando en él los datos que habían medido, el ángulo encontrado y la altura de la torre. Se realizó el debate con los estudiantes frente a la solución planteada la cual fue aprobada por la mayoría.

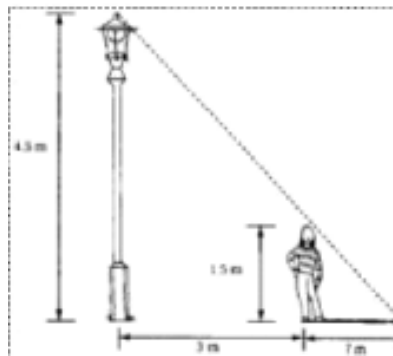
Otro grupo de estudiantes quiso realizar la tarea utilizando criterios de congruencia y semejanza de triángulos sin lograrlo, avanzando en el planteamiento pero quedándose sin los argumentos para continuar. Frente a esta situación los estudiantes estuvieron de acuerdo en menor dado argumentando mayor nivel de dificultad para la resolución.

Enseguida, a partir de la discusión colectiva y el trabajo del docente sobre las diferentes posibilidades de realización, los estudiantes tienen la posibilidad de volver a la actividad y aplicar los nuevos entendimientos que se generaron como producto de la interacción y abordan individualmente la tarea, produciéndose

nuevas ideas que se trabajan bajo la supervisión del docente quien va realizando observación del trabajo individual de los estudiantes y de los interrogantes que presentan.

Seguidamente se les plantea el siguiente problema a resolver por los equipos el cual debe también ser entregado con un escrito donde se escriba la resolución y las dificultades presentadas.

El siguiente es el problema a resolver inmediatamente en la clase



A los estudiantes se les plantean las siguientes preguntas:

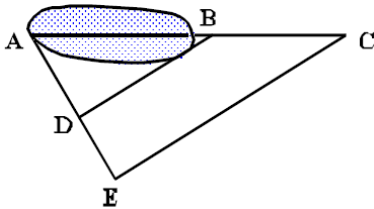
- 1) Alicia mide 1.5 m y se encuentra de pie a 3 m de la base de un poste que tiene una lámpara a 4.5 m de altura. ¿Cuánto mide la sombra de Alicia?
- 2) ¿Cómo varía la longitud de la sombra de Alicia cuando se acerca o se aleja del poste? Traza una gráfica en un sistema de ejes perpendiculares, ¿puedes encontrar una fórmula para esta gráfica?
- 3) La altura de Simón es de 2 m, ¿cómo es la gráfica que representa su sombra? Compara esta gráfica con la trazada para Alicia.

La resolución de este problema se realizó de manera rápida mostrando un mejor manejo en la aplicación de los conceptos después de la discusión del inicio de la clase.

Se hace una explicación corta que sintetice las logradadas por los estudiantes y donde se analiza el tipo de explicaciones que realizan.

Al terminar la clase se deja como trabajo individual la resolución del siguiente problema:

- 1) Dos exploradores miden la longitud  $AB$  de un estanque (figura adjunta) construyendo un triángulo  $ACE$  y trazando  $BD$  paralela a  $CE$ . Suponiendo que  $AE = 8$  m,  $DE = 3$  m. y  $BC = 3,60$  m. ¿Qué longitud tiene  $AB$ ?



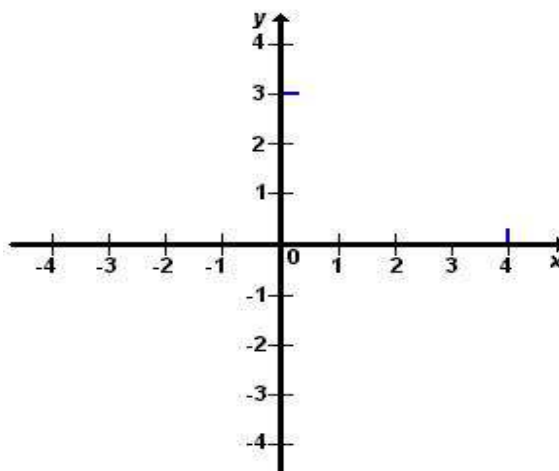
## ANEXO 6

### RECORDEMOS

#### PLANO CARTESIANO

Es un sistema de referencia que se construye dibujando dos rectas numéricas, una horizontal y la otra vertical, las cuales se interceptan una de la otra en sus respectivos ceros, este punto se llama origen y cada una de las rectas se les llama ejes cartesianos o ejes coordenados rectangulares.

En la recta horizontal o eje de las  $x$ , los números positivos están a la derecha del origen y los negativos a la izquierda del origen. En la recta vertical o eje de la  $y$  los números positivos están arriba del origen y los negativos abajo del origen.



El plano cartesiano tiene como finalidad describir la posición de puntos, los cuales se representan por sus coordenadas o pares ordenados.

Las coordenadas de un punto se forman asociando un valor del eje de las "X" y uno de las "Y", respectivamente, esto indica que un punto se puede ubicar en el plano cartesiano con base en sus coordenadas, que se representa como:  $P(x,y)$

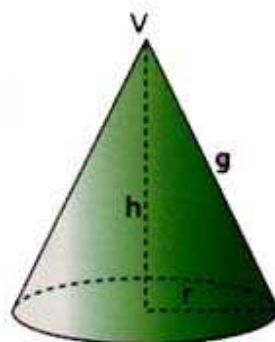
Para localizar puntos en el plano cartesiano se debe llevar a cabo el siguiente procedimiento:

1. Para localizar la abscisa o valor de  $x$ , se cuentan las unidades correspondientes hacia la derecha si son positivas o hacia a izquierda si son negativas, a partir del punto de origen, en este caso el cero.
2. Desde donde se localiza el valor de  $x$ , se cuentan las unidades correspondientes hacia arriba si son positivas o hacia abajo, si son negativas y de esta forma se localiza cualquier punto dadas sus coordenadas.

## CONO

Un cono, en geometría elemental, es un sólido de revolución generado por un giro de un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos. Al círculo conformado por el otro cateto se denomina base y al punto donde confluyen las generatrices ( $g$ ) se llama vértice ( $v$ ).

$h$  = altura



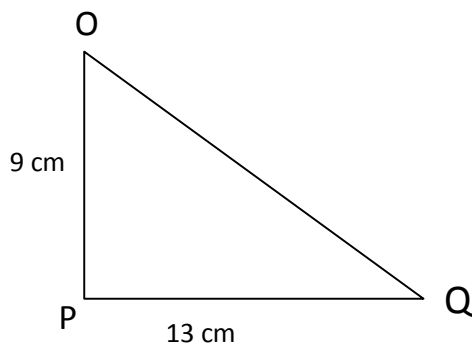
## ANEXO 7

### DEFINICIONES PREVIAS

**ÁREA:** es la medida de la porción del plano que ocupa una figura. Se expresa en unidades de superficie (cm, m, km, entre otros). Para calcular el área de un triángulo se utiliza la siguiente fórmula  $A = (b \cdot h)/2$ .

**PERÍMETRO:** es la medida del contorno de una figura. Se halla sumando el valor de cada lado de la figura.

**EJEMPLO:** Halle el área y el perímetro de la siguiente figura



**RAZÓN:** es el cociente entre dos magnitudes ( $a/b$ ).

**RAZÓN TRIGONOMÉTRICA:** es el cociente entre dos de las longitudes de un triángulo rectángulo asociado a un ángulo.

De acuerdo con la definición anterior, recordemos que en un triángulo rectángulo podemos definir tres razones que son:

$$\text{Sen } \theta = c.o/h \quad \text{Cos } \theta = c.a/h \quad \text{tan } \theta = c.o/c.a$$

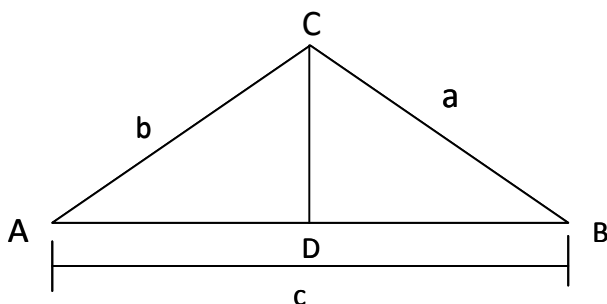
## ANEXO 8

### LEY DEL SENO

En la segunda hora se iniciará el tema de la ley del seno, para esto se dibujaran tres triángulos no rectángulos en el tablero y se les preguntará lo siguiente:

1. ¿Son triángulos rectángulos?
2. ¿Cómo se puede resolver estos triángulos?

Para poder resolver triángulos que no son rectángulos o llamados triángulos oblicuángulos podemos utilizar la ley del seno o teorema del seno. Para eso se le pedirá que dibuje el siguiente triángulo:



¿Qué son las alturas en un triángulo? Son rectas perpendiculares que se trazan desde los vértices del triángulo al lado opuesto.

Trace una de las alturas.

¿El triángulo ADC es rectángulo? ¿Por qué?

¿El triángulo BDC es rectángulo? ¿Por qué?

Como se llega a determinar que son triángulos rectángulos se les pedirá que hallen la razón trigonométrica seno para el ángulo A.



$$\text{Sen } A = h/b$$

Ahora hallemos la razón trigonométrica seno para el ángulo B

$$\text{Sen } B = h/a$$

¿Qué tienen en común estas dos razones trigonométricas?

Como la altura (h) es la misma despejémosla

$$h = b \text{ Sen } A$$

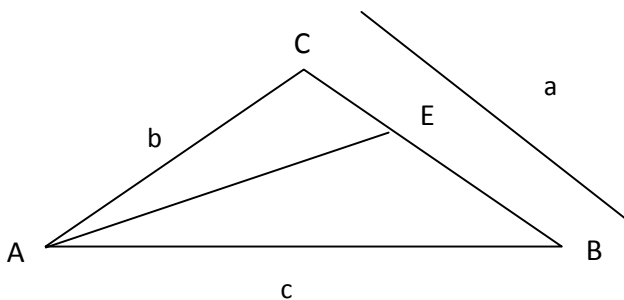
$$h = a \text{ Sen } B$$

Igualemos

$$b \text{ Sen } A = a \text{ Sen } B \text{ ó}$$

$$b / \text{Sen } B = a / \text{Sen } A$$

Ahora hagan lo mismo para el siguiente triángulo



¿Qué podemos concluir? Esperamos que los estudiantes concluyan la ley de los senos en forma aproximada.

La ley de los senos es una relación de tres igualdades que siempre se cumple entre los lados y ángulos de un triángulo cualquiera. Se enuncia de la siguiente forma: en todo triángulo, la longitud de los lados es directamente proporcional a los senos de los ángulos opuestos.

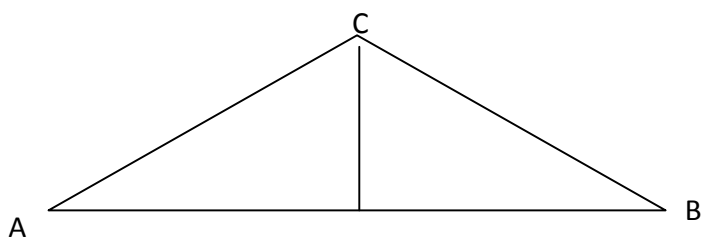
Además se les plantea las siguientes situaciones en donde se puede utilizar la ley del seno:

- Cuando se conocen las medidas de dos ángulos y la longitud del lado opuesto a uno de ellos.
- Cuando se conocen las longitudes de dos lados y la medida del ángulo opuesto a uno de ellos.
- Cuando se conocen las medidas de dos ángulos y la longitud del lado incluido.

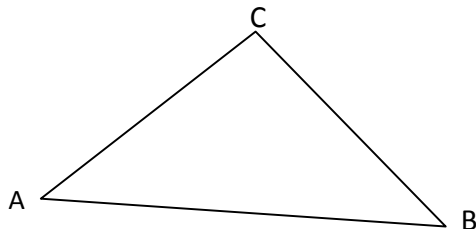
Igualmente se hizo para la ley del coseno y se desarrollaron ejercicios del siguiente estilo:

- a) Resolver el triángulo ABC donde el ángulo  $A = 57^\circ$ ,  $b = 32.84$  cm y  $a = 30.72$  cm
- b) Un lote de forma triangular esta bordeado por dos carreteras que se encuentran con un ángulo de  $85^\circ$ . Los lados del lote que dan hacia las carreteras miden cada una 86 m. ¿cuántos metros de cerca deben colocar para encerrar el lote?

- c) En el triángulo ABC se dan los valores de  $a$ ,  $b$  y  $C$ . Explica por qué el área del triángulo está dada por la fórmula  $\frac{1}{2} ab \text{ Sen } C$



- d) Para medir la distancia entre dos puntos R y T en lados opuestos de un lago, Lucia parte del punto R y camina 183 m hasta un punto P, gira  $35^\circ$  y camina 265 m hasta el punto T. ¿Cuál es la distancia entre R y T?
- e)  $A = 36^\circ$   $c = 6$  cm y  $b = 13$  cm.



- f) Diga por qué con los siguientes datos de un triángulo no se puede utilizar el teorema del coseno?  
 $A = 28^\circ$   $B = 56^\circ$   $a = 9$  cm
- g) Dos ciudades A y B están separadas entre sí 200 km. Un piloto sale de A y se dirige hacia B, pero a 80 km observa que se ha desviado de su ruta  $6^\circ$ . ¿A qué distancia está de B en ese momento?

## **ANEXO 9**

**CONCEPTO:** Secciones cónicas

**OBJETIVO:** Construir el concepto de secciones cónicas, centrándonos en el de parábola.

### **PREPARACIÓN**

Al iniciar la clase se resolverán las dudas de los estudiantes respecto al documento "Recordemos".

Para esta clase se tiene preparado la construcción de la parábola a partir de las secciones cónicas, las cuales se definen como "cada una de las curvas planas que se obtienen al cortar un cono con un plano", además se hará la construcción con doblado de papel.

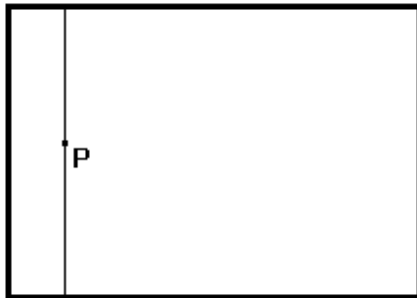
Los materiales para la construcción con el cono son: dos conos de cartulina, tijeras, hojas, lápiz, cinta o colbón, hoja iris, regla y compás.

Esta actividad se realizará en parejas, cada estudiante debe traer un cono y este será unido con el de su pareja con la cinta o con colbón.

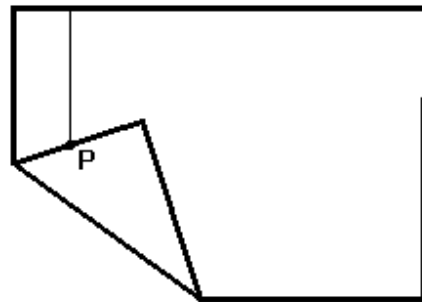
Después de hacer la unión se le pedirá que le realice lo siguiente: un corte paralelo a la generatriz (o lado del cono). Al terminar de realizar este corte se les pedirá que dibujen la figura obtenida en el cono en las hojas y se les entregará las siguientes preguntas:

1. Describe la figura obtenida
2. ¿Cómo llamarías a la curva que acabas de obtener al cortar el cono?
3. Has observado esa misma figura en otras partes, ¿en dónde?

Después de realizar el corte se construirá la parábola con dobleces de papel.



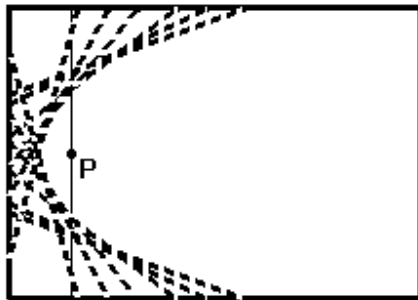
Ahora toma la hoja iris y recorta un rectángulo y a unos 3 cm de uno de los lados menores traza una paralela a éste. Toma un punto P sobre esta más o menos centrado.



Dobla la hoja de forma que el lado señalado pase por el punto P.

Desdobra y marca con lápiz el doblez. Repite y dibuja los dobleces variando el

punto de apoyo sobre el lado de un extremo a otro.



Compara la figura obtenida con la anterior: ¿En qué se parecen?

Señala un punto (A) en uno de los lados de la figura obtenida y señala otro punto (M) paralelo a este y mide la distancia del punto A al M y del M al P. ¿Qué relación tienen estas dos medidas?

Intenta hacer lo mismo con varios puntos. ¿Qué puedes concluir?

## PARTE 2

**OBJETIVO:** Construir el concepto de parábola y sus elementos.

Esta clase se va a iniciar socializando las conclusiones a la que llegaron los estudiantes al realizar la actividad pasada. A partir de estas conclusiones se va a construir el concepto de parábola, cuya definición a enseñar es: lugar geométrico del conjunto de los puntos que tiene igual distancia a una recta fija llamada **directriz** y a un punto no perteneciente a este llamado **foco**.

Y a partir de la definición se van a enseñar los siguientes elementos:

**Eje:** recta perpendicular a la directriz y que pasa por el foco. Es el único eje de simetría de la parábola.

**Vértice:** punto donde se interceptan el eje de la parábola y la curva. Este punto equidista del foco y de la recta directriz

Además se dará la fórmula de la parábola:

$$y^2 = 4px$$

La ecuación corresponde a una parábola con las siguientes características:

- Su eje focal coincide con el eje x.
- Su vértice es el origen (0,0).
- Esta abierta hacia la derecha cuando  $p > 0$ .
- Las coordenadas del foco son (p,0).
- La ecuación de la directriz es  $x = -p$ .

No se va a realizar la demostración de la fórmula de la parábola ya que requiere de mucho tiempo para el trabajo en clase.

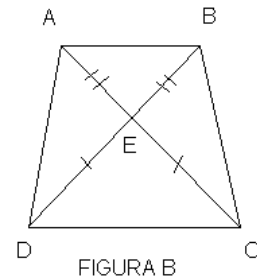
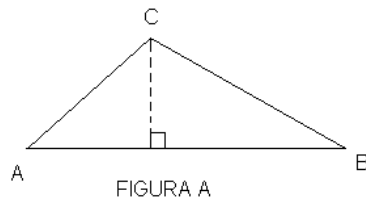
## ANEXO 10

### LEY DEL SENO Y COSENO

#### EJERCICIOS PREPARATORIOS.

Objetivos: Identificar las partes de un triángulo.

1. Identifica en la figura A tres triángulos rectángulos, la hipotenusa y los catetos de cada uno. En la figura B, identifica dos triángulos obtusángulos, dos triángulos isósceles, reconociendo también sus lados, la base y el ángulo del vértice de cada uno.



2. En los triángulos de la figura C, identifica cada uno de sus lados, el cateto opuesto, cateto adyacente y la hipotenusa, luego calcula las relaciones:

- Cateto opuesto/hipotenusa.
- Cateto adyacente/hipotenusa.
- Cateto opuesto/hipotenusa.



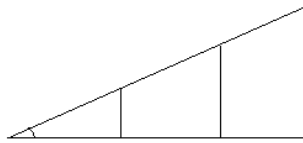
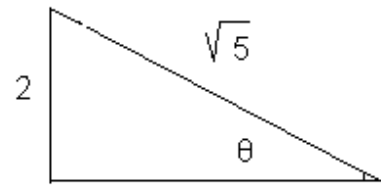
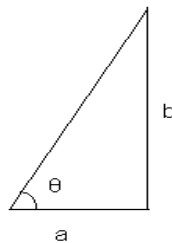
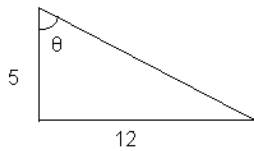


FIGURA C.

4. La altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 3 cm. Si la hipotenusa mide 10 cm, encuentre la medida de cada cateto.

5. Hallar las razones trigonométricas del ángulo  $\theta$  en cada triángulo rectángulo.



## **ANEXO 11**

### **TEMA: CÓNICAS LA PARÁBOLA**

#### **EJERCICIOS PREPARATORIOS**

**Objetivo:** identificar cada una de las características de la parábola partiendo de la construcción.

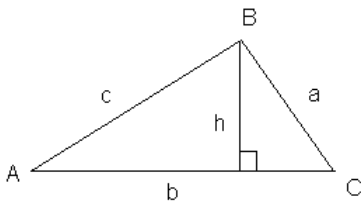
En los ejercicios preparatorios se utilizó el diálogo heurístico permitiendo gracias a las discusiones generadas entre los estudiantes y el profesor recordar el concepto de distancia.

## ANEXO 12

### FORMACIÓN DEL CONCEPTO

#### Ley de senos

Completa y justifica cada paso de la demostración.



$$\text{sen}A = \frac{h}{c} \Rightarrow h = \underline{\hspace{2cm}} \quad (1)$$

$$\text{sen}C = \frac{h}{a} \Rightarrow h = \underline{\hspace{2cm}} \quad (2)$$

De (1) y (2) tenemos que  $h = h \Rightarrow \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}} =$

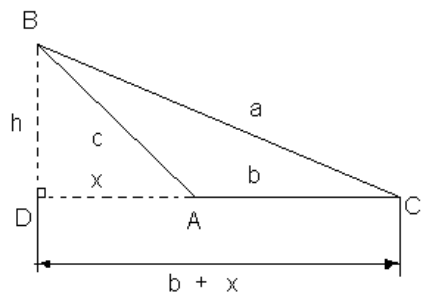
$$c \text{sen}A = \underline{\hspace{1cm}} \Rightarrow \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}} =$$

Trazando la altura  $h_1$  desde el vértice C al lado  $\overline{AB}$ ,

Demuestre que:  $\frac{b}{\text{sen}A} = \frac{a}{\text{sen}B}$ ; Y establece tu conclusión.

#### Ley de cosenos.

Completa y justifica cada paso de la demostración.



- En el  $\triangle BDA$

$$h^2 = \underline{\hspace{2cm}} - \underline{\hspace{2cm}}$$

- En el  $\triangle CBD$

$$h^2 = a^2 - (\underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}})$$

- $h^2 = h^2 \Rightarrow \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

- $a^2 - b^2 - 2bx - x^2 = \underline{\hspace{2cm}}$

- $a^2 = b^2 + c^2 + 2bx \underline{\hspace{2cm}}$

- En el  $\triangle BDA$

$$\cos(180^\circ - A) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x = -c \cos A \quad \text{¿Por qué?}$$

- $a^2 = b^2 + c^2 \underline{\hspace{2cm}}$

## ANEXO 13

### ELABORACIÓN DEL CONCEPTO

En la segunda parte de la clase haremos la construcción de la sección cónica “parábola” utilizando escuadra, hojas y una tira de hilo. Con esta construcción pretendemos identificar, establecer relaciones que permitan definir la parábola.

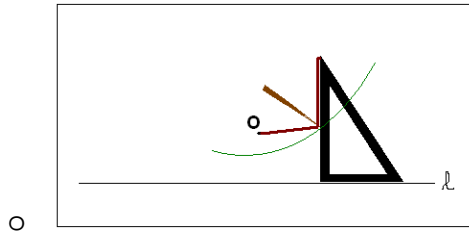
#### *CONSTRUCCIÓN DE LA PARÁBOLA:*

Materiales:

- Escuadra
- Hoja
- Cuerda de lana.
- Lápiz

Procedimiento:

- Ubique la hoja de forma horizontal, luego trace una línea  $\ell$  paralela a 3 cm del borde inferior.
- Designe un punto  $O$  en la hoja de modo que este a 5 cm de la línea  $\ell$  y que este centrada respecto a los bordes laterales.
- Corte la cuerda de tal modo que su longitud sea igual a la longitud del cateto mayor de la escuadra.
- Sitúe la escuadra de modo que su cateto menor este sobre la línea  $\ell$ , ponga uno de los extremos de la cuerda en el vértice correspondiente al ángulo no recto y que no está sobre la línea, y el otro extremo en el punto  $O$ , mantenga el lápiz tensionando la cuerda sobre el cateto mayor. Guíese por la siguiente figura.



- Deslice la regla en forma paralela a la recta  $l$ , manteniendo la cuerda tensionada.

## PREGUNTAS

Describe la gráfica que se obtiene.

¿A qué sección cónica se asemeja la figura obtenida?

Sobre la gráfica que obtuviste ubica un punto  $A$

¿Qué relación existe entre la distancia del punto  $O$  al  $A$  y de la recta  $l$  al punto  $A$ ?

¿Qué otras propiedades puedes observar en la grafica que obtuviste?

Trata de dar una definición a esta clase de curvas.

Esta clase está apuntando a desarrollar procesos tale como la observación, la comparación y la relación que realizan los alumnos a la hora de construir conceptos matemáticos.

## PARTE 2

**Objetivo:** Relacionar según la posición en el plano cartesiano de la grafica con su respectiva ecuación.

Se realizará la definición de parábola y se miraran sus elementos formalmente. En esta parte de la clase realizaremos la construcción de la ecuación de la

parábola, cuyo vértice esta en el origen. Por último se darán algunas gráficas donde los alumnos según la definición deben clasificarlas. Con este se busca potenciar procesos como la observación, relación y clasificación.

## **ACTIVIDADES:**

### ***Definiciones:***

La **parábola** es el conjunto de puntos del plano que son equidistantes del punto fijo llamado **foco** y a una recta fija llamada **directriz**.

### **Elementos de la parábola:**

Además del foco y de la recta directriz podemos observar otros 3 elementos que nos permiten identificar:

- **Eje focal:** recta que contiene el foco y es perpendicular a la recta directriz.
- **Vértice:** punto de intersección entre el eje focal y la curva.
- **Distancia focal:** es la distancia del foco al vértice, también se puede definir como la distancia del vértice a la recta directriz.

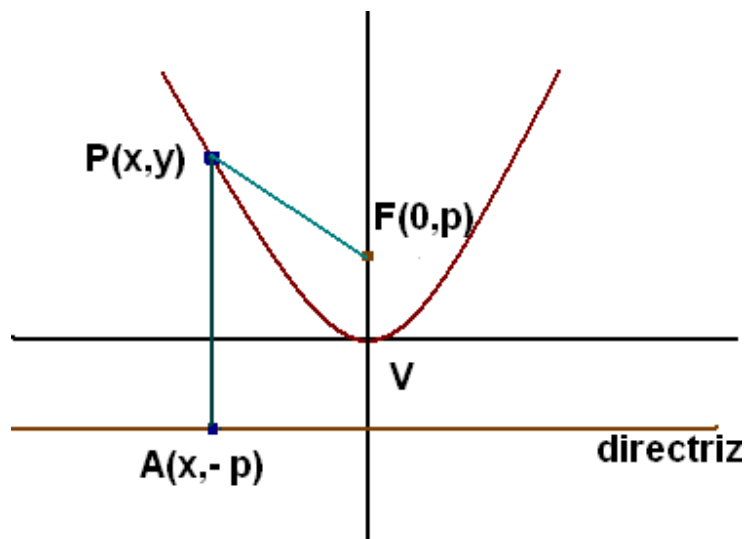
Para la deducción de la ecuación de la parábola debemos hacer uso de sus elementos y del algebra. Para su deducción, lo haremos mediante dos pasos<sup>1</sup>:

### **Primer paso:**

Colocamos la parábola en el plano cartesiano de tal manera que el vértice coincida con el origen y su eje focal con uno de los ejes coordenados (en este caso el eje Y) "Y", determinamos las coordenadas de los puntos P, F y A.

---

<sup>1</sup> Pasos propuestos por el Julio A. Uribe Calad en Matemáticas, una propuesta curricular. Bedout, editores S.A



**Segundo paso:**

De las propiedades de la parábola sabemos que la distancia  $|PF| = |PA|$  ahora

$$|PF| = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - p)^2}$$

$$|PA| = \sqrt{(x - x)^2 + (y - (-p))^2}$$

$$\text{Luego } \sqrt{(x - 0)^2 + (y - p)^2} = \sqrt{(x - x)^2 + (y - (-p))^2}$$

$$\sqrt{(x)^2 + (y - p)^2} = \sqrt{(y + p)^2}$$

$$(x)^2 + (y - p)^2 = (y + p)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$

$$x^2 = 4py$$

Esta última ecuación pertenece a la parábola cuyo vértice está en el origen, su eje focal es el eje  $y$ , abre hacia arriba. Sabemos que  $p$  es la distancia focal.



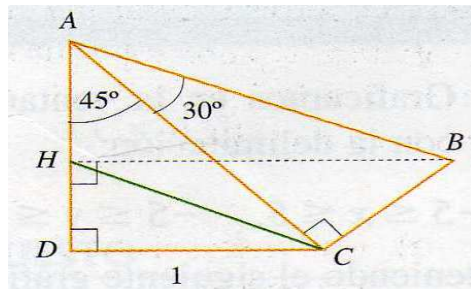
## ANEXO 14

### FIJACIÓN DEL CONCEPTO

Para la fijación del concepto se propone un taller con diferentes situaciones que se presentan en la cotidianidad del ser humano, tales como lo son la navegación, la topografía,

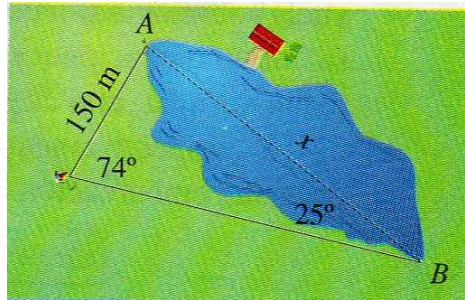
#### ACTIVIDAD POR EQUIPOS (SUSTENTADO INDIVIDUAL)

1. Una caja rectangular de cartón tiene las siguientes dimensiones: largo 8 cm, ancho 6 cm, y alto 0.04 cm. Calcular el ángulo que forma una diagonal de la base y la diagonal de una de las tapas. ¿Cuál será el ángulo si se tratase de un cubo?
2. La torre inclinada de Pisa inicialmente era perpendicular al terreno y su altura era de 54,5 metros. A causa del asentamiento del terreno hoy está inclinada un cierto ángulo respecto a la perpendicular del suelo como se ve en la figura. Cuando la parte superior de la torre se observa desde un punto a 45,7 metros del centro de su base, el ángulo de elevación es de  $53,3^\circ$ .
  - a) Determinar el ángulo aproximado  $\theta$
  - b) Calcula la distancia  $d$  con la que se ha desplazado la parte superior de la torre respecto a la perpendicular.
3. En la figura siguiente ¿cuánto mide CH? Justifica tu respuesta.



- a)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$       b)  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$       c)  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$       d)  $\sqrt{3}$       e) 2

4. Determinar la distancia entre los puntos A y B en las orillas opuestas de un lago como se indica en la figura.



5. Un submarino utiliza un sonar para determinar que un barco esta a 4 millas al este y que viaja a 10 millas/h con dirección N62°O (noroeste), si el submarino viaja a 18 millas/h ¿En qué dirección se debe desplazarse el submarino para interceptar al barco? Ten encuentra que la distancia es igual  $d = v \cdot t$
6. Diseñar dos problemas en donde se involucre la utilización de la ley senos y cosenos.

## ANEXO 15

### FIJACIÓN DEL CONCEPTO DE PARÁBOLA

#### EJERCICIOS

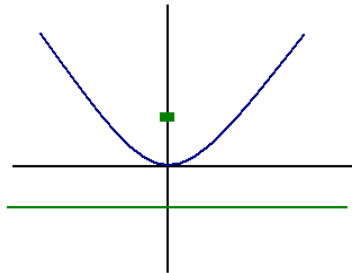
a. A partir de la deducción realizada en clase, encuentra la ecuación de la parábola con las siguientes características:

1. Eje focal  $y$ , vértice en el origen y abre hacia abajo.
2. Eje focal  $x$ , vértice en el origen y abre hacia izquierda.
3. Eje focal  $x$ , vértice en el origen y abre hacia la derecha.

b. Grafiqué la parábola  $8y = x^2$  y determine la distancia focal.

c. La parábola abre en el eje  $y$  y  $4p = 8$  es decir  $p = 2$

Su grafica es



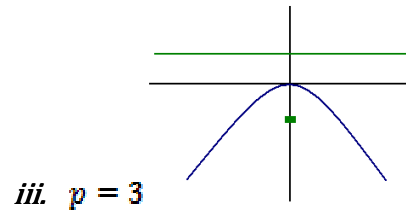
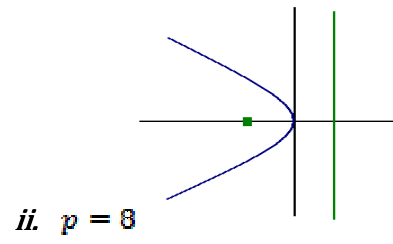
d. Realice la grafica de las siguientes ecuaciones:

i.  $y^2 = 16x$

ii.  $x^2 = -4x$

iii.  $y^2 = 10x$

e. Halle la ecuación de la siguientes graficas



## ANEXO 16

**TIPO DE INSTRUMENTO:** OBSERVACIÓN  
**FECHA:** 22/08/08  
**GRADO:** 10°B  
**CONCEPTO:** Ley del seno

PROCESO DE PENSAMIENTO A MEDIR		
Relación		
Resolución de problemas		
INDICADORES	SI	NO
Establece diferencias y semejanzas entre variables	X	
Resuelve el problema haciendo uso de un principio o regla conceptual.		X
OBSERVACIÓN		
<p>Durante esta clase los estudiantes debían resolver algunos problemas utilizando la ley del seno, mientras se desarrollaban se pudo evidenciar que la mayoría clasifica las variables que debe utilizar para solucionar el problema y las relaciona de acuerdo al concepto trabajado, sin embargo en el momento de solucionar el problema se evidencia que hay algunas dificultades operacionales, es decir, no despejan bien las variables por lo que la solución no es correcta. Con lo observado se puede concluir que los estudiantes han mejorado el proceso de relación pero a nivel concreto.</p>		

NOMBRE DEL OBSERVADO

William Darío Toro.

TIPO DE INSTRUMENTO:

OBSERVACIÓN

FECHA:

20/08/08/

GRADO:

10°C

CONCEPTO:

Ley del Seno

PROCESO DE PENSAMIENTO A MEDIR		
Planteamiento de Hipótesis		
Relación		
INDICADORES	SI	NO
Propone enunciados como posibles soluciones a un problema.	X	
Establece nexos esenciales entre las variables para resolver el problema.		X
OBSERVACIÓN		
<p>A los estudiantes se les asignó una situación problema para solucionar, durante esta clase van a exponer las soluciones a lo planteado anteriormente, en algunos estudiantes se encontraron dificultades para solucionarlo como la falta de relacionar concepto trabajados anteriormente y la tarea propuesta, también se evidencia deficiencias en la toma de datos y en la aplicación de conceptos.</p> <p>Igualmente se evidencia que algunos equipos proponen solucionar el problema utilizando congruencia y semejanza de triángulos, razones trigonométricas, entre otros, algunos no logran resolver el problema con lo planteado, lo que se puede concluir que los estudiantes plantean hipótesis a un nivel concreto pero falta relacionar a un nivel abstracto.</p>		

NOMBRE DEL OBSERVADOR

Natalia Andrea Herrera Méndez

TIPO DE INSTRUMENTO:

OBSERVACIÓN

FECHA:

17/09/08

GRADO:

10°A

CONCEPTO:

Ley del seno y del coseno

PROCESO DE PENSAMIENTO A MEDIR		
Resolución de problemas		
Relación		
INDICADORES	SI	NO
Resuelve el problema haciendo uso de un principio o regla conceptual.		x
Establece nexos esenciales entre las variables para resolver el problema.	x	
OBSERVACIÓN		
Durante esta clase se les asigno unos talleres a los estudiantes sobre la ley del seno, se observó que los estudiantes manejan el concepto y que relacionan las variables del problema planteado, sin embargo presenta deficiencias en el manejo operacional, logrando que la solución no sea correcta. Se concluye que los estudiantes manejan el proceso de pensamiento de relación a nivel concreto.		

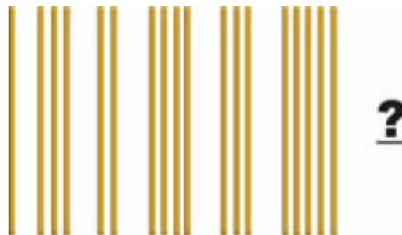
NOMBRE DEL OBSERVADOR

Jorge Eliecer Villarreal Fernández

## ANEXO 17

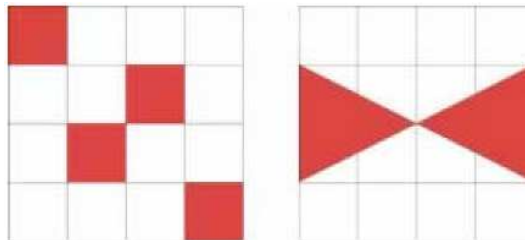
### PRUEBA DIAGNOSTICA

- 1) Observe la secuencia que se presenta, descubra cuál es el siguiente término de la secuencia y formule una regla de formación, es decir diga por qué hizo esta elección.



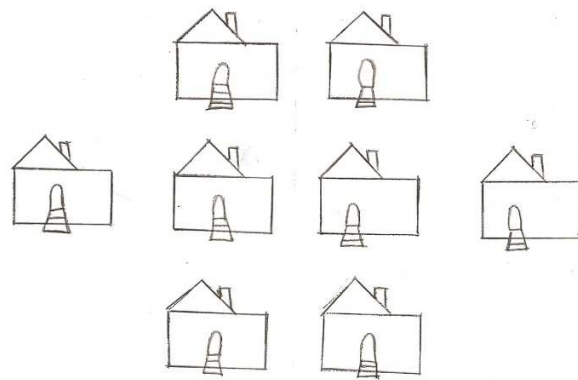
- 2) Los dos cuadrados son iguales. ¿Cuál área sombreada es menor?

Justifique su respuesta



- 3) La ciudad de octópolis tiene ocho casas distribuidas como muestra el grafico. Pintar una casa tarda un día y se necesita otro para que la pintura seque. Las leyes locales prohíben pintar una casa adyacente en forma horizontal, vertical o diagonal a otra cuya pintura aun no se ha secado, pues los vapores son muy fuertes. ¿Podría determinar en qué orden deben pintarse las casas para pintarlas todas en ocho días?





- 4) Para llenar la pirámide se cumple que  $a + b$  y que en la fila inferior hay cuatro números naturales consecutivos, complete la pirámide



- 5) Sin acertar con ninguna de las tres, un empleado etiquetó erróneamente tres cajas que contenían lápices, bolígrafos y grapas respectivamente. Cuando alguien le comunica el error dice: “no hay problema, con solo abrir una de las tres cajas y mirar su contenido, ya podré colocar las tres etiquetas correctamente”. ¿Cómo lo hace?

6) Hay botones con 2, 3 y 4 huecos para pasar el hilo. Botonio tenía una colección de botones de cada uno de estos tipos y afirmó lo siguiente: "Huecos hay en total 100 y poseo un número impar de cada uno de los tres tipos". ¿Es Botonio buen matemático? Y ¿por qué?

7) Hallar los tres sumandos y la suma, si son números primos y G y D son dígitos consecutivos.

$$\begin{array}{r} AB \\ + CD \\ EF \\ \hline GD \end{array}$$

8) Aceptando como verdaderas las siguientes proposiciones:

- La ciudad A ha sufrido un sismo de 7 grados en la escala de Richter.
- No todos los edificios de la ciudad A son sismo-resistentes.
- Sólo los edificios sismo-resistentes soportan sin daño alguno un sismo de 7 grados en la escala de Richter.

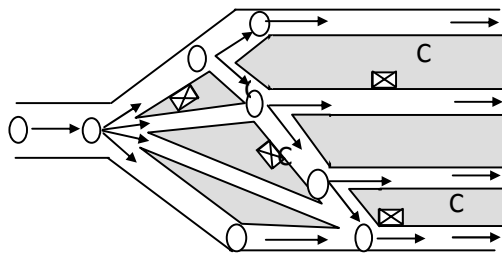
De las afirmaciones siguientes, la única que se puede concluir lógicamente de las proposiciones anteriores es:

- a. Todos los edificios de la ciudad A no son sismo resistentes.
- b. Ningún edificio de la ciudad A sufrió daño alguno en el sismo de 7 grados en la escala de Richter.
- c. Al menos un edificio de la ciudad A sufrió daños en el sismo de 7 grados en la escala de Richter.
- d. Muchos edificios de la ciudad A sufrieron daños en el sismo de 7 grados en la escala de Richter.

9) Almorzaban Juntos tres políticos: El señor Blanco, el señor Rojo y el señor Amarillo; uno llevaba corbata blanca, otro corbata roja y el otro corbata amarilla pero no necesariamente en ese orden. “Es curioso dijo el señor de corbata roja – nuestros apellidos son los mismos que nuestras corbatas, pero ninguno lleva la que corresponde al suyo”. “Tiene Ud. razón “, dijo el señor Blanco. ¿De qué color llevaba la corbata el señor Amarillo, el señor Rojo y el señor Blanco, respectivamente?

- Blanco, rojo, amarillo.
- Rojo, amarillo, blanco.
- Amarillo, blanco, rojo.
- Rojo, blanco, amarillo.
- Blanco, amarillo, rojo.

10)



El diagrama muestra los canales mediante los cuales un río desemboca al mar por cuatro bocas A, B, C y D. Los números del 1 al 8 representan boyas que señalan la dirección de la circulación para la navegación por los canales y  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$  indican puestos de control. Un barco que ingresa por la boya 1 al sistema de canales puede salir por una boca cualquiera, siguiendo únicamente las rutas indicadas por las flechas.

De las afirmaciones siguientes la única que no es posible, para un barco que hizo su recorrido entre la boya 1 y el mar, es:

- a. Encontró un puesto de control.
- b. Encontró dos puestos de control.
- c. Encontró tres puestos de control.
- d. No encontró puestos de control.

**ANEXO 18**

**PRUEBA DE SALIDA**  
**INSTITUCIÓN EDUCATIVA ESCUELA NORMAL SUPERIOR DE MEDELLÍN**

NOMBRE: \_\_\_\_\_ GRADO: \_\_\_\_

1. Si A y B son consecutivos halle A, B y C, dado que:

$$\begin{array}{r} AB \\ + AC \\ \hline 1BB \end{array}$$

---



---



---



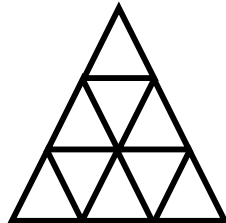
---



---

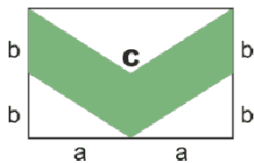
2. El número total de triángulos diferentes en la figura es:

- A. 9  
 B. 10  
 C. 13  
 D. 15



3. En el rectángulo C es el centro. ¿Cuál área es mayor, la sombreada o la blanca?

.....




---



---



---



---

4. Rodolfo realizó en su cuaderno la división que se indica. Pero al revisarla encontramos un error. ¿Cuál?

$$\begin{array}{r}
 12' \ 12 \ \overline{)12} \\
 0 \ 12 \ 11 \\
 \underline{\phantom{0}0}
 \end{array}$$


---

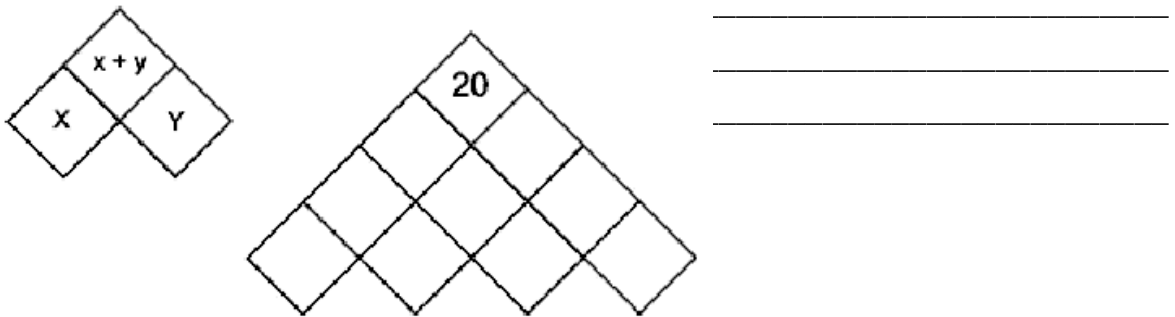


---



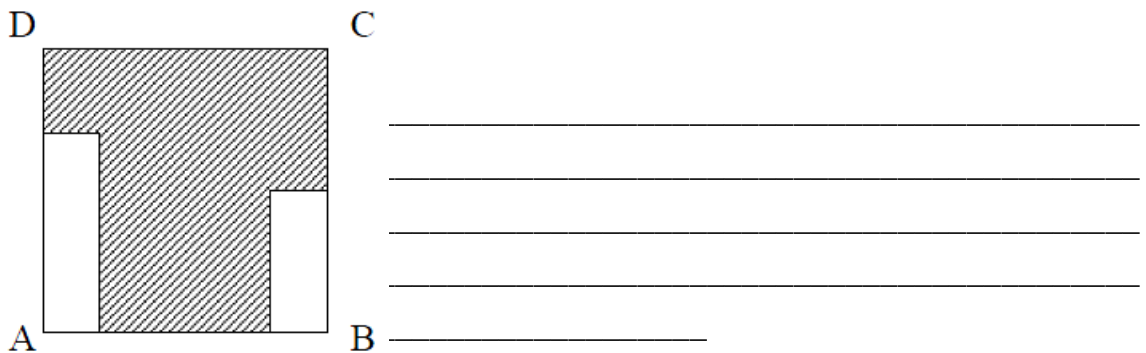
---

5. La pirámide se ha construido según la regla:



Si todos los números son diferentes, reconstruya la pirámide.

6. En el interior de un cuadrado ABCD de lado a, se introdujeron 2 rectángulos como lo indica la figura. El perímetro de la parte sombreada es



- a)  $2a$       b)  $3a$       c)  $4a$       d)  $3, 5a$       e) Falta

7. Un juego consta de 4 movimientos así:

N: No moverse.

A: Cuarto de giro a la izquierda.

B: Cuarto de giro a la derecha.

C: Medio giro.

Se emplea el signo • para unir dos movimientos sucesivos. A • B significa que el movimiento B se realiza a continuación del movimiento A. De las siguientes secuencias de movimientos, la que equivale a N es:

A. A • A \_\_\_\_\_

B. B • B \_\_\_\_\_

C. C • C \_\_\_\_\_

D. A • B • C \_\_\_\_\_

8. De las siguientes igualdades, la única verdadera es:

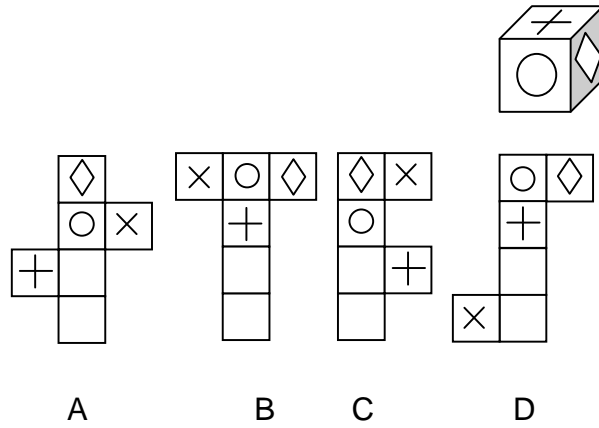
A. A • N • B = A • C \_\_\_\_\_

B. C • A • N = C • C \_\_\_\_\_

C. A • A = B • B \_\_\_\_\_

D. B • C = A • B \_\_\_\_\_

9. Dado el cubo que se muestra en figura, el croquis que puede ser doblado para obtener el cubo de la figura es:




---



---

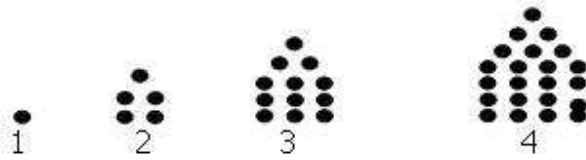


---



---

10. Dada la secuencia:



Continuando con el patrón descrito, el número de puntos que forman la figura 6 es:

- A. 40
- B. 48
- C. 51
- D. 55

---



---



---



---



## ANEXO 19

### EJEMPLO INSTRUMENTO APLICADO PRUEBA DIAGNÓSTICA

**TIPO DE INSTRUMENTO:** PRUEBAS DIAGNOSTICA

**FECHA:** 22 de Julio de 2008  
**GRADO:** 10° B  
**ESTUDIANTE:** Andrea Bonilla

ASPECTOS A MEDIR				
PREGUNTA	PROCESOS			
1	RELACIÓN			
2	COMPARACIÓN (NOCIÓN DE ÁREA POR RECUBRIMIENTO)			
3	COMPARACIÓN (DIFERENCIA DE NIVEL, MÁS ALTO)			
4	RELACIÓN			
5	PLANTEAMIENTO DE HIPÓTESIS			
6	RELACIÓN			
7	PLANTEAMIENTO DE HIPOTESIS			
8	RAZONAMIENTO INDUCTIVO			
9	RELACIÓN			
10	PLANTEAMIENTO DE HIPÓTESIS			
PREGUNTA	INDICADORES DE LA PRUEBA	SI	NO	NC
1	Establece los nexos esenciales entre las variables del problema			X
2	Establece diferencias y semejanzas entre variables			X
3	Establece diferencias y semejanzas entre variables		X	
4	Establece los nexos esenciales entre las variables del problema	X		
5	Plantea y verifica posibles soluciones al problema			X
6	Establece los nexos esenciales entre las variables del problema			X
7	Plantea y verifica posibles soluciones al problema			X
8	Resuelve problemas partiendo de lo particular a lo general			X
9	Establece los nexos esenciales entre las variables del problema	X		
10	Propone enunciados como posibles soluciones a un problema.		X	

**NOMBRE**

Natalia Andrea Herrera Méndez

## ANEXO 20

### EJEMPLO INSTRUMENTO APLICADO PRUEBA DE SALIDA POR ESTUDIANTE

TIPO DE INSTRUMENTO: PRUEBAS DE SALIDA

FECHA: \_\_\_\_\_

GRADO: \_\_\_\_\_

10° B

ESTUDIANTE: \_\_\_\_\_

Andrea Bonilla

ASPECTOS A MEDIR				
PREGUNTA	PROCESOS			
1	PLANTEAMIENTO DE HIPÓTESIS			
2	PLANTEAMIENTO DE HIPÓTESIS			
3	COMPARACIÓN (NOCIÓN DE ÁREA POR RECUBRIMIENTO)			
4	COMPARACIÓN			
5	RELACIÓN			
6	COMPARACIÓN			
7	RELACIÓN			
8	RELACIÓN			
9	PLANTEAMIENTO DE HIPÓTESIS			
10	RELACIÓN			
PREGUNTA	INDICADORES DE LA PRUEBA	SI	NO	NC
1	Propone enunciados como posibles soluciones a un problema.		X	
2	Propone enunciados como posibles soluciones a un problema.		X	
3	Establece diferencias y semejanzas entre variables	X		
4	Establece diferencias y semejanzas entre variables	X		
5	Establece nexos esenciales entre las variables para resolver el problema.	X		
6	Establece diferencias y semejanzas entre variables	X		
7	Establece nexos esenciales entre las variables para resolver el problema.	X		
8	Establece nexos esenciales entre las variables para resolver el problema.	X		
9	Propone enunciados como posibles soluciones a un problema.		X	
10	Establece nexos esenciales entre las variables para resolver el problema.	X		

NOMBRE

Natalia Andrea Herrera Méndez

