# UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA, TRES ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS CON REGLA Y COMPÁS PARA SU SOLUCIÓN

Reinaldo Cadenas
Universidad de los Andes -Venezuela
rcadena@ula.ve

Pensamiento Algebraico. Medio. Teórico / Filosófico.

## RESUMEN

En el presente trabajo, presentamos el estudio de tipo documental de una ecuación cuadrática concreta a través de tres enfoques didácticos-históricos, utilizando la regla y el compás: el primero, planteado por el matemático inglés Thomas Carlyle, tomando como base los conocimientos elementales de la Geometría Plana (distancia entre puntos, punto medio y ecuación de la circunferencia). El segundo, dado por el matemático alemán Von Staudt, tomando en consideración los conceptos de circunferencia, la recta y las proyecciones. El tercero, el del matemático francés René Descartes, basado sobre las ideas geométricas que tienen sus fundamentos en el teorema de Pitágoras, la recta y las construcciones de circunferencias. Estos tres estudios históricos nos permiten abordar situaciones distintas en el aula de matemática en el momento de enseñar la ecuación cuadrática, pues la tradicional es escribir el algoritmo que da la solución a dicha ecuación sin indicar de donde surge y mucho menos presentar alguna motivación previa para abordar la solución. Además, rescatamos el contexto geométrico que fundamentó el estudio original de las ecuaciones cuadráticas, así, como también las construcciones con regla y compás instrumentos muy poco utilizados en el aula.

**Palabras Clave:** Ecuación cuadrática, áreas y Geometría Plana.

## Introducción

Siglos antes de resolver por radicales (esto significa, que podemos hallar mediante una fórmula dada con las operaciones básicas de suma, multiplicación y radicación la solución general) la ecuación cuadrática, las antiguas civilizaciones de Egipto y Babilonia dieron soluciones, utilizando un método geométrico interpretando los términos como áreas, y distinguiendo varios casos pues no se conocían los números negativos (y menos, aún, áreas negativas) dando origen a las primeras nociones del Álgebra. Los antiguos Babilónicos resolvían cualquier ecuación cuadrática empleando esencialmente los mismos métodos que hoy se enseñan.

Se dice que un escriba Babilónico propuso un problema que conduce a una ecuación de segundo grado, hace aproximadamente unos 4000 años. El problema fue encontrado en una placa de arcilla y decía: "Cuál es el lado de un cuadrado, si el área más el doble del lado es ocho". Es de rescatar, que desde la antigüedad existe una relación indisoluble entre el Álgebra y la Geometría. Con la simbología actual el problema se reduce a resolver la ecuación cuadrática: $x^2 + 2x = 8$ ó $x^2+2x-8 = 0$.

Nosotros usamos tres métodos didácticos para hallar la solución de la ecuación planteada anteriormente en las cuales se utiliza la regla y el compás: primero, el planteado por el matemático inglés Thomas Carlyle, segundo, el dado por el matemático alemán Von Staudt y tercero, el desarrollado por el matemático francés René Descartes. La idea de esos desarrollos es motivar el planteamiento previo que debemos diseñar antes de deducir con el método axiomático la clásica fórmula que nos da la solución de cualquier ecuación cuadrática: $ax^2+bx+c=0$ , como $a$?0 podemos asumir que la ecuación cuadrática general tiene la forma:

$$x^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$

## El método de Carlyle

El método de Carlyle que desarrollaremos aparece en Pérez, Palacios y Villamizar (1995, p. 21), con las adaptaciones a nuestro ejemplo y hallando de esta manera las soluciones de la ecuación $x^2+2x-8=0$.

*Thomas Carlyle* (1795-1881) matemático inglés, descubrió una solución geométrica de la ecuación de segundo grado, tomando como base los conocimientos elementales de la Geometría Plana (distancia entre puntos, punto medio y ecuación de la circunferencia) y construcciones con regla y compás.

Consideremos la ecuación

$$x^2 + 2x - 8 = 0 \qquad (2)$$

del problema inicial, tomemos los puntos $P_1$ (0,1) y $P_2$ (-2,-8) (estos puntos, así tomados para la ecuación cuadrática general (1) los representaríamos como: $P_1\left(0, \frac{b}{2}\right)$ y $P_2(-b, c)$) y hallemos la ecuación de la circunferencia que pase por los puntos $P_1$ y $P_2$, y con centro en el punto medio entre $P_1$ y $P_2$ como se muestra en la figura 1.

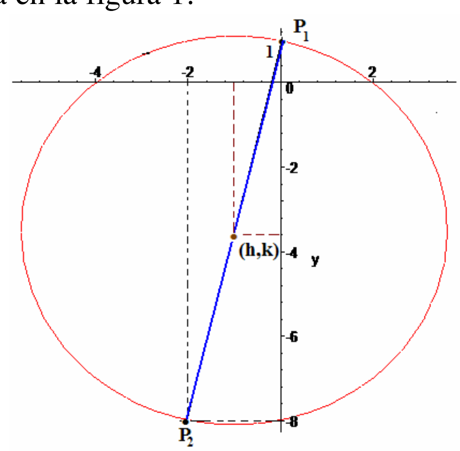


Figura 1: El Método de Carlyle

Gráficamente usando la regla y el compás vemos que la circunferencia descrita anteriormente corta al eje x en 2 y -4, que son las soluciones de la ecuación (2).

*Observación 1*. Un buen ejerccio al lector consiste en hacer la justificación analítica del método de Carlyle aplicado a la ecuación (2).

*Observación 2.* Desde el punto de vista didáctico abordar el estudio de la ecuación cuadrática con el método de Carlyle utilizando regla y compás, es aplicar y rescatar una estrategia didáctica un poco olvidada en los últimos tiempos.

*Observación 3*. Pueden darse ecuaciones donde la circunferencia corta al eje "x" en dos puntos como es el caso de la ecuación (2) que tiene dos soluciones reales diferentes. Si la circunferencia corta al eje "x" en un punto (es decir, la circunferencia es tangente a la recta de ecuación *y=0*) entonces la ecuación (2) tiene una solución real múltiple. Y por ultimo, si la circunferencia no corta al eje "x", entonces la ecuación (2) no tiene soluciones reales.

## El Método de Von Staudt

*Karl Von Staudt* (1798-1867). Matemático alemán, dio valiosos aportes a la geometría descriptiva y presentó una interesante propuesta geométrica y didáctica (usando regla y compás) para resolver la ecuación cuadrática. El método lo desarrollaremos con la ecuación (2).

Veamos la ecuación (2), $x^2+2x-8 = 0$. Consideremos los puntos $A\left(-\frac{-8}{2},0\right)$ y $B\left(-\frac{4}{2},2\right)$(en términos de la ecuación general cuadrática serían $A\left(-\frac{c}{b},0\right)$ y $B\left(-\frac{4}{b},2\right)$). Es decir, A (4,0) y B (-2,2). Ahora,

1. Trazamos la circunferencia de centro C(0,1) y radio 1, como se muestra en la figura 2.
2. Dibujamos la recta que pasa por los puntos A y B, y en este caso la recta corta a la circunferencia en dos puntos digamos S y R.
3. Ahora, hallamos las proyecciones desde el punto P (0,2) sobre el eje x, de los puntos de corte R y S. estas proyecciones nos dan x = -4 y x = 2, siendo éstas las soluciones de la ecuación (2).

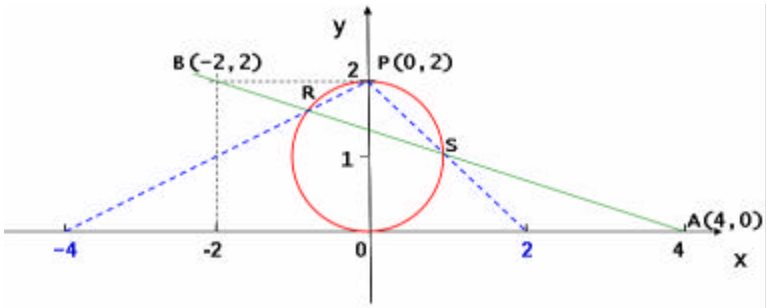


Figura 2: El método de Von Staudt.

*Observación 4*. Hacemos la misma propuesta al lector dada en la observación 1, pero ahora, aplicando el método de Von Staudt.

Observación 5. Puede ocurrir que la recta que pasa por los puntos A y B solo corte a la circunferencia en un punto en este caso la ecuación tiene una solución real múltiple. Y también puede ocurrir que la recta que pasa por los puntos A y B no corte a la circunferencia, en este caso las soluciones de la ecuación cuadrática son complejas.

## El Método de René Descartes

*René Descartes* (1596 - 1650), nació en Francia y su obra maestra *La Geometría* fue publicada en 1637, que junto con los ensayos Introducción a los Lugares Planos y Sólidos constituyen los fundamentos de la Geometría Analítica (fusión entre la Geometría y el Álgebra), de profundo impacto en el desarrollo de la matemática de los próximos siglos, incluyendo su influencia en Isaac Newton, Descartes proveyó a la Matemática de la herramienta básica para el desarrollo del Cálculo Diferencial e Integral, una de sus ramas más poderosas.

Las ideas geométricas propuestas por Descartes para resolver ecuaciones de segundo grado tienen sus fundamentos en el teorema de Pitágoras, y construcciones de circunferencias, que pueden presentarse usando regla y compás como herramientas didácticas.

De nuevo consideremos la ecuación (2), $x^2+2x-8=0$. Construyamos un triángulo rectángulo de catetos 1 y $\sqrt{8}$ (en la ecuación general cuadrática sería, $b/2$ y $\sqrt{-c}$), como se muestra en la figura 3.

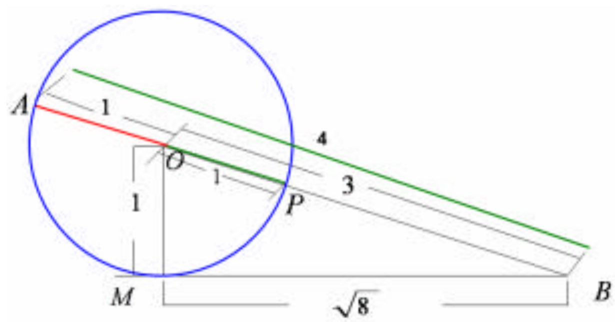


Figura 3: Método de Descartes.

Por el teorema de Pitágoras la hipotenusa (OB) mide 3. Ahora, prolonguemos el segmento OB hasta el punto A tal que la longitud del segmento OA sea 1. A continuación construimos una circunferencia de centro O y radio OA que corta la hipotenusa del triángulo en el punto P. En consecuencia, tenemos que la longitud del segmento OP es 1, y por lo tanto, el segmento PB tiene longitud 2, siendo ésta una de las soluciones de la ecuación (2). La otra solución viene dada por el valor negativo de la longitud del segmento AB, es decir, -4.

*Observación **6.*** Hacemos la misma propuesta al lector dada en la observación 1, pero ahora, aplicando el método de René Descartes.

*Observación 7*. Hemos aplicado los tres métodos a un caso particular, haciendo algunas consideraciones sobre los signos de *b y c,* podemos aplicar los tres métodos para hallar la solución general de la ecuación cuadrática, que puede ser aplicado en el aula para hallar la solución general de (1)

## REFERENCIAS

Mevilla, V.A. (2006). *Álgebra Geométrica: notas históricas*. [Disponible en: http://www.divulgamat.net/weborriak/Historia/Topicos/AlgebraGeometrica/AlgebraGeometrica1.asp]. [Consulta, 2007, marzo 15].

Pérez, E., Palacios, E. y Villamizar, A. (1995). *Enciclopedia Matemática Mega*. Santafé de Bogotá, D.C., Colombia: Terranova editores.