LA INTRODUCCIÓN DE LAS ECUACIONES EN LA ESCUELA SECUNDARIA: UNA PROPUESTA DE ESTUDIO

Marta Bastán, Fabiana Rosso, Flavia Buffarini
Universidad Nacional de Río Cuarto. Argentina
mbastan@exa.unrc.edu.ar, frosso@exa.unrc.edu.ar, fbuffarini@exa.unrc.edu.ar
Nivel Medio

Resumen
En este trabajo se expone una propuesta para abordar la introducción de las ecuaciones en la escuela secundaria a partir de *programas de cálculo* - proceso de resolución de problemas aritméticos que, partiendo de los datos y mediante una cadena estructurada y jerarquizada de operaciones aritméticas, permiten determinar la incógnita (Chevallard, 2004)-. Esta noción, que abarca y amplía la de ecuación lineal, favorece el estudio de las ecuaciones algebraicas que admiten infinitas o ninguna solución y permite establecer vinculaciones entre los parámetros y los conjuntos solución. Dada la relación de este tema con la problemática de la introducción del álgebra en la escuela, hemos considerado como antecedentes lo elaborado por Gascón (1993, 1994, 1999) y Ruiz, Bosch y Gascón (2007) al respecto. El marco teórico en que se desarrolla es la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). La propuesta abarca distintos tipos de problemas que se articulan de manera creciente a través de sucesivas complejizaciones del saber.
Palabras clave: Matemática – Educación – Didáctica - Ecuaciones.

Introducción

El análisis de textos de la escuela media, particularmente los referidos a la introducción de las ecuaciones nos ha permitido observar las dificultades que plantean los procesos de estudio observados para la construcción del sentido de las ecuaciones y de las relaciones de éstas con los conjuntos solución.

Vimos a partir de Buffarini (2005) que la introducción de las ecuaciones se realiza en general a través de problemas que tienen por objetivo la búsqueda de un número (incógnita) donde las ecuaciones aparecen como la herramienta que permite encontrarlo. Herramienta que en muchos casos no cobra sentido como tal. Un saber se carga de sentido para un alumno en tanto le aporta técnicas que le permiten resolver problemas o situaciones inabordables desde las estrategias que disponía con anterioridad. Vemos que muchos de los problemas planteados para introducir al alumno al estudio de las ecuaciones podrían ser resueltos por procedimientos puramente aritméticos, con lo cual las modelizaciones algebraicas aparecen como una herramienta de cierto modo compleja y sofisticada que además, operan como inhibidora de ciertas capacidades a desarrollar en el alumno, como es decidir el uso de una herramienta en base a las ventajas que ofrece respecto a otras. En cuanto a los procedimientos para la determinación de la incógnita vemos que se reducen a la movilización de procedimientos de trato obligatorio y casi automático sin sentido para el alumno.

Por otra parte, este tratamiento, basado en las ecuaciones lineales, deja por fuera las situaciones que modelizadas pueden ser tratadas con técnicas semejantes a las de las lineales pero que arrojarán más de una solución o ninguna. Como consecuencia podemos ver las débiles o nulas relaciones que se establecen entre la estructura de las ecuaciones y su conjunto solución.

En este trabajo se expone la diagramación y análisis de una propuesta didáctica para la introducción de las ecuaciones en la escuela secundaria basadas en la noción *programa de cálculo* que permite materializar las etapas del proceso de construcción de la modelización algebraica a través de ecuaciones lineales y seudo lineales.
Se denomina *programa de cálculo* (Chevallard, 2004) al proceso de resolución de problemas aritméticos que, partiendo de los datos y mediante una cadena estructurada y jerarquizada de operaciones aritméticas, permiten determinar la incógnita.
En este contexto nos planteamos una serie de cuestiones: ¿Qué problemas o situaciones podrían conducir el proceso de estudio de las ecuaciones en la escuela media? ¿Qué debería abarcar una propuesta para lograr que el alumno establezca naturalmente vinculaciones entre la expresión general de una ecuación y su conjunto solución? ¿Qué ampliaciones progresivas del saber deberían llevarse a cabo para que éste aparezca articulado?
Para dar respuesta a esos interrogantes, y dada la vinculación de este tema con la problemática de la introducción del álgebra en la escuela, consideramos como antecedente lo elaborado al respecto por Bolea (2002), Bolea P., Bosch M. y Gascón J. (2001), Gascón (1993, 1994,1999) y Ruiz, Bosch y Gascón (2007) en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD).
Partiendo de este estudio, en esta propuesta, se profundiza el trabajo algebraico aportando cuestiones, problemas, situaciones que conducen el proceso de construcción de las relaciones entre los parámetros de una ecuación lineal o seudo lineal y su conjunto solución de manera que cobren sentido para el alumno.

Marco teórico

Uno de los postulados básico de la TAD afirma que toda actividad matemática puede analizarse en términos de praxeologías matemáticas de complejidad creciente.
Se denominan praxeologías a cualquier actividad humana que plantea tareas a realizar, maneras de realizar dichas tareas: técnicas y maneras de explicar el por qué de esas maneras de hacer: tecnologías-teorías. En particular en la actividad matemática se habla de praxeologías u organizaciones matemáticas (OM).
Hay distintos tipos de praxeologías, puntuales, generadas por un único tipo de tareas; locales, que resultan de la integración de distintas OM puntuales en torno a un discurso tecnológico común, y regionales, que integran varias OM locales. En general, la articulacicón curricular requiere pasar sucesivamente de un nivel a otro, de OM puntuales a locales y a regionales. Esto se logra a través del planteo de situaciones en determinado nivel a las que no es posible dar respuesta con las técnicas construidas en ese nivel. Estas cuestiones son en realidad las que dan sentido, las que se constituyen en la razón de ser de las sucesivas ampliaciones.
En este marco la propuesta abarca *tipos de problemas*, es decir problemas cuya resolución involucra las mismas técnicas, que articulan el proceso de construcción del saber de manera creciente partiendo de lo que denominamos sistema inicial y pasando sucesivamente a sistemas más complejos para los cuales se dice el tipo de complejización que suponen.
Se trata de esta manera de lograr una OM relativamente completa. Cuando hablamos de completitud lo hacemos en el sentido de la TAD donde el grado de completitud de una organización matemática depende de la articulación de las distintas componentes praxeológicas: de la integración de las tareas, de la posibilidad de poner en juego diferentes técnicas, de la existencia de tareas y técnicas inversas, de la interpretación de resultados y

de la posibilidad de construir técnicas nuevas a partir de los cuestionamientos tecnológico-teóricos.

La Propuesta

Mostramos a continuación una serie de problemas que podrían conducir el proceso de estudio para la introducción de las ecuaciones, ello no significa que sólo con ellos se podrá arribar a las conceptualizaciones deseadas. Proponemos un problema o situación tipo para cada nivel de complejidad determinado.

Los niveles determinados han sido: Nivel Inicial, donde se trabajan problemas que admiten solución única. El segundo nivel es una ampliación del sistema inicial introduciendo un nuevo tipo de problemas (P_2) que, haciendo uso de las mismas técnicas de resolución que en (P_1) no obtengan una solución única, sino infinitas o ninguna. El tercer nivel lo constituyen los problemas (P_3) que permiten conceptualizar las relaciones entre las estructuras de los programas de cálculo y las ecuaciones.

Sistema inicial

Los problemas del sistema inicial (P_1) tienen un doble objetivo. El primero, y más general, es la introducción al Álgebra que, como lo proponen los autores mencionados, se realiza a través de problemas aritméticos que dan sentido al empleo de símbolos, a las operaciones con ellos y a la transformación de ecuaciones, en lo que no abundaremos, y el segundo es dar sentido al tratamiento de las ecuaciones con solución única.

El primer tipo de problemas (P_{11}) que se aborda corresponde a los denominados problemas aritméticos. Se denomina así porque para su solución requiere utilizar cadenas estructuradas y jerarquizadas de operaciones aritméticas y puede obtenerse por reversión de éstas.

Problema (P_{11})

Gabriel piensa un número, le suma 25, divide el resultado por 2, resta 8 y lo multiplica todo por 3. Si al final obtiene 21 ¿Qué número pensó Gabriel?

Dado que los alumnos pueden tener algún conocimiento de las ecuaciones, este problema puede ser abordado tanto con estrategias aritméticas como algebraicas:

La resolución aritmética del problema podría ser de la manera siguiente: “Si al final se obtiene 21, antes de multiplicar por 3 tenía 7, antes de restarle 8 tenía 15, antes de dividir por 2 tenía 30 y antes de sumar 25 tenía 5. Luego Gabriel pensó el número 5”.

La resolución algebraica podría realizarse a través de la siguiente ecuación:

$[(x + 25) : 2 - 8] . 3 = 21$

Otro problema en este marco podría ser el siguiente.

> Un ilusionista ha pensado una rutina con el objetivo de adivinar el número que piensa cada participante.
>
> La pone en práctica con el participante Juan y el diálogo entre los dos es el siguiente:
>
> Ilusionista: "piensa un número, súmale 5"
> Juan: "ya está"
> I: "multiplica el resultado por 2".
> J: "ya está".
> I: "réstale 7".
> J: "ya está".
> I: "¿Qué número obtuviste al final?"
> J: "15".
> I: "pensaste el 6"
>
> a) ¿Acertó el ilusionista? ¿Por qué?
>
> b) Si otro participante, Luis, dice que el número final que obtuvo es 21 ¿Qué número habrá pensado Luis?

Dada la posibilidad de resolución de estos problemas en términos puramente aritméticos, no hacen necesaria aún la incorporación de las herramientas algebraicas.
El segundo tipo de problemas (P_{12}), va a dar sentido efectivo a dicha incorporación. El hecho de plantear un problema en el que la incógnita aparece más de una vez demanda el planteo de una expresión escrita del problema y de una denominación para la incógnita. En este caso la incógnita aparece más de una vez pero sólo en un miembro, lo que requiere ampliar las técnicas de resolución utilizadas en P_{11} incorporando la simplificación como paso previo.
Problema (P_{12})

> Un ilusionista ha puesto en práctica la siguiente rutina con dos participantes que piensan números diferentes:
>
> I: "Piensa un número y no me lo digas, yo te adivinaré el resultado final. Al número pensado súmale 3, al resultado multiplícalo por 2, luego réstale el número que pensaste y por último súmale 5".
>
> I: (Les dice a los dos participantes lo mismo) "te dio 15"
>
> (a) ¿Adivina el ilusionista lo que pensaron los dos?
>
> (b) ¿Cuáles son todos los números que podría elegir el participante para que la rutina del ilusionista funcione?

Ante la primera consigna, los alumnos pueden dar la respuesta de diferentes maneras. Pueden probar la rutina con ciertos casos particulares o bien plantear una ecuación y resolverla y arribar a que es posible que haya acertado y también es posible que no. La ejecución de la rutina para un número particular, no funcionará a menos que elijan el cuatro. Pedir que la rutina sea realizada por dos participantes que piensan números diferentes es con el fin de hacer visible que hay números para los que la rutina puede no valer.

En la segunda consigna es donde cobra sentido la incorporación de la herramienta algebraica ya que se requiere el planteo de una ecuación en la que la incógnita aparece más de una vez, en un mismo miembro donde la simplificación es la técnica que les permitirá

estar en situación de aplicar lo que saben de (P_{11}). La expresión final a la que lleguen, del tipo x=4, les informará que la rutina es válida sólo para ese número, es decir que la ecuación planteada tiene una sola solución.
En este punto es necesario trabajar que la solución hallada es solución además de cada una de las expresiones que se obtienen antes de llegar a la simplificada.
Otro problema de este tipo es el siguiente:

> Pedro ha pensado un número. A ese número le suma su consecutivo, al resultado lo multiplica por 2, finalmente le suma 10. El resultado final le da 71. ¿Qué número pensó Pedro?

Problema (P_{13})
El tercer tipo de problemas (P_{13}) demanda una nueva ampliación de las técnicas algebraicas. Requiere el planteo de una igualdad entre dos *programas de cálculo* aritmético (PCA) donde la incógnita aparece en ambos miembros, por tanto la técnica de simplificación en un miembro no son suficientes. Además de la operatoria dentro del *programa de cálculo*, se requiere una operatoria inter-programas que transforme simultáneamente a ambos *programas de cálculo* hasta obtener uno resoluble según las técnicas anteriores.

> Un participante piensa un número. ¿Es posible que si al número pensado le sumamos 5, el resultado lo multiplicamos por 3, le restamos 2, y finalmente lo dividimos por 2, dé el mismo resultado que si al número pensado, le sumamos 22, el resultado lo dividimos por 2 y, finalmente, le restamos 3?

Es de observar que el resultado del problema arroja una fracción, esto es así para que no pueda obtenerse la solución sólo por tanteo.
Es posible escribir una expresión para cada rutina y proceder de alguna de las dos maneras siguientes:
a) Plantear la igualdad entre ambas expresiones y operar en cada miembro hasta obtener una expresión del tipo $a \cdot x + b = c \cdot x + d$; o directamente una expresión del tipo $a \cdot x + b = 0$ u otra expresión equivalente, donde a, b, c, d son números reales y con x se indica el número a determinar.
b) Operar en forma separada cada rutina hasta llegar a una expresión del tipo $a \cdot x + b$ en cada una y posteriormente plantear la ecuación a partir de igualar ambas expresiones con lo que se arriba a la misma situación anterior.
Si se denota con x el número pensado, los PCA propuestos se pueden expresar como:

$$P_1(x) = ((x+5) \cdot 3 - 2) / 2 \qquad \text{y} \qquad P_2(x) = (x+22) / 2 - 3$$

Ambas resoluciones conducen a una expresión final: $(3/2)x + 13/2 = (1/2)x + 8$; es decir $x = 3/2$

Nuevamente debemos trabajar en la observación de que la solución hallada es solución de cada una de las expresiones simplificadas
Para avanzar en la comprensión de las relaciones que se dan entre los parámetros de una ecuación y su conjunto solución, es necesario fijar la atención en las ecuaciones en sí. Para esto es importante independizarse, en cierta medida, de los sistemas modelizados, es decir abandonar las rutinas y comenzar a trabajar dentro del modelo matemático de ellas. Los dos siguientes problemas tienen esa finalidad.

Problema (P_{14})

El ilusionista ha propuesto dos rutinas que expresadas simbólicamente son las siguientes:
Rutina 1: $3(x + 7) - 5$ Rutina 2: $x+27$
¿Habrá algún valor para el cual ambas rutinas arrojen el mismo resultado?

Propongan dos programas de cálculo que coincidan en un valor no nulo, de manera que en uno intervenga el triple de la incógnita y en el otro el quíntuplo de la misma.

Hasta ahora hemos trabajado con problemas que admiten solución única aunque esto no ha sido conceptualizado.

Se amplía el sistema inicial introduciendo un nuevo tipo de problemas (P_2) que, haciendo uso de las mismas técnicas de resolución que en P_1 no permiten arribar a un resultado. Se llega a expresiones numéricas del tipo $a = b$ donde a puede ser igual o diferente de b. Decimos que el sistema inicial se amplía porque se requieren nuevas técnicas para su resolución, técnicas que involucran no sólo operaciones algebraicas sino interpretación de las expresiones finales en términos del conjunto solución.

Problema (P_{21})

Un ilusionista le dice a Juan y a Pedro lo mismo: "Piensen un número y hagan las siguientes operaciones, les adivinaré a ambos el resultado final".
"Al número pensado súmenle el doble de su consecutivo. Luego súmenle 15 y por último, réstenle el triple del número pensado inicialmente". "Seguramente obtuvieron 17".
a) Juan pensó el 49, no sabemos qué pensó Pedro pero sí que es un número distinto al de Juan y dice que también le dio 17 ¿Podrá ser? ¿Por qué?
b) ¿Cuáles serán todos los números para los que el resultado de la rutina es 17?

Para arribar a la conceptualización de que es posible que haya infinitas soluciones, comenzamos, en la consigna a) por plantear la posibilidad de que haya más de una solución; la consigna b) pregunta cuáles serán todas, aunque aún no dispongan de métodos que permitan caracterizar la totalidad del conjunto solución, se trata de que puedan intuirlo.

Problema (P_{22})

Formule una rutina distinta de la anterior que admita infinitas soluciones

A través del problema P_{22} se busca que los alumnos se vean obligados a mirar las ecuaciones como un todo, fijando su atención en las transformaciones sufridas por la ecuación original de manera de establecer una vinculación entre la ampliación del conjunto solución, la posibilidad de "hacer desaparecer las x" y la vinculación de esto con el hecho de que aparezca un coeficiente nulo para la x.

Problema (P_{31})

Dadas las siguientes ecuaciones decir cuáles son todos los números que las verifican: 5(x+1)-3 = 3(x+1) +2x -1   5(x+1)-2 = 3(x+1) +2x -4

Dado que en ambas ecuaciones "desaparece la x" deben interpretar los distintos conjuntos solución en términos de la expresión final, asociando a una expresión del tipo $b=b$ con un conjunto infinito de soluciones y una del tipo $a=b$ con a y b diferentes a un conjunto de soluciones vacío. Para reafirmar esto podemos pedir lo siguiente:

Problema (P_{32})

Dar dos ecuaciones, diferentes de las anteriores, una con infinitas soluciones y otra sin solución.

Problema (P_{33})
La próxima actividad tiene por objetivo reflexionar sobre la expresión general de una ecuación lineal.

Hemos trabajado con ecuaciones en las que, a través de operaciones algebraicas se arriba a una de la forma Ax+B = C a) ¿Qué valores debería tomar A para estar seguros de que la solución no es única? b) Y para asegurarnos de que tiene infinitas, ¿qué más debería ocurrir? c) Si A fuera cero pero no se cumpliera lo anterior, ¿cuál sería el conjunto solución? d) ¿Cuál será el conjunto solución cuando A es distinto de cero?

Se pretende llegar a institucionalizar que:

El conjunto solución para ecuaciones del tipo Ax+B = C, puede tomar tres formas diferentes según A sea igual o diferente de cero y dentro de el primer caso según B=C o B≠ C

Se define que: En las ecuaciones Ax+B = C, cuando A es distinto de cero (es decir cuando aparece el término en x) se trata de una ecuación lineal.

Diga qué condiciones cree que debe cumplir una ecuación del tipo Ax+B = C para que admita una, ninguna o infinitas. Analizar que no hay más posibilidades

En este momento hemos introducido las ecuaciones lineales y pseudolineales. El proceso podría continuar incorporando otro tipo de ecuaciones como las cuadráticas.

Conclusión
Desde el punto de vista del alumno podemos decir que con esta propuesta se atiende a la posibilidad de que pueda poner en juego todas las técnicas que dispone en cada momento decidiendo por sí mismo las ventajas que unas ofrecen respecto a otras y de que se vea involucrado en la construcción de las técnicas óptimas para obtener las soluciones.
Respecto al saber, hemos presentado una serie de problemas y cuestiones que permiten dirigir el proceso de estudio dirigido a la introducción de las ecuaciones en la escuela media de manera que cobre sentido para el alumno.

Lo interesante de este trabajo se focaliza en el proceso de construcción. Se realiza a través de ampliaciones sucesivas del saber, de complejizaciones de las técnicas, donde en cada pasaje de un nivel de complejidad a otro se explicitan las razones que dan sentido en función de las limitaciones de las técnicas del nivel anterior.
Por otra parte se busca una completación relativa de ese saber, en el sentido que se articula profundamente las distintas componentes praxeológicas, las tareas dan lugar a las técnicas y las limitaciones de las técnicas llevan a planteos tecnológicos que hacen surgir nuevas técnicas. Es posible ver la integración que se da entre los distintos tipos de tareas, las técnicas respectivas y las tecnologías correspondientes.
El proceso de estudio incluye de alguna manera etapas evaluativas de la comprensión de las técnicas, las que están ligadas a la posibilidad de poner en juego tareas y técnicas "inversas"; por ejemplo aquellas en que, bajo ciertas condiciones, es el alumno quién debe construir un programa de cálculo.
En este sentido podemos decir que se presenta una propuesta *relativamente completa* para el estudio en la escuela media de las ecuaciones lineales. La relatividad de la completitud hace referencia a que las tareas, técnicas o tecnologías que son válidas en una institución pueden no serlo en otras.

Referencias Bibliográficas

Bolea, P. (2002). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares.* Tesis doctoral publicada por el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza, en el número 29 de las Monografías del Seminario Matemático "García de Galdeano" (2003). España.

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. *Recherches en Didactique des Mathématiques 21 (3)*, 247-304.

Buffarini, F. (2005). *La dimensión del álgebra como herramienta de modelización y validación. Las interacciones en el aula como medio para su evolución.* Tesis de maestría. Universidad Nacional de Río Cuarto. Argentina.

Chevallard, Y. (2004). *Séminaire PCL2 de Mathématiques – IUFM d'Aix-Marseille, séance 18*. Recuperado el 27 de mayo de 2010 de http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/fi/pcl2/2A.TXT/2006-2007/cd_2007.html

Gascón, J. (1993) Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: Del patrón análisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico. *Recherches en didactique des mathématiques 13(3)*, 295-332.

Gascón, J. (1993-1994). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'« arithmétique généralisée ». *Petit X 37*, 43-63.

Gascón, J. (1999). La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar. *Revista de Educación matemática 11(1)*, 77-88.

Ruiz, N., Bosch, M. y Gascón, J. (2007). La algebrización de los Programas de Cálculo Aritmético y la introducción del álgebra en Secundaria. En A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade y C. Lavage (Eds), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et de´action* (pp. 655-676), Montpellier: IUFM de L´académie.