FORMULANDO PROBLEMAS PARA RESOLVER UTILIZANDO CONCEPTOS DE GRAFOS

Teresa Braicovich, Raquel Cognigni, Claudia Reyes, Lorena Alfonso
Universidad Nacional del Comahue. Argentina
teresabraicovich@jetband.com.ar
Niveles Básico y Medio

Resumen
El eje de este taller es la formulación de problemas, pero en particular dichos problemas serán formulados a partir de los cuatro motivaciones históricas que dan origen a la Teoría de Grafos, recorridos eulerianos, recorridos hamiltonianos, árboles y planaridad y coloreo.
El objetivo de este taller es que los asistentes, ya sean docentes en formación o en ejercicio, "inventen" problemas, referidos a distintas aplicaciones de la Teoría de Grafos, se hará un análisis minuciosos de ellos durante el desarrollo del taller y luego se presentarán, a modo de ejemplo, distintos problemas que fueron formulados por estudiantes del Profesorado de Matemática en un curso que ofrecimos como parte del Seminario de la Enseñanza, que es una asignatura de dicha carrera.
<u>Palabras clave</u>: grafos – problemas – motivaciones históricas

> Lo que sobre todo deberíamos proporcionar a nuestros alumnos a través de las matemáticas es la posibilidad de hacerse con hábitos de pensamiento adecuados para la resolución de problemas matemáticos y no matemáticos. A la resolución de problemas se le ha llamado, con razón, el corazón de las matemáticas, pues ahí es donde se puede adquirir el verdadero sabor que ha atraído y atrae a los matemáticos de todas las épocas. Del enfrentamiento con problemas adecuados es de donde pueden resultar motivaciones, actitudes, hábitos, ideas para el desarrollo de herramientas, en una palabra, la vida propia de las matemáticas. (Miguel de Guzmán, 1984, p. 10)

Introducción

La resolución de problemas es una parte fundamental de la matemática, en una conferencia pronunciada en 1968 George Polya decía: "*Está bien justificado que todos los textos de matemática contengan problemas. Los problemas pueden incluso considerarse como la parte más esencial de la educación matemática*" (Bobo Romero, 2009).
Los grafos en sus comienzos estaban relacionados principalmente a pasatiempos y rompecabezas, sin embargo, avances recientes en la matemática y especialmente en sus aplicaciones los han impulsado en gran medida. Actualmente es una rama de la matemática que se encuentra en pleno auge, teniendo en la actualidad numerosas aplicaciones, a cuestiones de carácter práctico: emparejamientos, problemas de transporte, flujo en redes, programación, entre otros.
Según Rosentein, J., Franzblau, D. y Roberts, F. (1997) la introducción de algunos temas de la teoría de grafos les permite a los estudiantes un nuevo comienzo, pues resulta atractivo, aplicable, accesible y adecuado.
.

Pertinencia de la propuesta

> Saber matemática no es sólo aprender las definiciones y los teoremas, para reconocer la ocasión de utilizarlos y aplicarlos; nosotros sabemos bien que hacer

matemática implica que uno se ocupe de los problemas. No hacemos matemática sino cuando nos ocupamos de problemas, pero a veces se olvida que resolver un problema no es más que una parte del trabajo; encontrar las buenas preguntas es tan importante como encontrar las soluciones. Una buena reproducción por parte del alumno de una actividad científica exigiría que actúe, que formule, que pruebe, que construya modelos, lenguajes, conceptos, teorías, que las intercambie con otras, que reconozca aquellas que son conformes a la cultura, que tome aquellas que le son útiles, etc. Citando a Guy Brousseau (1986):

Considerando la importancia que tiene que los alumnos resuelvan problemas, surge una pregunta que, seguramente, muchas veces nos hacemos como docentes es: "¿será motivador este problema para mis alumnos?". Para contestarnos esta pregunta podemos tener en cuenta las consideraciones de Callejo de la Vega (1997, p. 3) referidas a este tema, las mencionamos a continuación:

- Problemas accesibles: enunciados claros, conocimientos al alcance de los alumnos, pero no deben ser triviales.
- Problemas interesantes: pueden ser juegos, situaciones reales, fantásticas o puramente matemáticos, también pueden estar relacionados con la historia de la matemática.
- Problemas relevantes: útiles para introducir conceptos, propiedades, heurísticas, estrategias, etc.
- Problemas que se puedan resolver de distintas formas, que permitan diferentes niveles de profundización, que sean aplicables y también verificables.
- Problemas que se presten para introducir variantes, que sirvan para emprender un proceso de investigación o que sean problemas abiertos.

De acuerdo a Schoenfeld (1985) existen cuatro destrezas necesarias para el éxito en matemática, a saber: plantear heurísticas, estrategias y técnicas para resolución de problemas tales como "trabajar hacia atrás" o dibujar figuras, ser ingenioso al trabajar con proposiciones y procedimientos de conocimientos de matemática, decidir sobre cuándo y qué resolución o estrategia utilizar y el control de las mismas y reconocer que la matemática está estrechamente ligada con la vida cotidiana.

Contenidos a desarrollar

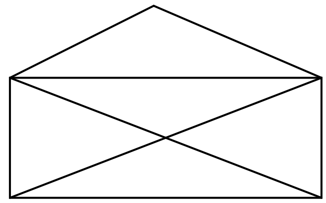
Nos avocaremos a las cuatro grandes motivaciones históricas de la Teoría de Grafos (Chiappa, R. 1989), las que sucintamente se presentan a continuación:

Recorridos eulerianos

El matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783) escribió el primer artículo científico relativo a grafos, el que apareció en San Petersburgo, donde a partir de un problema concreto se hace la pregunta *¿en cuáles grafos se puede encontrar un camino cerrado que recorra todas las aristas una sola vez*? Esta pregunta termina dando origen a los dos siguientes teoremas:

- *Un grafo conexo con todos sus vértices de grado par contiene un camino cerrado que pasa una y sólo una vez por cada una de las aristas y es llamado camino euleriano cerrado.*
- *Un grafo conexo contiene un camino S_{ab} que pasa una sola vez por cada arista si y sólo si a y b son los únicos vértices de grado impar y es llamado camino euleriano abierto*.

El problema euleriano está relacionado directamente con el de las figuras unicursales, que son las que pueden ser recorridas de un solo trazo sin repetir segmentos. Un entretenimiento muy conocido y relacionado con este concepto es el comúnmente denominado: "*figura del sobre*", que se presenta a continuación:

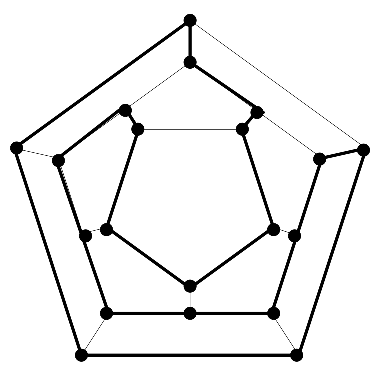


Grafo que representa al juego del sobre

Como en este grafo hay sólo dos vértices de grado impar, existe camino euleriano abierto, pero no cerrado. Para dibujar la figura sin levantar el lápiz ni pasar dos veces por el mismo lugar, se debe comenzar el trazado en uno de los dos vértices inferiores y finalizar en el otro.

Recorridos hamiltonianos

Es un recorrido que pasa una y solo una vez por cada uno de los vértices del grafo. El famoso matemático irlandés Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) debido a sus trabajos sobre cuaterniones, analizó la existencia de ciclos de este tipo e inventó un juego, llamado "*Icosian Game*", La parte principal de este juego estaba hecha de madera y era un dodecaedro regular, cada uno de los 20 vértices del mismo era marcado con el nombre de una ciudad importante. El jugador debía elegir un recorrido a lo largo de las aristas del dodecaedro que pase exactamente una vez por cada ciudad y vuelva a la ciudad de la cual partió. Otra posibilidad de realizar el recorrido era sin volver a la ciudad de la cuál partió. Una variante de este desafío, que lo hacía aún más interesante, estipulaba algunas ciudades que debían ser visitadas al comienzo del recorrido. Para recordar cuáles ciudades se habían visitado se insertaban alfileres en los vértices y se los conectaba mediante un hilo. Por ser el dodecaedro incómodo de manejar, Hamilton desarrolló una versión del juego en que el mismo es reemplazado por el que se presenta a continuación y es isomorfo al del dodecaedro:



Este tema es aún hoy un problema abierto, pero es importante que los docentes, sobre todo del nivel secundario cuenten con herramientas de este tipo. Cabe aclarar que los alumnos no necesitan una base matemática importante para poder comprenderlo y de esta manera los estudiantes tienen una visión distinta de la matemática, pues tienen la posibilidad de saber que no está "*todo resuelto*" en esta disciplina, creencia que, en general, es muy fuerte en ellos.

Árboles

Son grafos conexos que no tienen ciclos. En los árboles de n vértices hay siempreun número igual a (n-1) aristas. El concepto de árbol surgió en estudios sobre redes eléctricas y también en otros referidos a química, esto fue aproximadamente 100 años después de la aparición del primer escrito de Euler, que fue mencionado anteriormente. En la actualidad tiene muchas aplicaciones en algoritmos para computación.

Un árbol minimal cubriente de un grafo G es el árbol de menor valor o peso que contiene a todos los vértices del grafo *G* y un árbol maximal cubriente de un grafo G es el árbol de mayor valor o peso que contiene a todos los vértices del grafo *G*

Coloreo y planaridad

Los grafos planares son los que pueden dibujarse en el plano de manera que sus aristas sólo se corten en vértices del grafo. En los grafos planares conexos la diferencia entre la suma del número de vértices y de regiones y el número de aristas es igual a 2. Este concepto es el correspondiente al conocido pasatiempo en el que se pregunta si es posible proveer de luz, agua y electricidad, a tres casas, de forma tal que las respectivas redes de distribución, supuestas en un mismo plano, no se intersecten. Contestar a esta pregunta equivale a determinar si el grafo determinado es planar, como el mismo no lo es, se puede afirmar que no es posible que las redes de distribución no se superpongan.

Un grafo es coloreado de manera tal que a vértices adyacentes correspondan colores diferentes, el número mínimo de colores con el que puede ser coloreado es denominado el número cromático del grafo. Es importante destacar que para colorear cualquier grafo planar es suficiente con cuatro colores. El problema que parece haber dado origen a este tema es el mencionado por Moebius en 1840 y es consecuencia de una hipótesis de los fabricantes de mapas, que dice: *Supuesto que cada país está constituido por una única región conexa y que toda frontera entre países está formada por arcos de curva (no las hay constituidas por un solo punto) todo mapa sobre un plano, o equivalentemente sobre la superficie de una esfera, puede colorearse utilizando a lo sumo cuatro colores y de forma que países limítrofes tengan colores distintos*. (Chiappa, 1989). Este problema tuvo en vilo por más de un siglo a los más famosos matemáticos del mundo, recién fue demostrado en el año 1976 por Appel y Haken.

Metodología

A partir de lo que hemos planteado en el punto 2, queda de manifiesto la importancia de la resolución de problemas, pero sin duda alguna esto está ligado a la presentación de "buenos" problemas por parte de los docentes, por eso el objetivo de este taller es que los asistentes formulen los problemas y luego los analizaremos, de acuerdo a los puntos planteados por Callejo de la Vega (1997), en conjunto. Hemos tomado y adaptado, entre otros, problemas de Coriat (2004), Chartrand (1985), Menéndez (1998) y Wilson (1979)

Las horas con las que se cuenta para el dictado del taller no son demasiadas, por eso la idea es trabajar con algunos temas de la teoría de grafos y generar en los asistentes la inquietud de investigar y seguir estudiando el tema, por lo que se prepararon actividades que los motiven a continuar en esa dirección. Para que esto sea efectivamente provechoso se ofrecerá toda ayuda a futuro, mediante el contacto con las docentes encargadas del taller.

Algunas actividades a proponer

A continuación se presentan ciertas pautas a tener en cuenta para las actividades que se propondrían en el taller, esto atendiendo a la flexibilidad del proceso de enseñanza-aprendizaje:

- Se comenzará el taller leyendo en conjunto los prólogos de algunos libros de Adrián Paenza de la Colección Ciencia que ladra y se analizará la visión de la matemática que allí se refleja. (Paenza, 2007 y 2008)
- Se definirá grafo dirigido y grafo no dirigido (o directamente grafo), se darán algunos ejemplos de la vida cotidiana y se les pedirá a los asistentes que planteen situaciones que puedan ser modelizadas mediante grafos, se hará una puesta en común de esta actividad. Seguramente surgen a partir de los ejemplos presentados por ellos varios conceptos de grafos, por ejemplo, bipartitos, conexos, completos, ciclos, grados de los vértices, grafos con vértices aislados, etc.
- Se definirá grafo valuado y se harán actividades análogas a las realizadas en el punto anterior. Es importante que vean a los grafos como una herramienta de modelización, pues representaciones diferentes sustentan diferentes formas de pensar sobre los objetos matemáticos.
- Se presentará el problema euleriano a partir de la motivación histórica correspondiente, ya que la historia debería formar parte, necesariamente, de los conocimientos de cada docente en todos los niveles, no sólo con la intención de que la utilice como instrumento en su propia enseñanza, sino también porque proporciona una visión verdaderamente humana de la ciencia y por ende permite entender mejor las distintas correlaciones existentes. Una vez dado el concepto de recorrido euleriano abierto y cerrado, se les pedirá que ellos formulen problemas que puedan ser resueltos utilizando este concepto. Luego de la puesta en común se les mostrarán los problemas que plantearon un grupo de estudiantes del Profesorado en Matemática.
- De la misma manera que se trabajó con grafos eulerianos se trabajará con recorridos hamiltonianos, árboles y finalmente con coloreo y planaridad.
- Luego se mostrará el trabajo que realizaron algunos estudiantes durante las experiencias llevadas a cabo junto con el análisis correspondiente. (Braicovich, 2005) y (Cognigni, Braicovich y Reyes, 2008)
- Se hará que los docentes trabajen de manera individual en algunas situaciones y de manera grupal en otras, consultando todo lo que consideren necesario, para lo que se contaría con 4 personas a cargo del taller.

Reflexión final

Finalmente, queremos mencionar que, como seguramente el grupo asistente al taller será heterogéneo, se partirá considerando que los asistentes desconocen totalmente el contenido a desarrollar referido a grafos, que no han trabajado previamente con conceptos de esta teoría, ya que por el tipo de actividades que se plantean esto es posible. Por último, queremos destacar que:

> Tener una disposición favorable hacia la resolución de problemas incluye la confianza y la voluntad para encargarse de tareas nuevas y difíciles. Los buenos resolutores de problemas son hábiles buscando la información que les ayude a resolverlos y haciendo un uso efectivo de lo que conocen. Su conocimiento de estrategias les proporciona opciones. Si falla el primer enfoque del problema, consideran otros. (NCTM, 2003, pág. 340).

Referencias Bibliográficas

Bobo Romero, E. (2009) *Algunas ideas para resolver problemas*. Recuperado 10 de marzo de 2011 de http://www.socylem.es/sitio/webantigua/zamora/material_olimpiadas.pdf

Braicovich, T. (2005). *Introducción de algunos conceptos de grafos en Tercer Ciclo de Educación General Básica*. Tesis de Maestría no publicada, Universidad Nacional del Comahue. Neuquén.

Brousseau, G. (1986). Fondaments et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathematiques*. 7 (2), 33-115.

Callejo de la Vega, M. (1997). Resolver e inventar problemas. Juegos, números y figuras. *Seminario Internacional Olimpíada Matemática Argentina*. Bariloche. Argentina.

Chartrand, G. (1985). *Introductory Graph Theory*. Dover, Nueva York.

Chiappa, R. (1989) Algunas motivaciones históricas en la teoría de grafos. *Revista de educación matemática. Unión matemática argentina.* 4 (1). Universidad Nacional de Córdoba, 37-54.

Cognigni, R.; Braicovich, T.; Reyes, C. (2008). Recorriendo grafos a lo largo de la educación general básica. *Revista de Educación Matemática de la Unión Matemática Argentina* 23. 109-125. Universidad Nacional de Córdoba.

Coriat, M. (2004) Algunos usos escolares de los grafos. UNO. *Revista de Didáctica de la Matemática* 36, 8-21. Universidad Complutense de Madrid.

Guzmán, M. (1984). Juegos matemáticos en la enseñanza. *Actas de las IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*. Sociedad Canaria de Profesores de Matematica Isaac Newton.

Menéndez Velázquez, A. (1998). Una breve introducción a la Teoría de Grafos. *SUMA*: *Revista sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas* 28, 11-26.

National Council of Teachers of Mathematics. (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. Sevilla. España.

Paenza, A. (2007). "*Matemática…¿estás ahí*? *episodio* 3". Siglo XXI. Buenos Aires: Siglo XXI.

Paenza, A. (2008). "*Matemática…¿estás ahí*? *episodio* 100". Siglo XXI. Buenos Aires: Siglo XXI.

Rosentein, J., Franzblau, D., Roberts, F. (1997). *Discrete Mathematics in the Schools*. Dimacs. Volumen 36 American Mathematical Society National Council of Teachers of Mathematics.

Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical problem solving*, San Diego, CA: Academic Press.

Wilson, R. (1979). *Introduction of Graph Theory*. New York: Longman