

EL ANÁLISIS SEMIÓTICO PARA CARACTERIZAR LOS SIGNIFICADOS ELEMENTALES Y SISTÉMICOS PUESTOS EN JUEGO EN UN LIBRO DE TEXTO

Mario José Arrieche Alvarado

Universidad Pedagógica Libertador- Maracay-Venezuela

marioarrieche@hotmail.com

Epistemología, Superior, teórico- filosófico e interpretativo

RESUMEN

El trabajo que se presenta en este informe se inserta en un proyecto macro sobre “el papel de la teoría de conjuntos en la formación matemática de los maestros de educación primaria” desarrollado en el Programa de Doctorado del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada (Arrieche, 2002). Esta investigación se centra en la caracterización de los significados elementales y sistémicos (o praxeológicos) puestos en juego en la interpretación del texto (Krause, 1991) usado en el proceso de estudio de los temas conjuntos, relaciones y funciones de un grupo de maestros en formación.

Para tal fin aplicamos el análisis semiótico, técnica generada del modelo semiótico-antropológico de la investigación en Didáctica de la Matemática (Godino y Batanero, 1994). Para ello, incluimos la descripción y las unidades de análisis de cada uno de estos contenidos, los componentes praxeológicos, y conocimientos puestos en juego (interpretados como funciones semióticas). También se estudian los conflictos semióticos entre los significados puestos en juego en el texto y los atribuidos a las expresiones por una institución de referencia, que en este caso viene dada por la interpretación que hace el investigador de cada uno de los contenidos mencionados.

La conclusión obtenida revela que el análisis semiótico permite identificar discordancias o disparidades entre los significados atribuidos a las expresiones por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción didáctica. Además, los conflictos semióticos pueden explicar, al menos parcialmente, las dificultades potenciales de los alumnos en el proceso de estudio, así como identificar las limitaciones de las competencias y comprensiones matemáticas efectivamente puestas en juego. La información obtenida con nuestro análisis es necesaria si se desea abordar con criterios rigurosos el diseño e implementación del proceso de estudio y determinar los recursos instruccionales y de tiempo necesarios.

Palabras clave: Significado sistémico, significado elemental, análisis semiótico

1. INTRODUCCIÓN

En Arrieche (2002) se aplicó, y en cierta medida desarrollamos y precisamos, la técnica que en Godino (2001) Y Godino y Arrieche (2001) se designa como "análisis semiótico", la cual permite caracterizar tanto los significados sistémicos (o praxeológicos) de un objeto matemático como los significados elementales puestos en juego en un texto matemático.

Llamaremos *análisis semiótico* de un texto matemático a su descomposición en unidades, la identificación de las entidades puestas en juego y las funciones semióticas que se establecen entre los mismos por parte de los distintos sujetos. El análisis semiótico será pues la indagación sistemática de los significados (contenidos de las funciones semióticas) puestos en juego a partir de la transcripción del proceso, y de cada una de las partes en que se puede descomponer dicho texto, para un interpretante potencial (análisis a priori). Cuando el texto corresponde al protocolo

de respuestas de los sujetos en interacciones efectivas el análisis permitirá caracterizar los significados personales atribuidos *de hecho* por los emisores de las expresiones (análisis a posteriori). En ambos casos se pueden confrontar con los significados institucionales de referencia, lo que permite formular hipótesis sobre *conflictos semióticos* potenciales y contrastarlos con los efectivamente ocurridos.

Esta técnica analítica se basa en el uso sistemático de la noción de función semiótica y de la ontología matemática propuesta por Godino (2001). La comparación entre los significados atribuidos a los objetos matemáticos por dos instituciones o por una persona y un referente institucional nos permite identificar conflictos semióticos entre dichos agentes. Dichos conflictos se refieren a toda disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa y pueden explicar las dificultades y limitaciones de los aprendizajes y las enseñanzas implementadas.

Para aplicar esta técnica se requiere disponer de los textos con la planificación del proceso instruccional, transcripciones del desarrollo de las clases, entrevistas y respuestas escritas a las pruebas de evaluación aplicadas. En definitiva, el análisis se aplicará a un texto que registra la actividad matemática desarrollada por los sujetos participantes. El análisis se basará en descomponer el texto en unidades, que denominaremos semióticas. El criterio para definir las unidades de análisis será el cambio de elemento de significado, esto es, cuando se cambia de problema a estudiar dentro del campo de problemas considerado, se pasa del enunciado del problema al desarrollo de una técnica, el empleo de una notación, al uso o identificación de una propiedad, o a la descripción, sistematización y validación de las soluciones.

El análisis semiótico fue aplicado, en el capítulo 6 de Arrieche (2002), para caracterizar los significados elementales y sistémicos puestos en juego en los bloques de contenido sobre "conjuntos y operaciones", "funciones, composición, función biyectiva" y "relaciones" del texto utilizado como recurso de estudio en la experiencia de enseñanza observada. Este análisis nos va a permitir describir el "significado institucional local" del contenido estudiado, en nuestro caso "conjuntos, relaciones y funciones", y la distribución temporal de sus distintos elementos. Ayudará a formular hipótesis sobre puntos críticos de la interacción entre los diversos agentes en los cuales puede haber lagunas o vacíos de significación, o disparidad de interpretaciones que requieran procesos de negociación de significados y cambios en el proceso de estudio. También permitirá formular explicaciones plausibles de las dificultades de los estudiantes tras el proceso de estudio.

2. UN EJEMPLO DE APLICACIÓN DE LA TÉCNICA DE ANÁLISIS SEMIÓTICO

En este apartado se aplica la técnica de "análisis semiótico" para caracterizar los significados elementales y sistémicos puestos en juego en los bloques de contenidos sobre "conjuntos y operaciones", "funciones, composición y funciones biyectivas" y "relaciones" en el texto que sirve de base al proceso de estudio (Krause, 1991) de estos contenidos en un grupo de maestros en formación. (el texto completo de las secciones del libro utilizadas se incluyen en el Anexo 1 de Arrieche (2002)).

Para cada uno de estos contenidos incluimos el texto y las unidades de análisis, los componentes praxeológicos, y conocimientos puestos en juego (interpretados como funciones semióticas). También se estudian los conflictos semióticos entre los significados puestos en juego en el texto y los atribuidos a las expresiones por una institución de referencia, que en este caso viene dada por la interpretación que hace el investigador de los textos sobre "teoría de conjuntos, relaciones y funciones". Dichos conflictos se refieren a toda disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en

interacción comunicativa; los conflictos semióticos se consideran como explicaciones potenciales de las dificultades y limitaciones de los aprendizajes.

En una primera fase del análisis consideramos útil clasificar la información del texto en tres componentes: *Praxis*, que incluye las situaciones-problemas y los elementos actuativos; *Lenguaje*, que se refiere a los términos, expresiones, notaciones, gráficos; *Teoría*, que abarca los conceptos-definición, las propiedades y argumentaciones.

Proponemos como una primera clasificación de las unidades de análisis semiótico de un texto matemático la siguiente: unidades iniciales (apartados o secciones del texto), unidades primarias (oraciones o sentencias), unidades elementales (términos y expresiones que designan uno de los seis tipos de entidades elementales descritos en el marco teórico) y unidades secundarias (combinación de dos o más unidades primarias).

A manera de ejemplo mostramos el análisis realizado, a una de las secciones del bloque de contenido sobre “conjuntos y operaciones”. Se remite al lector interesado a Arrieché (2002) donde se hace el análisis completo de este bloque y los restantes bloques sobre relaciones y funciones.

2.1. UNIDADES DE ANÁLISIS, COMPONENTES PRAXEOLÓGICOS Y CONOCIMIENTOS ELEMENTALES.

2.1.1. Conjuntos y operaciones

El bloque sobre “conjuntos y operaciones” está dividido en 9 subsecciones que consideramos como unidades iniciales de análisis. Son las siguientes:

1. Definición de conjunto
2. Notaciones
3. Subconjuntos
4. Ejercicios (2.1)
5. Operaciones con conjuntos; intersección, unión, complementario
6. Producto cartesiano
7. Diagramas de Venn para la resolución de problemas
8. Ejercicios (2.2)
9. Propiedades de las operaciones conjuntistas

1. Definición de conjunto

Texto y unidades primarias de análisis

1.1	El concepto de <i>conjunto</i> es muy general y muy simple.
1.2	
1.3	«Cualquier colección de cosas es un conjunto .»
1.4	Sin embargo, hay que señalar que para que un conjunto esté <i>bien definido</i> , es preciso poder conocer <i>todos sus miembros</i> o una <i>cualidad</i> de ellos que nos permita saber si un nuevo objeto <i>está o no</i> dentro de ese conjunto.

Componentes y unidades elementales

Praxis	Lenguaje	Teoría
	- Términos y expresiones: conjunto; concepto, colección; cosas; miembros; cualidad; estar dentro de un conjunto	- Conceptos (definiciones): conjunto; conjunto bien definido; pertenencia a un conjunto - Propiedades: el conjunto, concepto muy general y muy simple

Conocimientos y conflictos semióticos:

1.1. Con el término 'conjunto' se designa a un objeto no ostensivo que es calificado de concepto; se supone que el lector conoce el uso del término 'concepto' como resultado de aprendizajes anteriores. Se atribuye una propiedad al concepto de conjunto: "el ser muy general y muy simple". Se supone que el 'concepto de conjunto' viene regulado por el enunciado del párrafo siguiente y que al ser breve, el atributo de "muy general y muy simple" se refiere a esa característica. Esto no se puede justificar desde el punto de vista del significado de referencia si tenemos en cuenta la complejidad del concepto desde el punto de vista matemático experto.

1.2. La descripción que se da de conjunto es un ejemplo de concepto, que en este caso se trata de un concepto-definición. No hay un discurso teórico sobre el concepto, pero sí una praxis sobre esa noción. Se utilizan los términos 'colección' y 'cosas' cuyo significado se supone conocido del lector y se corresponde con su uso en el lenguaje ordinario. Los propios conjuntos deben ser considerados como "cosas" ya que pueden ser también miembros de conjuntos; el uso de 'colección' en el lenguaje ordinario no se aplica al caso de conjuntos unitarios y del conjunto vacío.

1.3. Se usa la expresión 'conjunto bien definido' para designar aquellos conjuntos para los cuales se dispone de un criterio que permita determinar si un objeto es o no miembro del conjunto. No se descarta que las colecciones que no cumplan esta condición no se designan como conjuntos. Se trata en realidad de un atributo aplicable a las colecciones, pero no a los conjuntos.

1.4. No se asigna a los términos 'miembro', 'cualidad' y a la expresión 'estar dentro' un significado específico. Se usan con su significado propio del lenguaje ordinario. Se atribuye al conjunto el rasgo metafórico de ser un recipiente y, por tanto, como algo de naturaleza ostensiva; esto oculta su naturaleza lingüística.

En este primer apartado no se incluye ningún elemento situacional ni operatorio; los objetos que se ponen en juego son de naturaleza lingüística y teórica.

3. SÍNTESIS DE CONOCIMIENTOS Y CONFLICTOS SEMIÓTICOS

Pensamos que la técnica del análisis semiótico que hemos aplicado y desarrollado en este trabajo, constituye un recurso útil para la investigación en didáctica de las matemáticas. Por una parte, y a un nivel que podemos calificar de "microcópico", permite identificar significados puestos en juego en una actividad matemática puntual como es el uso de términos y expresiones. A un nivel más general permite describir la estructura semiótica de una organización matemática compleja, como puede ser la "teoría de conjuntos, relaciones y funciones" implementada en un proceso de estudio particular. En ambos niveles, el análisis semiótico permite identificar discordancias o disparidades entre los significados atribuidos a las expresiones por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción didáctica. Estos conflictos semióticos pueden explicar, al

menos parcialmente, las dificultades potenciales de los alumnos en el proceso de estudio, así como identificar las limitaciones de las competencias y comprensiones matemáticas efectivamente puestas en juego. La información obtenida con nuestro análisis es necesaria si se desea abordar con criterios rigurosos el diseño e implementación del proceso de estudio y determinar los recursos materiales y de tiempo necesarios.

A título de ejemplo, y como resumen, reseñamos a continuación los principales conflictos semióticos encontrados en el análisis realizado.

1. La definición de conjunto dada en 1.2 es una simplificación de la dada por Cantor. Como sabemos, una definición tan general de la noción de conjunto provoca la aparición de paradojas en la teoría que serán superadas a base de no considerar como conjuntos ciertas colecciones excesivamente grandes, como el conjunto de todos los conjuntos. Como se sabe, para solventar el problema de las paradojas se elaboraron diferentes teorías axiomáticas como la Zermelo-Fraenkel, Von Neumann, Bernays, Gödel y Ackermann.

Aunque parece obvio que estas dificultades técnicas de la teoría no pueden ser discutidas en un texto dirigido a la formación de maestros si nos parece que la definición presentada requiere matizaciones, ya que será conflictivo para el estudiante considerar a un conjunto unitario como una colección, y mucho más hablar de colecciones vacías y colecciones infinitas (discretas y continuas). También parece necesario precisar la noción de “cosa” ya que como elementos de conjuntos el estudiante encontrará a las propias colecciones. No es pues de extrañar que los estudiantes tengan dificultades ante tareas en las que intervengan estas colecciones “extrañas”.

Con respecto a la noción de función, creemos que el texto usa un procedimiento muy largo para introducir este concepto, el cual, puede ocasionar conflictos al estudiante para asimilarlo adecuadamente. Por otro lado, pensamos que la explicación de los ejemplos propuestos por el autor para ilustrar la definición de función puede contribuir a que el estudiante logre su aprendizaje en una forma más rápida y eficaz. Además en un texto dirigido a la formación de maestros con estas características se ha podido definir una función, entre los elementos de dos conjuntos A y B, como a toda relación de A en B que permite asociar a cada uno de los elementos de A uno y sólo un elemento de B.

En cuanto al concepto de relación en un conjunto A, consideramos que la forma como el texto introduce la definición: “se puede definir la relación como una generalización de aplicación de un conjunto en sí mismo”, y luego describe que una relación en un conjunto A es un subconjunto de $A \times A$; nos parece muy abstracta considerando que el texto va dirigido a estudiantes que se caracterizan por tener un nivel matemático bajo, lo cual puede producir serios conflictos a estos alumnos al intentar estudiar este concepto. También parece necesario la aclaración del término es “una generalización de aplicación” que es ambiguo para los estudiantes de este nivel.

Podemos describir esta clase de conflictos con las definiciones de los objetos matemáticos como *conflictos conceptuales*. En el caso del concepto-definición *conjunto*, la regla presentada no contempla la verdadera complejidad de uso del término correspondiente. Pero también puede ocurrir que en el proceso de estudio se ponga en juego una noción, como la diferencia de conjuntos, que no ha sido introducida. Es de hacer notar que, en el estudio del concepto de función biyectiva, se trata implícitamente las nociones de función inyectiva y sobreyectiva sin estudiarlas separadamente. Otra noción que consideramos fundamental para el estudio de las funciones y las relaciones, que es introducida sin dedicar un tiempo a su enseñanza es el concepto del conjunto grafo o gráfico de una función (o relación).

2. El análisis semiótico permite analizar la dialéctica entre lo “concreto” y lo “abstracto”, que en el modelo teórico adoptado se contempla al introducir la dimensión extensiva – intensiva, o lo que consideramos equivalente, la distinción ejemplar – tipo. En la actividad matemática hay

siempre una tensión hacia la generalización, a considerar problemas y técnicas cada vez más generales que resuelvan el mayor número posible de problemas particulares. Esto lleva al uso de variables, instrumentadas en notaciones y convenios generales.

En diversas unidades hemos visto que el autor designa un conjunto genérico con la letra A, por ejemplo, (P en otra ocasión), y a continuación la misma notación designa “el conjunto de los pares”, y otros conjuntos se designan con letras diferentes. El uso indiscriminado de estas notaciones puede dificultar el desarrollo del razonamiento abstracto que se pretende ir construyendo progresivamente. También se resalta que el texto no presenta una notación genérica para indicar que dos elementos de un conjunto están relacionados mediante una determinada relación, lo cual, puede ocasionar serios conflictos al estudiante al intentar aplicar las propiedades de una relación.

3. Los conjuntos se han expresado con notaciones diversas: letras mayúsculas, enumeración de elementos entre llaves, enunciado de una propiedad entre llaves, diagramas de Venn, diagrama cartesiano, etc. De igual manera, las funciones han sido representadas de diversas formas, mediante un diagrama de flechas, una tabla, un conjunto ordenado de pares, una gráfica y una fórmula. El conocimiento de las circunstancias en que cada notación resulta apropiada, y las traducciones entre ellas no han recibido la atención necesaria en el texto, lo que a priori puede resultar conflictivo para los sujetos a los que se dirige (conflictos notacionales).

4. En diversas unidades de análisis hemos identificado un conflicto potencial que se puede describir como “generalización docente abusiva”. Se trata de requerir del lector la realización de tareas para las que no ha recibido instrucción suficiente: pedir la formación de las particiones de un conjunto con cinco elementos, hallar el cardinal de conjuntos que cumplen ciertas condiciones en situaciones que involucran tres conjuntos, comprobar mediante ejemplos las propiedades de las operaciones conjuntistas, determinar el número de funciones entre dos conjuntos finitos, dada la gráfica de una función determinar las imágenes y preimágenes de ciertos elementos, cuántas funciones biyectivas hay entre dos conjuntos finitos, estudiar las propiedades de una relación, etc. En estas tareas se requieren conocimientos previos tales como, conjunto de partes, familia de conjuntos, verificación de igualdades, rango de una función, conjunto gráfico de una función (o relación), conocimiento de combinatoria, etc.

5. Ausencia de justificación o explicación de algunas propiedades mencionadas, como que $\emptyset \subset A$, $A \subset A$, para todo conjunto A, las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva de una relación. También se detecta la falta de mención de los conectivos lógicos (conjunción, disyunción, implicación, doble implicación), los cuales son usados implícitamente o explícitamente en las definiciones presentadas.

REFERENCIAS

- Arrieche, M. (2002). *La teoría de conjuntos en la formación de maestros: Facetas y factores condicionantes del estudio de una teoría matemática*. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Godino, J.D. y Arrieche, M. (2001). *El análisis semiótico como técnica para determinar significados*. Comunicación presentada en el V Simposio de la SEIEM, Grupo de Trabajo DMDC. Almería.
- Godino, J. D. (2001). Un enfoque semiótico de la cognición matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. (Pendiente de publicación. Recuperable en: <http://www.ugr.es/local/jgodino/>).

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3): 325-355.

Krause, E. F. (1991). *Mathematics for elementary teachers*. Lexington, Ma: D. C. Heath.