EL USO DE LAS GRÁFICAS EN LA MATEMÁTICA ESCOLAR: UNA MIRADA DESDE LA SOCIOEPISTEMOLOGÍA

Gabriela Buendía Abalos
CICATA-IPN - México
gbuendia@ipn.mx
Nivel Medio y Superior

Resumen
Este escrito aborda el papel de las gráficas en la construcción del saber matemático desde una perspectiva socioepistemológica. Se presentan dos estudios de caso; el primero es relativo a la enseñanza de las ecuaciones diferenciales y el segundo, al tema de funciones seccionadas lineales en el nivel educativo medio. Los resultados se discuten a través del constructo teórico de *uso de las gráficas*, el cual propone analizar las diferentes funciones y formas que las gráficas van tomando en la matemática escolar dependiendo de la situación particular. Ello favorece una resignificación del tópico matemático en cuestión hacia un saber que pretende ser más articulado y funcional para el alumno.
Palabras clave: uso de gráficas, socioepistemología, graficación, resignificación

Introducción

El objetivo de esta investigación es discutir el estatus epistemológico de las gráficas en la construcción del conocimiento matemático. Partimos de la necesidad de ampliar las explicaciones sobre gráficas y sus problemas de enseñanza-aprendizaje para ir más allá de los marcos de referencia que las consideran únicamente como la representación del objeto función. Este estudio socioepistemológico busca reconocer que las gráficas tienen un uso que se desarrolla situacionalmente de tal manera que es factible explorar la naturaleza del conocimiento matemático involucrado y favorecer su resignificación.

Para ello, presentaremos los resultados preliminares de dos estudios en curso. Ambos se trabajaron a partir de problemas de libros de texto, lo cual nos sitúa en un conocimiento vigente en el aula de matemáticas. Desde ahí se intenta analizar a las gráficas cartesianas no tanto como un objeto que la matemática escolar busca obtener, sino como una herramienta de trabajo en el aula que sostiene una argumentación y porta significados relativos a la construcción de conocimiento matemático. En ese sentido hablamos de resignificación del conocimiento matemático con el que estamos tratando. Para este escrito, abordamos el uso de las gráficas para resignificar a las condiciones iniciales en las ecuaciones diferenciales lineales y a las funciones lineales seccionadas en un contexto de manejo de la información.

Ello permitirá evidenciar a la graficación como una práctica institucional, esto es, como un trabajo escolar en el que, normado por lo institucional, las gráficas sostienen el desarrollo del razonamiento y de la argumentación en diversas situaciones de uso.

Aspectos Teóricos

Las gráficas tienen diferentes usos en la matemática escolar. Cordero (2008) propone entender esos usos a través del análisis del funcionamiento y forma de las gráficas. El funcionamiento se refiere al rol de la gráfica en una tarea; la forma alude tanto a la apariencia perceptible de las gráficas como a la manera en la que el individuo actúa sobre ella, cuando por ejemplo, lee información. Ambos aspectos ocurren de manera entrelazada y dependen de la situación particular en la que actúa el individuo. Así, el papel de la gráfica cambia de ser la representación de una función a jugar un rol dinámico en un espacio de interacciones estudiante-docente-matemáticas. Carrasco (2010) caracteriza este cambio como un desplazamiento de nuestra mirada sobre la gráfica del objeto matemático fijo y preestablecido hacia un objeto temporal y evolutivo.

El uso de las gráficas tiene un desarrollo en el sistema didáctico pues los funcionamientos y formas identificados en una situación se reorganizan para dar lugar a otros en nuevas situaciones. Hay, entonces, una relación dialéctica entre el uso de las gráficas y las situaciones escolares pues éstas se pueden desarrollar gracias a cómo se usan las gráficas y a su vez, la situación favorece que se desarrollen los diferentes funcionamientos y formas de las gráficas. De ahí que Cordero, Cen y Suárez (2010) perciban a las gráficas como un continuo al transformarse y transforman al sistema educativo.

Este constructo teórico de *uso de las gráficas* y su categoría de análisis –funcionamiento y forma- permiten explorar la naturaleza del saber matemático y permite abordar cuestiones acerca de cómo las gráficas desarrollan conocimiento matemático, cómo lo explican o cómo lo fundamentan.

El Uso De Las Gráficas En La Resignificación De Las Condiciones Iniciales De Las Ecuaciones Diferenciales

Este primer estudio se presenta con detalle en (Buendía, 2010) y aquí presentamos un resumen que nos permite discutir cómo se están usando las gráficas. Buendía y García (2002) realizaron un análisis gráfico para establecer una relación entre el número de condiciones iniciales y el orden de una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes; esto es, para seleccionar una única curva (por ejemplo, para cumplir con el teorema de unicidad) hace falta una única condición si se trata de una ecuación de primer orden, dos para una de segundo y así sucesivamente.

En el análisis gráfico, se compara el comportamiento de las familias de curvas solución de ecuaciones diferenciales lineales de primer, segundo y tercer orden. En la figura 1 se muestran dichas familias para una ecuación diferencial con coeficientes unitarios.

$y' + y = x$ $y'' + y' + y = x$ $y''' + y'' + y' + y = x$

Figura 1. Familias de curvas solución que se intersecan en uno o en varios puntos

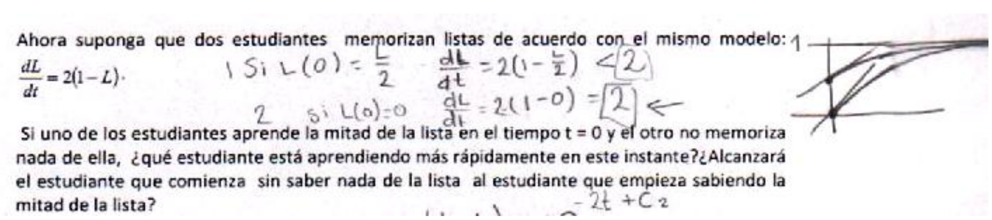
Consideramos que las gráficas están funcionando como una familia con un cierto comportamiento que se puede comparar según el orden de la ecuación. Simultáneamente, al entrar al análisis de cada familia, la forma de la gráfica debe ser primero focalizada en un punto conflictivo (x_0, y_0), lo cual permite ver cómo están comportándose entre sí los miembros de la familia. La forma en la que uno puede ver el comportamiento de un conjunto de curvas en ese punto permite generar un argumento alrededor de que si por ese punto no pasa más que una curva, entonces será necesaria una única condición inicial. Sin embargo, si pasan más, será necesario una distinción adicional que podrá ser la pendiente de la recta tangente para el caso de curvas provenientes de una ecuación de segundo orden, o bien alguna condición relativa a la concavidad, para las de tercer orden. De alguna manera, la primera condición se refiere a "por dónde pasa la curva", y las demás condiciones van entrando al detalle sobre "cómo pasa la curva por ese punto".

Los tópicos matemáticos de *pendiente de la recta tangente* y *concavidad*, como aplicaciones de la derivada, se están a su vez re-significando a partir de este uso de las gráficas. Una condición del tipo $y(x_0) = y_0$ sitúa el punto conflictivo y posteriormente, condiciones del tipo $y'(x_0) = y'_0$, $y''(x_0) = y''_0$, permiten distinguir el comportamiento de cada miembro con mayor detalle. Las diferentes pendientes de las tangentes se vuelven un criterio suficiente para distinguir a las curvas cuando presentan un comportamiento propio de una ecuación diferencial de segundo orden o bien, será necesaria además una distinción sobre la concavidad de la curva para las ecuaciones de tercer orden. Las gráficas son, entonces, capaces de sostener el argumento relativo a la relación entre el número de condiciones iniciales y el orden de la ecuación diferencial.

Con estos antecedentes y para evidenciar el papel de las gráficas en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales, se seleccionó la segunda pregunta del "Problema de la Memorización" propuesto en (Blanchard, Devaney y Hall, 1999):

> Ahora suponga que dos estudiantes memorizan listas de acuerdo con el mismo modelo: $\frac{dL}{dt} = 2(1-L)$. Si uno de los estudiantes aprende la mitad de la lista en el tiempo t = 0 y el otro no memoriza nada de ella, ¿qué estudiante está aprendiendo más rápidamente en este instante? ¿Alcanzará el estudiante que comienza sin saber nada de la lista al estudiante que empieza sabiendo la mitad de la lista? (Blanchard et al., p. 15).

Los detalles metodológicos y los resultados se discuten a detalle en (Buendía, 2010). Aquí queremos sólo discutir cómo se usaron las gráficas al resignificar la ecuación diferencial. En la figura 2, se muestra la respuesta de un profesor en la que el cociente d*L*/d*t* es usado como la parte de la ecuación diferencial que ya está hablando de la rapidez de aprendizaje, así que sólo sustituye en la ecuación diferencial original los valores de ½ y 0. Esto le permite hallar que cuando *L*= 0, el estudiante está aprendiendo más rápido. Por otra parte, el mismo profesor esboza el comportamiento de las soluciones y situado en el momento de análisis deseado (*t*=0), dibuja rectas tangentes. Esto parece indicar que la pendiente de la tangente funciona como un argumento gráfico que, haciendo uso del comportamiento local de la curva, puede informar acerca de la rapidez de aprendizaje en ese momento.


Ahora suponga que dos estudiantes memorizan listas de acuerdo con el mismo modelo: $\frac{dL}{dt} = 2(1-L)$.

1 Si $L(0) = \frac{L}{2}$ $\quad \frac{dL}{dt} = 2(1-\frac{L}{2}) < \boxed{2}$

2 si $L(0) = 0$ $\quad \frac{dL}{dt} = 2(1-0) = \boxed{2}$ ←

Si uno de los estudiantes aprende la mitad de la lista en el tiempo t = 0 y el otro no memoriza nada de ella, ¿qué estudiante está aprendiendo más rápidamente en este instante? ¿Alcanzará el estudiante que comienza sin saber nada de la lista al estudiante que empieza sabiendo la mitad de la lista?

$-2t + C_2$

Figura 2. Dando significado al cociente

Mostramos una respuesta más de un tercer profesor (figura 3). En ella, podemos ver el intento infructuoso por responder a lo solicitado resolviendo analíticamente la ecuación. Después, sobre el esbozo gráfico, el profesor señala con mayor énfasis las pendientes de las rectas tangentes en $t = 0$ y eso se vuelve explícitamente el argumento para responder que "*el que empieza en 0 aprende + rápido*"

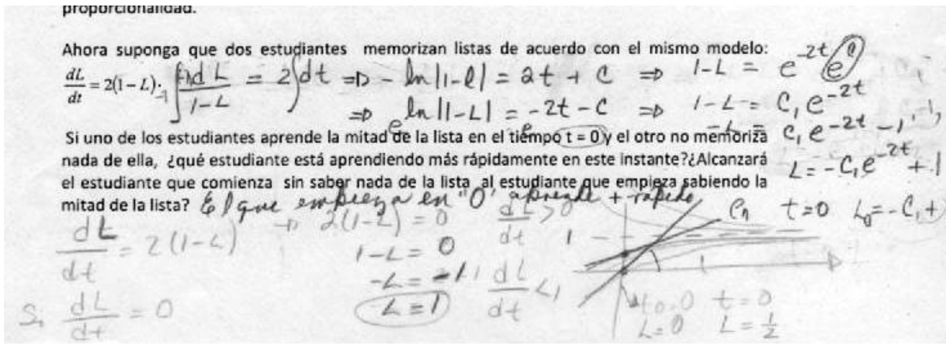


Figura 3. El que empieza en 0 aprende + rápido

En estas ilustraciones, podemos ver que el comportamiento de las gráficas solución ayuda a dar respuesta a la velocidad del aprendizaje; la pendiente de la recta tangente se vuelve una herramienta que le da un significado a dicha velocidad. Esta es la forma en la que el profesor lee la gráfica, es su forma de usar la gráfica. Así, en esta situación, las gráficas funcionan a partir de análisis cualitativos para darle significado a la ecuación diferencial como una razón de cambio. Las gráficas son vistas como una familia de curvas solución y su comportamiento corresponde a una ecuación de primer orden. Así, una única condición inicial se resignifica como aquella que selecciona una única curva y puede informar acerca de la velocidad de aprendizaje en ese punto en particular.

Segundo Estudio: Resignificando Gráficas Seccionadas

Seleccionamos un problema extraído de un libro de texto vigente para el sistema educativo mexicano. Se trata del libro de Matemáticas de Tercero (Cantoral, R. Farfán, R. M., Montiel, G., Lezama, J., Cabañas, G., Castañeda, A., Martínez-Sierra, G., Ferrari, M., 2008), texto para estudiantes de tercero de secundaria (14-15 años). Es importante aclarar que en este nivel educativo se trabajan contenidos matemáticos relativos a álgebra y trigonometría principalmente. Los elementos de cálculo como funciones se trabajan a través de funciones lineales y cuadráticas, la obtención de sus gráficas y cuestiones de operatividad como resolver sistemas de ecuaciones lineales.

El problema se trabajó con un grupo de alrededor de 300 profesores durante un diplomado de especialización al que asistieron docentes de secundaria en ejercicio. Por el momento, no se tienen datos precisos sobre la formación profesional de los profesores participantes; sin embargo, en México, un alto porcentaje de los profesores que laboran en este nivel educativo no tienen licenciatura universitaria. Trabajaron en equipos y aquí se presenta el caso de dos equipos integrados por diez profesores.

Este problema, que hemos llamado "De las Bicicletas" (figura 4), se encuentra en el Bloque 3 titulado "Todo cambia", bloque en el que se espera que los alumnos interpreten y representen relaciones lineales. El problema pertenece al eje curricular de "Manejo de la información" el cual se caracteriza por el constante uso de gráficas para organizar información y representar objetos matemáticos con el objetivo de entender matemáticamente el mundo que nos rodea. Concretamente la lección 20, de la cual forma parte el problema, plantea actividades sobre fenómenos cuya modelación requiere del empleo de gráficas definidas por sección.

> *Juan está en su bicicleta detenido frente a la casa de su novia Ana. Cuando lo ve Carlos, el hermano de Ama, Juan arranca en su bicicleta. Al hacerlo, Carlos también toma su bicicleta y lo adelanta yendo a velocidad constante. Sus gráficas velocidad vs. tiempo son las siguientes:*

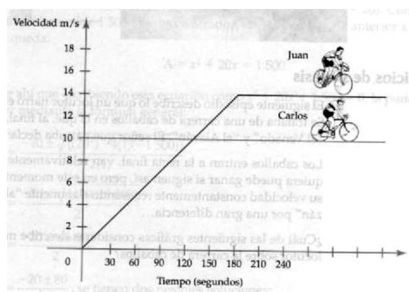


Figura 4. El problema de las Bicicletas (Cantoral et al, p.169)

Las preguntas cuyas respuestas analizaremos son:

a) ¿Cuánto tardará Juan en alcanzar la velocidad de Carlos?
b) En dicho instante, ¿qué ventaja lleva Carlos a Juan?
c) ¿Qué distancia habrán recorrido desde la casa de Ana hasta alcanzarse?

La respuesta a la primera pregunta puede obtenerse de un análisis prácticamente directo de la gráfica, así que los profesores no tienen problema en identificar la intersección de las rectas como el tiempo en el que ambos tienen la misma velocidad y de ahí obtener la respuesta. Entonces, la gráfica funciona de una manera acorde con el tratamiento usual de las gráficas en el aula de matemáticas: hallar la intersección de las rectas. Dada la naturaleza de la información gráfica, los profesores tuvieron que acordar el punto exacto con el cual trabajar para la siguiente pregunta. La discusión al respecto no se presenta aquí por cuestiones de espacio, así que el resto del análisis se presenta con base al acuerdo en dos equipos: Juan y Carlos alcanzan la misma velocidad en t = 120 y d = 10 (equipo A) o en t = 128 y d= 10 (equipo B).

La segunda pregunta requiere que las gráficas sean usadas de otra manera pues, intuitivamente, la gráfica tiempo-velocidad contiene información acerca de la distancia, pero para explicitarla sería necesario que la gráfica funcione de otra manera pues no basta con operar sobre ella (encontrar coordenadas, hallar intersecciones,…).

En la figura 5, el equipo A utilizó la fórmula $v = d/t$ para obtener la distancia $d = vt$. En el caso de Juan (recta horizontal) sólo hace falta multiplicar 120 por 10 para obtener la distancia recorrida (1200 metros). Pero para el caso de Carlos la velocidad va cambiando así que el equipo decidió obtener la distancia recorrida en diferentes sectores de la gráfica; estos sectores estuvieron determinados por la escala presentada en la figura original. Entonces para el primer intervalo (ver ampliación de la figura 5) en el que han transcurrido 30 segundos, se tiene una velocidad de 2.5, por lo que la distancia recorrida es de 75. Para el segundo intervalo en el que transcurriendo otros 30 segundos, se tiene una velocidad de 5, por lo que la distancia recorrida es de 150. Finalmente, se acumulan las distancias recorridas en cada intervalo para obtener la distancia total es:

$$75 + 150 + 210 + 300 = 735 \text{ metros}$$

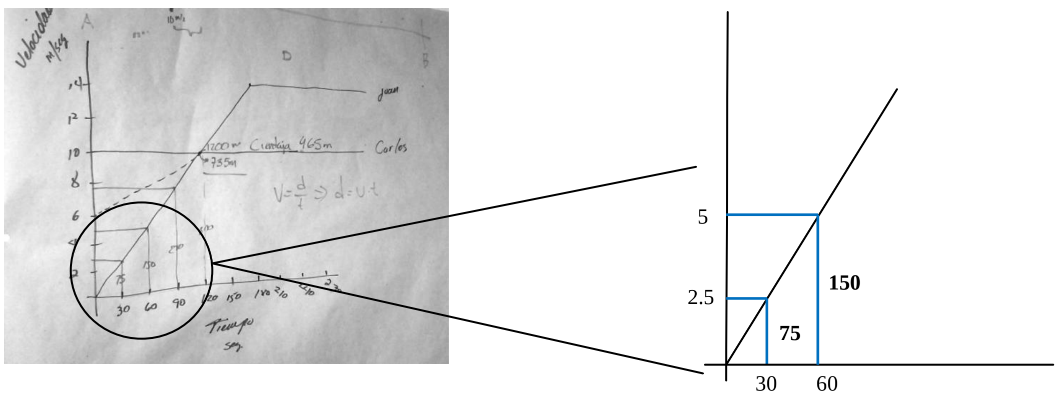


Figura 5. Acumulando distancias

Ya tienen el dato de la distancia recorrida por ambos ciclistas, así que la ventaja que le lleva Carlos es Juan es de 465 metros en el instante t = 120:

$$1200 - 735 = 465 \text{ metros de ventaja}$$

Las gráficas funcionan como un medio que sí les permite aplicar una fórmula conocida (d = v/t). Sin embargo, dado que la velocidad de Carlos va cambiando, la forma de ver globalmente a la línea inclinada se transforma, para ver ahora secciones. Hay un argumento de acumulación, a través de una suma de distancias recorridas, que la gráfica es capaz de sostener y desarrollar.

Para analizar la última pregunta, mostramos la respuesta (figura 6) del equipo B. Este equipo desarrolló el argumento de las distancias recorridas como áreas bajo las rectas. Inicialmente se habían dado cuenta que para el caso de Carlos (recta horizontal), la multiplicación de 128 por 10 les daba la distancia recorrida. Esa operación resultó coherente cuando vieron el recorrido como el área de un cuadrado (ver en la figura 6 el cuadro en el que se habían dibujado diagonales y después las borraron). Esta forma de verlo, les permitió entonces señalar (ver cómo está remarcado en la figura 6) un triángulo rectángulo para hallar la distancia recorrida por Juan.

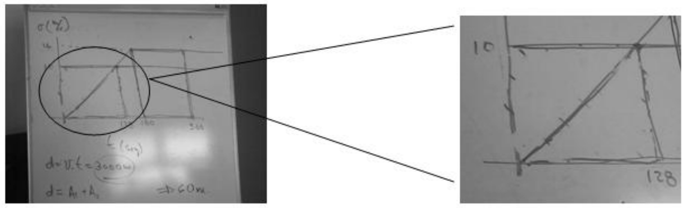


Figura 6. El área como un cuadrado y un triángulo

Posteriormente, decidieron que alrededor de t = 300 (no hay evidencia de cómo seleccionaron ese punto), las distancias recorridas por ambos ciclistas son similares. Entonces, la última pregunta sobre la distancia recorrida se transforma en una suma de áreas (figura 7).

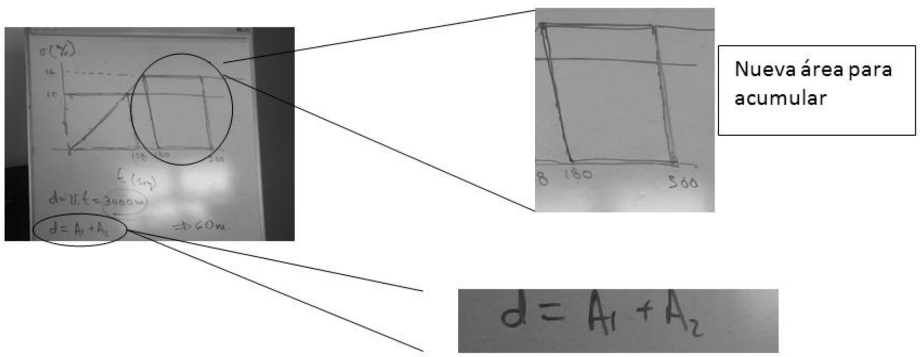


Figura 7. Distancia recorrida como suma de áreas

En esta respuesta, las gráficas están funcionando a través de secciones que conformarán áreas significativas: primero en el punto de cruce y luego hasta el otro punto requerido. Estas áreas se acumularán, resignificando la distancia total recorrida. Así, usar las gráficas de esta manera permite generar un argumento y sostenerlo desde un primer momento para comparar las distancias en el primer cruce (en t = 128) hasta aquél para hallar la distancia total recorrida.

Comentarios Finales

Con los datos obtenidos hasta ahora podemos evidenciar de qué manera las gráficas están relacionadas con la construcción de conocimiento matemático y cómo, a través de ellas, se puede justificar dicha construcción. Es importante hacer notar que el papel de las gráficas no pretende sustituir o ser equivalente con algún procedimiento algebraico. Por ejemplo, respecto a la relación entre el número de condiciones iniciales y el orden de una ecuación diferencial, se pueden plantear argumentos de corte físico o analítico e incluso discutir las demostraciones relativas al teorema de unicidad. Por otra parte, el argumento gráfico que aquí discutimos pretende evidenciar cómo las gráficas también dotan de significados a aquel saber matemático que intentamos desarrollar a través de usos particulares que la situación pone en juego. Para el caso del problema de la memorización sin duda son las tareas relativas a análisis cualitativos de las ecuaciones diferenciales las que favorecen un cierto uso de las gráficas y es a través de esos funcionamientos y formas particulares, que el saber matemático se puede resignificar.

Con relación a las gráficas seccionadas, un tema de matemáticas tradicionalmente complicado, los profesores están construyendo un argumento para extraer información relativa a la distancia y las gráficas están siendo capaces de sostener este argumento y hacerlo avanzar hacia la obtención de las respuestas solicitadas. Ese es el sentido epistemológico de las gráficas que queremos evidenciar. Estamos entonces frente a una matemática que se resignifica cuando las gráficas se perciben como herramientas capaces de sostener y desarrollar una argumentación y no sólo como un objeto más que el alumno debiera lograr obtener.

Referencias Bibliográficas

Blanchard, P.,Devaney, R.,Hall, G. (1999). *Ecuaciones diferenciales.* México: Thomson Editores SA de CV.

Buendía, G. (2010). El uso de las gráficas para resignificar elementos de las ecuaciones diferenciales lineales. Enviado para su publicación *Memorias de la XIII Escuela de Invierno* en Matemática Educativa.

Buendía, G. y García, C. (2002). Un análisis del significado de las condiciones iniciales de las ecuaciones diferenciales. En C. Crespo (ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Volumen 15, pp. 108-113). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R. Farfán, RM., Montiel, G., Lezama, J., Cabañas, G., Castañeda, A., Martínez-Sierra, G. y Ferrari, M. (2008) Matemáticas. Tercer grado. México: McGraw-Hill

Carrasco, E. (2010). *Lo social en ambientes gráficos*. Presentación en el Grupo Matemática Educativa en el Nivel Superior (Mens). Pontificia Universidad Católica de Valparaiso.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama, A. Romo (eds.) *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano*. (pp. 285-309) México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C. y Díaz de Santos S.A.

Cordero, F., Cen, C. y Suárez, L. (2010). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el Bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(2), 187-214