OTRAS DEDUCCIONES DEL TEOREMA DE PITÁGORAS A LO LARGO DE LA HISTORIA DE LA MATEMÁTICA, COMO RECURSO DIDACTICO EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

Julio C. Barreto G
Universidad Nacional Abierta. Centro Local Yaracuy. Área de Matemática.
Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado". Departamento de Matemáticas.
juliocbarretog@hotmail.com
Pensamiento Geométrico. Noveno Grado.

RESUMEN

Se propone expresar de manera deductiva otras explicaciones en torno al Teorema de Pitágoras tomando en consideración la idea de área, las cuales tratándolas desde un punto de vista didáctico pueden ayudarnos en el proceso de enseñanza que realmente necesitan nuestros participantes en estos tiempos donde debemos ir acorde con los cambios que el sistema educativo nos impone. Pasaremos de un caso particular en el cual los lados del triángulo rectángulo tienen cuadrados, a un caso un poco general en el cual sean triángulos equiláteros. Esto lo podemos lograr a través de un redescubrimiento de conceptos tan primitivos como lo son la cuadratura de rectángulos y triángulos, pero eso si teniendo en cuenta que debemos darle un protagonismo a partir de la reconstrucción conjunta de la teoría, de tal manera que no se mecanicen las reglas sino que mas bien se logre aumentar y relacionar los conceptos adquiridos previamente para lograr una mejor comprensión del tema. Esto sugiere una inversión en la forma de enseñar tradicionalmente los contenidos matemáticos, que primero coloca los contenidos y después los problemas, considerando que el aprendizaje de los contenidos es prerrequisito para la solución de los problemas. Usaremos el enfoque histórico y una interrelación del álgebra con la geometría como una propuesta metodológica, ya que por medio de ella el estudiante descubrirá como generar los conceptos a través de métodos que aprenderá en clase.

Palabras clave: Área, Productos notables, Teorema de Pitágoras, Cuadratura, Media Geométrica.

INTRODUCCIÓN

El desarrollo de los procesos cognitivos en el campo de la Didáctica de la Matemática es capaz de ayudar a nuestros estudiantes en la resolución de problemas de geometría, los cuales se deben realizar coordinando la caracterización propuesta por Duval (1998) y desarrollados por Torregrosa y Quesada (2007) en la ultima referencia, en donde el proceso cognitivo de *visualización* está íntimamente relacionado con la forma geométrica de la figura, es decir, su configuración y el *razonamiento* se basa en aplicar las afirmaciones matemáticas que les corresponda algebraicamente.

La coordinación de estos procesos cognitivos les permitirá construir una teoría que generalizara un poco el Teorema de Pitágoras, tomando en consideración los triángulos equiláteros que se coloque sobre los lados de un triángulo rectángulo cualquiera, tomando en consideración la idea de área, esto es, si A y B son las áreas de los triángulos equiláteros construidos sobre las longitudes de los catetos del triángulo rectángulo y C es el área del triángulo equilátero construido sobre la longitud de la hipotenusa, entonces se debe cumplir que $A + B = C$.

Relevancia

En la Historia de la Matemática, se le atribuye a Bhaskara una demostración del Teorema de Pitágoras en el siglo XII en donde asoció la formula $a^2 + b^2 = c^2$ con el área de los cuadrados que estaban sobre los lados de un triángulo rectángulo (a y b sobre las longitudes de los catetos y c sobre la longitud de la hipotenusa) y operando con los cuadrados que estaban sobre las longitudes de los catetos logró formar el cuadrado que está sobre la longitud de la hipotenusa.

Ahora, durante mucho tiempo, tomando en consideración la idea de área se ha pensado en la posibilidad de construir figuras geométricas sobre los lados del triángulo rectángulo que cumplan esta relación y operando con los triángulos rectángulos nos damos cuenta que efectivamente se cumple.

Esta nueva forma de ver el Teorema de Pitágoras, diferente a la de Bhaskara, permitirá a nuestros estudiantes divertirse operando con figuras geométricas junto a sus compañeros fomentando la unión grupal y les servirá para ir conociendo un poco lo que en Matemática significa el concepto de generalización, no solo por el hecho de no ser ya cuadrados, sino por que aprenderá a cuadrar (transformar las triángulos equiláteros en cuadrados) los triángulos y a partir de allí podemos aplicárselos a cualquier polígono por aplicaciones repetidas dividiéndolos en triángulos.

Referentes teóricos

El campo de la Didáctica de la Matemática ha tomado un auge en los últimos años, debido al estudio que ella ha realizado en relación a los procesos cognitivos que deben desarrollar nuestros estudiantes al resolver los problemas de geometría en los cuales estén envueltos.

En este artículo usaremos el modelo propuesto por Duval, en el cual se restringe un poco el concepto de *visualización* al de *aprehensión*, en el cual "concebimos las especies de las cosas sin hacer juicio de ellas o sin negar o afirmar", según el Diccionario de la Real Academia Española (2001).

En estas aprehensiones, nos desplazaremos de una que empieza cuando el estudiante ve intuitivamente el Teorema de Pitágoras y la cual es llamada *aprehensión perceptiva* e iremos hacia una que conlleva a modificar la configuración inicial y es llamada *aprehensión operativa*, esto nos llevará a un *razonamiento configural* de un *anclaje visual* (ver los triángulos equiláteros) a un *anclaje discursivo* (teórico: usar cuadraturas).

Otras explicaciones del Teorema de Pitágoras

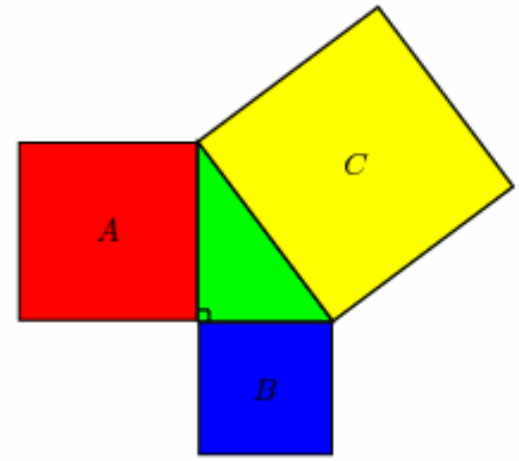
1) Cuadrando Figuras Poligonales

"Si un fenómeno admite una explicación, admitirá también cierto número de explicaciones, todas tan capaces como la primera de elucidar la naturaleza del fenómeno en cuestión."

Henry Poincaré. Matemático Francés (1854-1912).

Motivación:

El Teorema de Pitágoras dice que las áreas *A, B y C* de los cuadrados que se forman en las longitudes de un triángulo rectángulo como el de la figura:



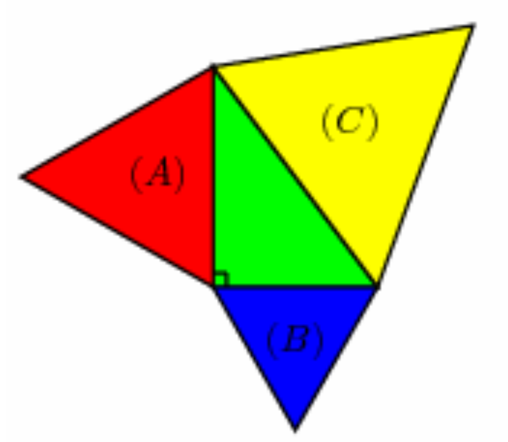
Satisface que: $A + B = C$.

Veamos las siguientes pre-generalización:

Aceptando la versión usual del Teorema de Pitágoras, demostrar que:

Teorema: En un triángulo rectángulo, el área del triángulo equilátero construido sobre la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los triángulos equiláteros construidos sobre las longitudes de los catetos.

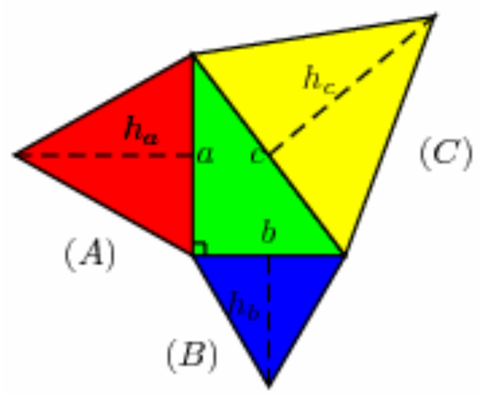
Geométricamente:



Satisface que: $(A) + (B) = (C)$.

Prueba: Una ilustración de la proposición a demostrar es la siguiente:

Sea:



Donde ABC es un triángulo rectángulo de hipotenusa c y catetos a,b.

Además, h_a, h_b y h_c son las alturas correspondientes a los lados a, b y c respectivamente.

Luego, pasando de este anclaje visual a uno discursivo donde tenemos que si (A), (B) y (C) representan las áreas de los triángulos equiláteros construidos sobre los lados del triángulo rectángulo ABC, entonces aplicando la versión usual del Teorema de Pitágoras demostrada anteriormente tenemos que:

$$(B) = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}b\sqrt{b^2 - \frac{1}{4}b^2} = \frac{1}{4}\sqrt{3}b^2.$$

Análogamente,

$$(A) = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}a\sqrt{a^2 - \frac{1}{4}a^2} = \frac{1}{4}\sqrt{3}a^2.$$

Y también ocurre que,

$$(C) = \frac{1}{2}ch_c = \frac{1}{2}c\sqrt{c^2 - \frac{1}{4}c^2} = \frac{1}{4}\sqrt{3}c^2.$$

Así,

$$(A)+(B) = \frac{1}{4}\sqrt{3}a^2 + \frac{1}{4}\sqrt{3}b^2 = \frac{1}{4}\sqrt{3}(a^2+b^2) = \frac{1}{4}\sqrt{3}c^2 = (C).$$

Por tanto,

Área de (A)+Área de (B)=Área de (C).

Vamos a usar las dos siguientes formas a través de cuadraturas, esto no es más que conseguir el área de una figura la cual equivale a compararla con otra figura.

El cuadrado, es la figura rectilínea perfecta por excelencia, y se impuso desde el principio como el principal patrón de comparación, de allí que la palabra "cuadratura" fuera utilizada como una forma de referirse a lo que hoy denominamos cálculo del área, según nos cuenta Jiménez (2004).

Hagámoslo construyendo con regla y compás, ya que tiene un significado “sui generis”, puesto que esto fue lo que hicieron los propios griegos, según nos cuenta el mismo Jiménez (2004).

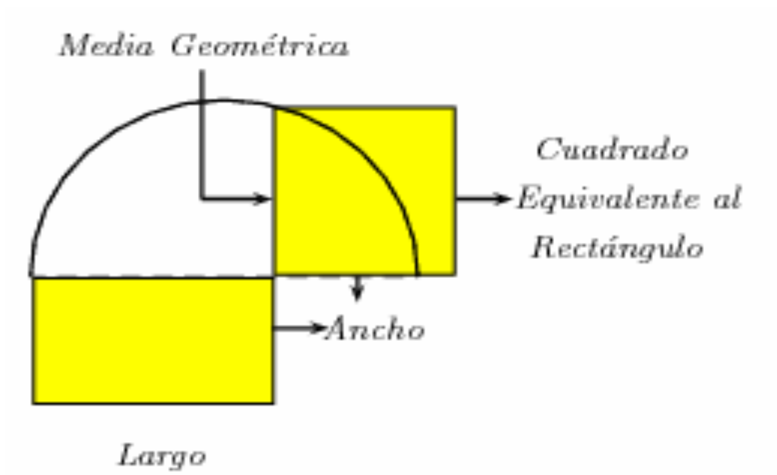
2) Usando la Cuadratura del Rectángulo

Este problema es el más sencillo de plantear ya que consiste en encontrar un cuadrado equivalente a un rectángulo dado.

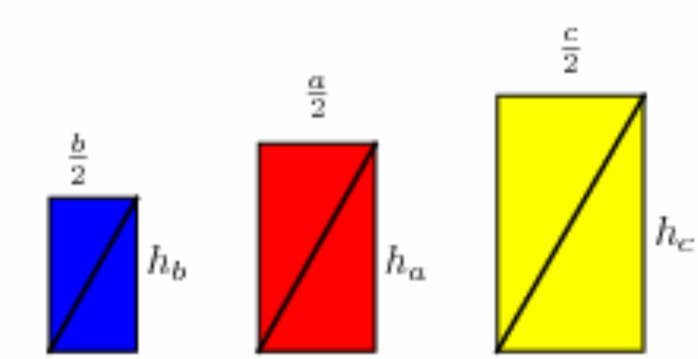
La solución de este problema está en la Proposición 13 del Sexto Libro de los Elementos, en la que se muestra como construir un segmento que sea media geométrica entre otros dos.

La construcción en cuestión la haremos haciendo una circunferencia cuyo diámetro es la suma de los lados del rectángulo y en el punto de enlace de ambas longitudes dibujamos una perpendicular al diámetro hasta la circunferencia: el segmento así generado es el lado del cuadrado buscado.

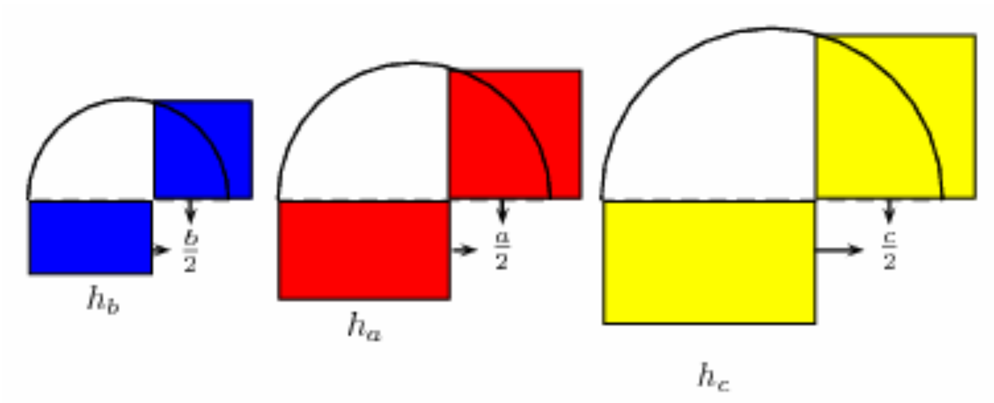
Veamos la siguiente figura:



Así, formemos unos rectángulos dividiendo a través de la altura los Triángulos Equiláteros, es decir,

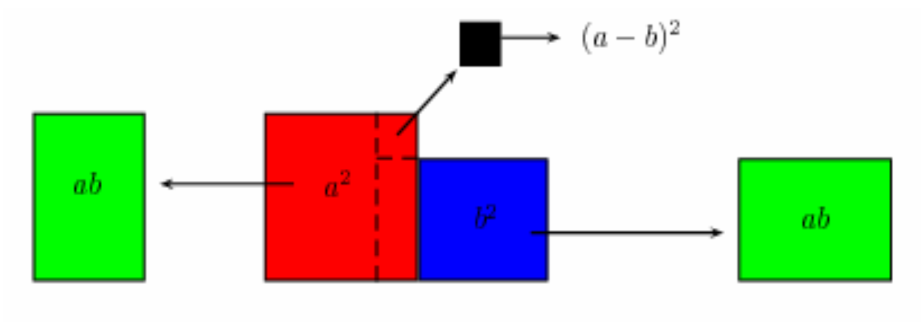


Luego, busquemos el cuadrado que se equivalente a estos rectángulos, usando la afirmación anterior. El razonamiento teórico nos dice que lo podemos hacer a través de la cuadratura del rectángulo:

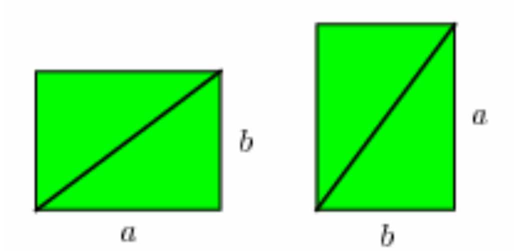


Ahora solo basta ver que el área del cuadrado amarillo es igual a la suma del área del cuadrado rojo más el área del cuadrado azul. Esto lo hacemos por medio del procedimiento realizado en *Perspectiva Histórica del Teorema de Pitágoras como Recurso Didáctico en el proceso de Enseñanza-Aprendizaje de la Matemática* (Taller); es decir, notemos que $a^2 + b^2$ se forma con los dos rectángulos que se le han quitado al cuadrado de lado $(a+b)$ los cuales tienen de largo a y ancho b y sumándole un cuadrado de lado $(a - b)$.

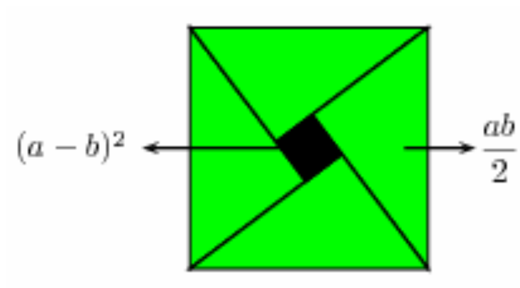
Es decir, aplicando una *aprehensión operativa de cambio figural* tenemos:



Los dos Rectángulos se pueden convertir en cuatro triángulos rectángulos de longitud en la base b y longitud de altura a, es decir,



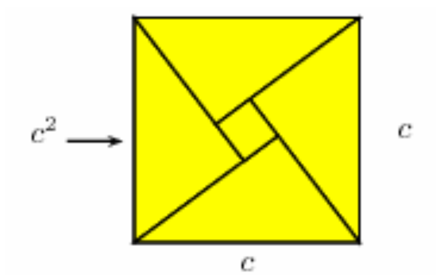
De aquí que, tomando $2ab = 4\left(\frac{ab}{2}\right)$, es decir 4 triángulos rectángulos más un cuadrado de lado $(a - b)$ obtenemos la siguiente figura:



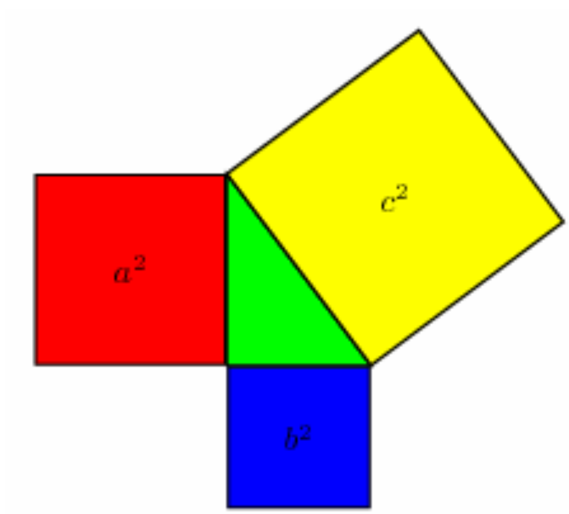
Es decir, tenemos que:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Y este también es un cuadrado de lado c. Esto es:



Y además, esa es la longitud del triángulo rectángulo que tiene en la hipotenusa longitud igual a c, así nos queda:



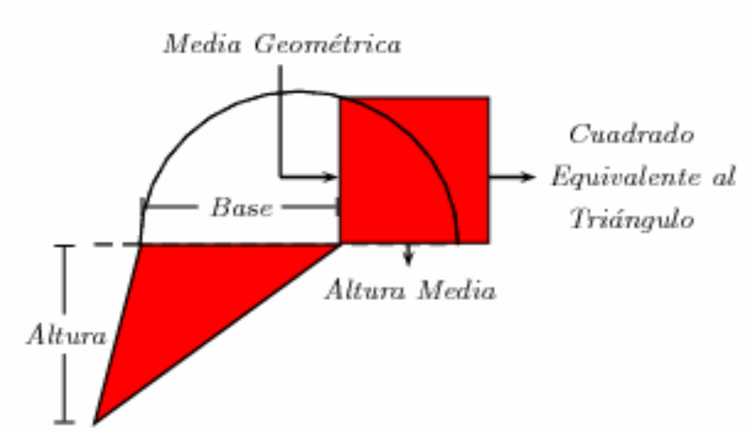
Luego podemos efectivamente formar el cuadrado de lado c, el cual es el cuadrado que formamos a través de la cuadratura de su rectángulo.

Así tenemos que equivalentemente se cumple que:

Área de (A)+Área de (B)=Área de (C).

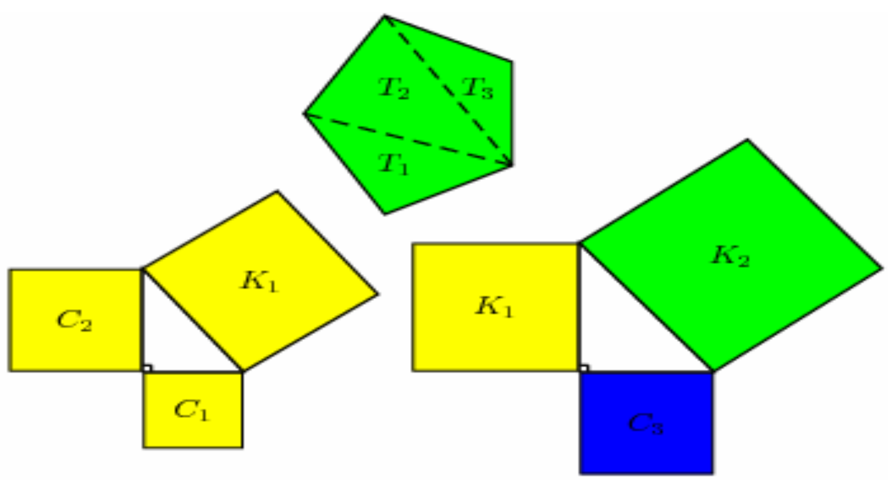
3) Usando la Cuadratura del Triángulo

La cuadratura de un triángulo, por su parte, se sustenta en la Proposición 10 del Primer Libro de los Elementos, es decir, dividir en dos partes iguales una recta finita dada y en la cuadratura anterior, pues bastaría prolongar la base del triángulo en la mitad de la altura del triángulo y tomar la media geométrica de estas dos cantidades como el lado del cuadrado buscado.



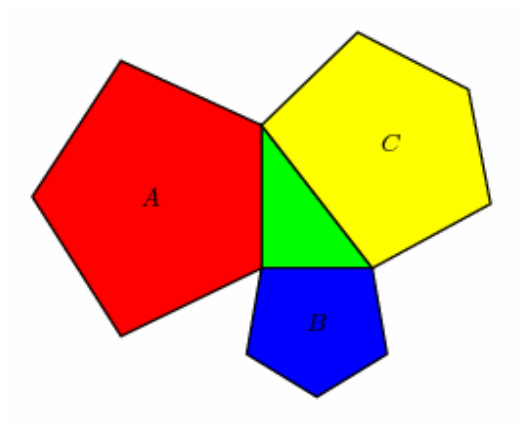
Luego se utiliza el procedimiento mencionado en la *cuadratura del rectángulo*, pero tomando ahora la base del triángulo equilátero y la mitad de la altura para cada uno de los triángulos.

Con estas herramientas a la mano es sencillo cuadrar cualquier polígono por triangulación y aplicaciones repetidas del Teorema de Pitágoras (Proposición 47 del Primer Libro de los Elementos). Así, el polígono de la figura de abajo se descompone en los triángulos T_1, T_2 y T_3 cuyas cuadraturas producen los cuadrados C_1, C_2 y C_3 de lados c_1, c_2 y c_3, respectivamente.



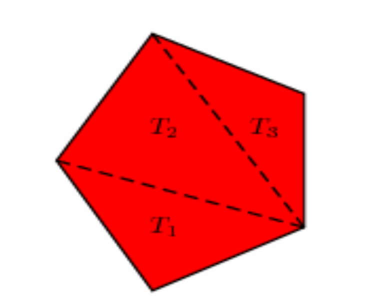
Una aplicación del Teorema de Pitágoras nos da un cuadrado K_1 de área $c_1^2 + c_2^2$ y la siguiente el cuadrado K_2 de área $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2$ según la figura.

Así podemos aplicar todo lo anterior a cualquier polígono que este en los lados del triángulo rectángulo, como por ejemplo un heptágono como los de la figura siguiente:



Se cumple que: $A+B = C$.

Tomando uno de los heptágonos como el de la figura de abajo:



Este polígono de la figura de arriba se puede descomponer en los triángulos T_1, T_2 y T_3 cuyas cuadraturas producen los cuadrados C_1, C_2 y C_3 de lados c_1, c_2 y c_3, respectivamente y nuevamente una aplicación del teorema de Pitágoras nos da un cuadrado K_1 de área $c_1^2 + c_2^2$ y la siguiente el cuadrado K_2 de área $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2$.

Al Margen: la construcción de los triángulos rectángulos exigidos se sustenta en las proposiciones 2 y 11 del primer libro de los Elementos. La primera permite construir segmentos de cualquier tamaño y la segunda, ángulos rectos en puntos dados de un segmento.

“Las matemáticas son la única ciencia en la que siempre se sabe exactamente de que se habla y en la que se está seguro de que cuanto se dice es verdadero”

Emilé Borel (1871-1956). Matemático Francés.

Interpretaciones y Conclusiones

En el estudio de está generalización del Teorema de Pitágoras, nuestros estudiantes aprenderán a cuadrar triángulos equiláteros con regla y compás (tal y como lo hacían los propios griegos según está escrito en la historia de la Matemática) aplicando la teoría dada en la Proposición13 del Sexto Libro (Cuadratura de un Rectángulo) y en la Proposición 10 del Primer Libro (Cuadratura de un Triángulo) de los Elementos de Euclides.

Con estas herramientas dadas en forma geométrica se espera también que nuestros estudiantes aprendan a cuadrar cualquier Polígono por Triangulación (dividiendo el Polígono en Triángulos) y aplicaciones repetidas del Teorema de Pitágoras (usando los cuadrados que se formen de las cuadraturas) el cual es la Proposición 47 del Primer Libro de los Elementos de Euclides, viendo estos desde un punto de vista geométrico ya que allí aparecen como una operación meramente Aritmética, y permite hacer muchos cálculos con ellos desde ese punto de vista.

REFERENCIAS

De Cuadros, M., Hoffman, V., Klaus, I., Olivieira, C. (1999). *Álgebra con Geometría: Un enfoque práctico na 7ª serie do ensino fundamental*. Brasil.

Durán, D. (2004). *Geometría Euclideana*. V Talleres de Formación Matemática. Maracaibo, Venezuela: Asociación Matemática Venezolana.

Jiménez, D. (2004). *p la letra griega que los griegos no usaron*. Venezuela: Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 9 (1), 103-117.

Mora, D. (2002). *Didáctica de las matemáticas en la educación venezolana*. Caracas: Ediciones Biblioteca-EBUC.

Olivieira, C. (2002). *Equação do segundo grau pela volta ao quadrado perfeito*. Comunicación presentada en el IV Simposio de Educación Matemática. Universidad Luterana Do Brasil.

Olivieira, C. (2004). *A história como recurso didáctico no processo de ensino e aprendizaje da matemática*. Comunicación presentada en el V Congreso Venezolano de Educación Matemática. UPEL-IPB.

Torregrosa, G. y Quesada, H. (2007). Coordinación de los Procesos Cognitivos en Geometría. *Relime*, 10 (2), 273-300. México: Publicación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.