

## ESTUDIO DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS Y SUS INVERSAS EN UN AMBIENTE DE GEOMETRÍA DINÁMICA. UNA PROPUESTA DIDÁCTICA.

Rolando García, Fabiola Czwienczek, Martha Iglesias

Universidad Pedagógica Experimental Libertador – Instituto Pedagógico de Maracay

[rantonioh@yahoo.es](mailto:rantonioh@yahoo.es); [mmiglesias@cantv.net](mailto:mmiglesias@cantv.net)

Gráfica y Funciones. Superior. Estudio de Caso.

### RESUMEN

En los cursos iniciales del componente de formación especializada de la especialidad de Matemática de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Maracay (UPEL Maracay), los participantes confrontan ciertas dificultades para la comprensión del concepto de función y el estudio de las propiedades de las funciones trigonométricas y sus inversas, posiblemente debido a que – a nivel de bachillerato – solamente se estudian las razones trigonométricas de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo (aspectos métricos) y, luego, a nivel superior, se hace énfasis en el tratamiento analítico de las funciones trigonométricas, obviando el contexto geométrico. En este sentido, con el propósito de facilitar el estudio de las funciones trigonométricas, se ha elaborado una propuesta didáctica basada en los sistemas de representación de las funciones, la historia de la Matemática y el uso de un software de Geometría Dinámica como el Cabri Geometry II Plus, el cual facilita la graficación de las funciones trigonométricas y sus inversas y el estudio de ciertas propiedades como dominio, rango, periodicidad, paridad, etc. Dicha propuesta se materializó mediante un taller, el cual contempló un conjunto de actividades organizadas atendiendo a las fases de aprendizaje propuestas en el Modelo de Van Hiele, los cuales procuraban desarrollar ciertas habilidades geométricas asociadas a los niveles de razonamiento geométrico. Dicho taller fue puesto en práctica – con carácter exploratorio – en el curso de Resolución de Problemas Geométricos asistido por Computadora (curso optativo de integración) durante el período 2006 – I. Para el análisis de los resultados obtenidos en la ejecución del taller, se organizó la información recabada en tres matrices: la matriz de datos (MD), la matriz de aspectos técnicos (MAT) y la última la matriz de preguntas y respuestas (MPR). A través de las producciones de los participantes en el taller se evidencian estrategias visuales, verbales, de dibujo y lógicas relacionadas con los dos primeros niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele.

Palabras claves: Funciones trigonométricas, Software de Geometría Dinámica, Trigonometría.

### Introducción

El docente egresado de la especialidad de Matemática, según Berroterán y otros (1997), es un profesional de la docencia formado con el más alto nivel en los principios, teorías fundamentales y técnicas de la pedagogía, didáctica de la Matemática y de la propia disciplina”. Para ello la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL) organiza el currículo en cuatro componentes a saber: (a) *Formación General*, cuyo objetivo principal es promover actividades de aprendizaje que favorecen el desarrollo integral de la personalidad del estudiante, (b) *Formación Pedagógica*, propicia actividades de aprendizaje que destacan en los valores y la ética indispensables para el ejercicio de la profesión docente, (c) *Práctica Profesional*, eje teórico – práctico en el que se conjugan todos los conocimientos adquiridos en el resto de los componentes, y (d) *Formación Especializada*, privilegia experiencias de aprendizaje que

promueven el dominio teórico y práctico de los contenidos y la metodología propia de la disciplina, en este caso, la Matemática.

El conocimiento matemático en el Departamento de Matemática de la UPEL Maracay, se divide en cuatro grandes áreas, las cuales son: Álgebra, Análisis, Geometría y Matemática Aplicada. El trabajo que se presenta a continuación es un aporte realizado por el Becario Académico o participante del Programa de Formación de la Generación de Relevo - Profesor Rolando García - al área de Análisis.

El Programa de Formación de la Generación de Relevo se encuentra inscrito dentro del Programa de Desarrollo Profesional del Personal Académico de la UPEL, cuyo propósito es: la captación de egresados tanto de esta Universidad como de las otras Universidades que hayan obtenido altos índices de rendimiento académico, disciplina intachable y participación en actividades de docencia, investigación y extensión durante sus estudios universitarios (artículo 2 de las Normas del Programa de Formación de la Generación de Relevo).

El Becario Académico o participante del Programa de Formación de la Generación de Relevo debe al final de sus dos años de formación, entregar un informe de investigación desarrollado durante cuatro períodos académicos consecutivos como mínimo y seis períodos académicos como máximo, en el que se involucren las tres funciones principales de un docente universitario: docencia, investigación y postgrado, y extensión. Según el párrafo primero del artículo 26 de las mencionadas normas, el Proyecto o Trabajo Integral atenderá a tres dimensiones: (a) Demostración pedagógica creativa en su área de conocimiento, (b) Expresión universitaria innovadora, y (c) Acción investigativa autoformadora.

De acuerdo con el artículo 23 de tales normas, las actividades docentes se llevarán a cabo en el área de conocimiento objeto del concurso, y constará de las siguientes etapas: observador activo en el primer período académico, cofacilitador en el segundo y en el resto de los períodos académicos facilitador. En este orden de ideas, en el período académico 2005 – II el becario académico cumplió la etapa de observador activo en los siguientes cursos del área de Análisis: Cálculo Integral, Cálculo Vectorial e Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Luego en el período académico 2006 – I cofacilitó el curso optativo de integración: Resolución de Problemas Geométricos asistido por Computadora y, por último, en los períodos académicos 2006 – II y 2007 – I se administraron dos secciones de los cursos Cálculo Integral e Introducción al Cálculo respectivamente.

Según el artículo 24 de las mencionadas normas, el Becario Académico debe desarrollar actividades de extensión que contribuyan a su formación personal y profesional. En el período académico 2005 – II se elaboraron carteleras con biografías de Matemáticos, con el fin de humanizar esta ciencia. En los períodos académicos 2006 – I y 2006 – II se administró la actividad de extensión acreditable: Actividades Divulgativas en Matemática, atendiendo así a un total de 40 estudiantes de las especialidades de Matemática, Física y Educación Especial. En el período académico 2007 – I la función extensionista se concentró en la organización de dos eventos.

De acuerdo con el artículo 25 de estas normas, el Becario Académico debe desarrollar actividades de investigación relacionadas con el área de conocimiento objeto del concurso. El aporte en investigación consistió en la elaboración de un informe de investigación, el cual lleva por título: *Estudio de las Funciones Trigonométricas y sus Inversas en un Ambiente de Geometría Dinámica. Una Propuesta Didáctica.*

Este trabajo es consecuencia directa de las observaciones realizadas por el Becario Académico, durante la etapa de observador activo en el curso Cálculo Integral, dictado por la Profesora Fabiola Czwienczek en el período académico 2005 – II. Durante el desarrollo de este

curso los alumnos evidenciaron una confusión entre las Razones Trigonométricas Inversas y las Funciones Trigonométricas Inversas, para tratar de aclarar esta situación, se diseñó, durante el período académico 2006 – I, en un curso de la Maestría en Educación mención Enseñanza de la Matemática - Geometría y su Didáctica a cargo de la Profesora Martha Iglesias - una unidad didáctica basada en el uso de un Software de Geometría Dinámica, la Historia de la Geometría y la Trigonometría y los Sistemas de Representación de las Funciones, con el fin de detectar ciertas propiedades claves como: dominio, rango, crecimiento, paridad, etc., de las gráficas de este tipo de funciones reales de una variable real. Más tarde en el período académico 2006 – I en la etapa de cofacilitador se pone en práctica esta unidad didáctica en dos cursos: Resolución de Problemas Geométricos asistido por Computadora y Actividades Divulgativas en Matemática, el primero un curso optativo de integración y el segundo una actividad de extensión acreditable. La propuesta se materializa con un taller de 10 horas de duración denominado: Taller sobre el estudio de las Funciones Trigonométricas y sus Inversas. En el período académico 2006 – II se organiza y analiza la información recabada en el taller.

### **Problemática y Propósito de la Investigación**

La Trigonometría es aquella rama de la Matemática que estudia las relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo. Según Smith (1980), la Trigonometría se puede ver de tres maneras distintas: la primera como medidas presentes en un triángulo rectángulo (razones trigonométricas), segundo o tercer milenio a.C; la segunda su relación con la astronomía mediante ciertas funciones de un ángulo, a partir de Hiparco de Nicea 140 a.C y la tercera como ciencia analítica a partir del siglo XVII. En la propuesta se privilegia esta evolución histórica del conocimiento trigonométrico, con el abordaje de la Geometría presente en las Funciones Trigonométricas y sus Inversas (razones Trigonométricas presentes en un ángulo agudo en un triángulo rectángulo y el círculo trigonométrico) en primer lugar y, luego, los conocimientos analíticos propios de este tópico Matemático.

La Geometría es la rama de la Matemática que estudia las propiedades y medidas de las figuras del plano y de los cuerpos en el espacio. La descripción del entorno que rodea a los seres humanos, en términos de forma y tamaño, hace que la Geometría sea la más idónea para destacar la utilidad y aplicabilidad de la Matemática en la vida cotidiana. Al respecto, Mora (2001, p. 116) afirma que la Geometría “brinda una diversidad de posibilidades en la formación general de los alumnos y sobre todo por su relación estrecha y directa con el contexto social y natural de los estudiantes”.

A pesar de que los contenidos geométricos se encuentra presente en los programas de estudio del área de Matemática, y teniendo en cuenta además todos los beneficios que le proporciona su estudio a los estudiantes, en el sistema educativo venezolano no se le da el tratamiento apropiado como lo expone Mora (2001). Una de las razones del poco o casi nulo tratamiento de la Geometría en el sistema educativo venezolano, que ha sido señalada, es el surgimiento del llamado movimiento de Matemáticas Modernas, el cual se inició en los años sesenta a nivel mundial, y propició el desplazamiento de la Geometría elemental por contenidos relacionados con el Álgebra, específicamente la teoría de conjuntos.

La Geometría es el puente de comunicación entre las demás áreas de la Matemática (Álgebra, Aritmética, Probabilidad y Estadística), ya que algunos de los tópicos matemáticos pertenecientes a estas últimas requieren de su interpretación o representación geométrica para su comunicación y posterior comprensión.

Un ejemplo lo propone Beyer (1996) para la introducción del concepto de función en la escuela primaria, a través de la noción de área de figuras como triángulo, cuadrado, rectángulo, etc. Si se considera el área de un cuadrado  $A = x^2$ , donde la variable independiente  $x$  es la longitud del lado y la variable dependiente  $A$  es el área, se puede plantear la siguiente actividad: Construir una tabla de valores colocando en la primera columna los valores de  $x$ , y en la segunda columna los correspondientes valores de  $A$  calculados a partir de la expresión  $A = x^2$ . Así como se puede relacionar un concepto tan complejo como lo es el de función con áreas de figuras geométricas, también se pueden establecer ciertos vínculos entre éste y otros tópicos matemáticos incluidos en otras áreas. Como lo afirma Beyer (1996, p. 264):

“la enseñanza del concepto de función no puede pensarse como ubicada en un punto preciso del curriculum sino que debe vérsela “diluida” dentro del curriculum de la matemática elemental ya que se concibe a tal concepto como un ente unificador del curriculum y este último no debe transmitirse parcelándolo sino integrando los conceptos unos con otros”.

Sin embargo, este tópico ha sido tratado como un punto preciso del curriculum, abordándolo, desde el octavo grado de educación básica, con el estudio de la función afín y la función polinómica y, por supuesto, la introducción del concepto de función biyectiva desligado del estudio de las transformaciones en el plano. Luego, en noveno grado, se analizan las características de la función afín y cuadrática y su representación gráfica en el plano cartesiano. Mientras que en el primer año de media diversificada, se estudian las funciones logarítmicas, exponenciales y trigonométricas, en el mejor de los casos; porque en lo que a Trigonometría se refiere se hace énfasis sólo en las razones trigonométricas de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo, específicamente en los ángulos  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  y, por último, en el segundo año se estudia las transformaciones lineales.

De todo lo anterior, se concluye que en Educación Básica y Media Diversificada las funciones en general y las funciones trigonométricas en particular reciben un tratamiento predominantemente algebraico, en donde la relación funcional es considerada una máquina o una fórmula para transformar los elementos que entran en ella atendiendo al criterio establecido, haciendo poco énfasis en la graficación de las mismas y en las propiedades que se pueden detectar al graficarlas.

Ahora se revisará el tratamiento que reciben las funciones trigonométricas en el curso Introducción al Cálculo de la especialidad Matemática de la UPEL Maracay. El curso Introducción al Cálculo es el primer curso del componente de formación especializada, el cual tiene como propósito:

“proporcionar al futuro docente un conjunto de experiencias de aprendizaje que le permitan profundizar, cognoscitiva y conceptualmente, los conocimientos matemáticos adquiridos en los niveles educativos anteriores, incrementar sus habilidades y destrezas en la utilización de técnicas, métodos y procedimientos de razonamiento deductivo, así como también iniciarse en los conceptos y principios básicos del cálculo y su aplicabilidad en otras áreas, preparando al estudiante para su desempeño exitoso en cursos posteriores”.(p.2).

El contenido de este curso se encuentra distribuido en tres unidades: la primera denominada Números Reales, la segunda Sistema de Coordenadas Cartesianas, y la última se encuentra dedicada al estudio de los tipos de Funciones Reales de una Variable Real. En el programa de este curso, por el contrario a los niveles educativos previos, se enfatiza en la graficación de las funciones e identificación de propiedades a través de estas. Sin embargo, los sistemas de

representación privilegiados por los docentes que administran este curso han sido el analítico y el algebraico, mientras que el geométrico es poco abordado, a pesar de que la gráfica de una función nos ayuda a comprenderla. Aunado a esto, para favorecer la identificación de propiedades en las gráficas de las funciones y, por ende, la mejor comprensión de las mismas es necesario seleccionar los materiales y recursos más adecuados en los cuales se apoyarán las actividades planificadas. Luengo y otros (1997, p. 109) señalan:

“Un alumno se aplicará en el proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas, por una parte, si comprende la utilidad y alcance de lo que va a estudiar, y por otra, si se le presentan actividades tan atractivas que el alumno se sienta inclinado a participar de lleno”.

Además, Gutiérrez (2005) destaca una de las ventajas principales del uso del Software de Geometría Dinámica (SGD) sobre los materiales didácticos tradicionales; la facilidad y rapidez con que el usuario, en este caso los estudiantes, pueden modificar las construcciones realizadas en la pantalla y en consecuencia disponer de un número mayor de ejemplos. El software de Geometría Dinámica Cabri Geometry II Plus (de ahora en adelante, Cabri II) permite no sólo la graficación de las funciones trigonométricas punto por punto sino también representar un trazo continuo de las mismas con la opción lugar geométrico, después de transferir algunas medidas.

Debido a que generalmente en el sistema educativo venezolano se privilegia los sistemas de representación analítico y algebraico para el estudio de las funciones trigonométricas y sus inversas y que, además, en niveles superiores se obvia el contenido geométrico presente en las funciones trigonométricas (razones trigonométricas presentes en un ángulo agudo en un triángulo rectángulo y el círculo trigonométrico), se diseñó, ejecutó y evaluó una unidad didáctica en la que se utilizó un Software de Geometría Dinámica en la graficación e identificación de propiedades geométricas de las Funciones Trigonométricas y sus Inversas para la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo.

En base a lo expuesto anteriormente surgen las siguientes interrogantes: ¿Cuáles son las herramientas técnicas empleadas por los participantes cuando construyen la gráfica de una función trigonométrica en un ambiente de Geometría Dinámica?, ¿Cuáles son las habilidades geométricas puestas en práctica por los alumnos de la Especialidad de Matemática, cuando participan en actividades didácticas diseñadas para la enseñanza y aprendizaje de las funciones trigonométricas y sus inversas?

### **Referentes Teóricos**

A continuación se describen algunos trabajos que se encuentran relacionados con esta investigación.

Gutiérrez y Jaime (1990) elaboran una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la Geometría basada en el modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele, en la que explican en qué consiste el modelo, describen los niveles de razonamiento, las fases instruccionales y algunas características como: la jerarquización y secuencialidad de los niveles, la relación estrecha entre el lenguaje y los niveles, la continuidad entre los niveles, localidad, y por último presentan una aplicación del modelo al estudio de relaciones angulares de los polígonos. Esta investigación provee además de otro ejemplo de aplicación del modelo a un tópico geométrico, las bases en las que se sustenta el mismo y el modo de distribuir un conjunto de actividades en las fases de aprendizaje.

Rodríguez (1998) realizó un estudio cuantitativo sobre la aplicación del software Derive para el impulso y mejoramiento de habilidades cognitivas relacionadas con la graficación e

identificación de funciones reales de una variable real, éste fue llevado a cabo con 29 estudiantes del II semestre del Instituto Universitario de Tecnología de Valencia (IUTV) cursantes de la asignatura Matemática II, del lapso académico 1996 – II. Este estudio posee estrechas relaciones con la presente investigación, por que proporciona una experiencia de aprendizaje apoyada en un software donde el tópico matemático abordado son las Funciones Reales de una variable real, la metodología empleada fue la investigación de campo, aunque su naturaleza es cuasiexperimental suministra algunos modos de dirigir las clases en donde el recurso principal es un software.

Por su parte, Iglesias (2000) diseñó una propuesta didáctica, la cual se materializó mediante un curso denominado: Resolución de Problemas Geométricos Asistido por Computadora (RPG\_AC), cuyo propósito es “brindar al participante la oportunidad de desarrollar habilidades para el análisis y la solución de problemas propios del proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría, mediante el diseño de modelos didácticos centrados en la resolución de problemas geométricos asistido por computadora y sustentados en teorías de la instrucción y del aprendizaje que sean pertinentes”. Además en el curso se trataron los siguientes temas: Problemática de la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría en Venezuela, Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele, Enseñanza de la Geometría centrada en la resolución de problemas, Uso efectivo de un software de Geometría Dinámica, y Diseño e implementación de modelos didácticos aplicables en la enseñanza de la Geometría. En consecuencia, este estudio contribuye a orientar correctamente la organización de las actividades en cada una de las fases sugeridas en el Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele, además proporciona información valiosa sobre la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría en Venezuela y por otra parte el uso efectivo de un software de Geometría Dinámica como el Cabri II.

Maldonado y otros (2003) diseñaron un curso apoyado en el libro *Funciones: visualización y pensamiento matemático* escrito por Cantoral y Montiel en el año 2001. Este texto se compone de secuencias didácticas sobre la noción de función en la que se privilegia la visualización y el uso de la tecnología que provee las calculadoras graficadoras. Este curso se enfocó en los efectos producidos por los sistemas de representación algebraico y analítico, en la construcción de las propiedades analíticas de las funciones trigonométricas. En el tránsito de un sistema de representación a otro se localizan y analizan las propiedades asociadas a las funciones circulares o trigonométricas, sustentadas por los objetos matemáticos triángulo, círculo trigonométrico y por supuesto ángulo.

Por otro lado, Luengo y otros (1997) sostienen que los tópicos geométricos han sido tratados durante mucho tiempo de manera trivial en el mejor de los casos, y en situaciones extremas son sustituidos por el estudio del Álgebra y del Cálculo. Estos autores promueven el tratamiento de la Geometría, ya que ésta permite al alumno desarrollar la “intuición creadora” y adquirir, por otro lado, algunos hábitos correctos de pensamiento, los cuales permiten iniciarlos en el razonamiento lógico que dirige las demostraciones. Para defender esta postura los autores proponen un modelo curricular abierto y flexible en donde cada docente adapte lo mejor posible los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática a los acontecimientos, sucesos, realidades y relaciones que pueden ocurrir entre cada uno de los elementos que intervienen en estos procesos: Profesor, Alumnos, Matemática, Estrategias y Recursos, Organización de la institución, Secuencia de los contenidos, Criterios de evaluación. Además, sostienen que cada elemento realimenta el resto en cualquier punto del proceso y que el proyecto curricular puede sufrir variaciones en cualquiera de sus partes por añadir nuevos elementos, modificar o eliminar los existentes.

Este modelo se eligió para regir el diseño y la ejecución de la unidad didáctica sobre Funciones Trigonométricas y sus Inversas por su flexibilidad y apertura a los cambios y modificaciones que pueden sufrir los elementos que intervienen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la

Matemática que son tan necesarios para adaptarlos o contextualizarlos al entorno que rodea al aprendiz.

Con el fin de establecer ¿qué enseñar de las Funciones Trigonómicas?, se desarrolló un mapa de enseñanza – aprendizaje, el cual es una estrategia instruccional diseñada por Orellana (2002) la cual se deriva de un título central correspondiente a algún tópico o tema de Matemática. Además, este autor señala que este tipo de mapa puede variar de un docente a otro, ya que la organización de la secuencia de los cuadros va a depender de su intencionalidad didáctica (pretensiones iniciales), pero su aplicación está condicionada a varios factores como: tiempo disponible, conocimiento del tema tanto por parte del docente como del que poseen los estudiantes, intereses de los estudiantes y de los docentes, bibliografía disponible y nivel educativo.

Para determinar las habilidades geométricas puestas en práctica por los alumnos de la especialidad de Matemática, y diseñar las secuencias de aprendizaje se emplearon los siguientes referentes teóricos: (a) Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele (1957), que según Gutiérrez y Jaime (1990), dicho modelo consta de dos partes: La descriptiva, referida a los niveles de razonamiento geométrico (Reconocimiento, Análisis, Ordenación, Deducción y Rigor) que deben evidenciar los estudiantes cuando abordan un tópico geométrico y la operativa, referida a las fases de aprendizaje (Información, Orientación Dirigida, Explicitación, Orientación Libre, Integración) a través de las cuales el docente organiza el conocimiento, (b) Habilidades Geométricas propuestas por Hoffer (1981), asociadas a cada uno de los niveles de razonamiento geométrico, estas son: visuales, verbales, de dibujo, lógicas y aplicadas.

Otra herramienta o estrategia instruccional empleada para la ordenación del conocimiento en esta propuesta son los organizadores curriculares, que según Segovia y Rico (2001, p.88) “son aquellos conocimientos que adoptamos como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas”. En esta propuesta se emplearon tres: (a) La Historia de la Geometría y la Trigonometría, (b) Los Sistemas de Representación de las Funciones, y (c) El Software de Geometría Dinámica (CABRI – II).

## **Metodología**

### **Tipo de investigación**

El presente estudio es una investigación de campo, de carácter descriptivo y evaluativo, enmarcado dentro de la modalidad de proyecto factible. Con el fin de desarrollar las etapas generales del Proyecto Factible se efectuó un diagnóstico para establecer el nivel de razonamiento geométrico de los alumnos; tomando en cuenta los resultados derivados de esta actividad se procedió a diseñar, desarrollar y evaluar una propuesta didáctica orientada al uso del software de Geometría Dinámica (Cabri II) en la graficación y el estudio de propiedades de las Funciones Trigonómicas y sus Inversas para la enseñanza del Cálculo a nivel Superior.

### **Procedimientos e instrumentos empleados**

La implementación de la propuesta didáctica se apoyó en los siguientes instrumentos: (a) *Diagnóstico de Partida*: realizado en el curso Cálculo Integral dictado, en el período académico 2005 – II, por la profesora Fabiola Czwienczek en dos secciones 511 y 561. A raíz de la participación del autor como observador activo en el programa de formación de la generación de relevo se detectó en estas clases una cierta confusión entre las inversas de las funciones trigonométricas y sus operaciones (multiplicación y composición), (b) *Hojas de trabajo*: Dirigidas a plantear actividades inherentes a las fases de aprendizaje del Modelo de

Razonamiento Geométrico de Van Hiele, además de desarrollar algunas habilidades geométricas que se consideran indispensables para la ejecución de la propuesta didáctica, (c) *Revisar la Construcción*: Comando del software Cabri II que permite hacer un seguimiento parcial de las construcciones realizadas por los estudiantes en el mismo, (d) *Observación Participante*: Realizada por el docente durante la ejecución de la propuesta didáctica, y (e) *Hoja de evaluación final de la propuesta didáctica*: En esta se pretendió evaluar aspectos relacionados con la implementación de la propuesta, tales como: actividades diseñadas, manejo del software, otros materiales y recursos empleados.

### **Análisis de los resultados obtenidos**

El análisis de la información se dirigió bajo el enfoque cualitativo debido a que se analizaron y estudiaron las opiniones, observaciones, producciones y archivos de construcciones elaboradas con el software registrado en cada uno de los instrumentos mencionados anteriormente.

A continuación se presentan los resultados obtenidos luego de la puesta en práctica de la unidad didáctica materializada en el Taller Funciones Trigonométricas y sus Inversas. Este taller se apoyó principalmente en dos hojas de trabajo elaboradas por el docente – investigador, la hoja n° 1 contiene trece (13) actividades distribuidas de la siguiente forma: la actividad 1 (enmarcada dentro de la fase de información) dirigida a la verificación de un teorema relacionado con la medida en radianes, las actividades 2 al 10 - ubicadas dentro de la fase orientación dirigida – tenían como objetivo la construcción de las gráficas de las Funciones Seno, Coseno, Tangente, Cotangente, Secante, y Cosecante por razones trigonométricas, y las gráficas de las Funciones Seno, Coseno y Tangente por Calculadora y Transferencia de Medidas, las actividades 11, 12 y 13 (enmarcadas dentro de la fase orientación libre), donde los estudiantes debían describir el procedimiento de construcción de la gráfica de la función impresa en la hoja por el método de la Calculadora y Transferencia de Medidas. Por otro lado, la hoja n° 2 contiene tres (3) actividades ubicadas dentro de la fase orientación dirigida, orientadas hacia la construcción de las gráficas de las Funciones siguientes: Arco Seno, Arco Coseno y Arco Tangente, por el método de la Calculadora y Transferencia de Medidas.

Para la evaluación de las herramientas técnicas y habilidades geométricas desarrolladas por los ocho equipos de estudiantes que participaron en el Taller Funciones Trigonométricas y sus Inversas, se analizaron las actividades 1, 2, 3, 10 y 13 de la hoja n° 1 y la actividad 1 de la hoja n° 2, es decir; se analizaron las actividades relacionadas con la noción de radián, y las funciones Seno, Cosecante y Arco Seno. Ahora se describen los métodos de construcción desarrollados en el taller.

*Construcción de la gráfica por calculadora y transferencia de medidas*: En este tipo de construcción en primer lugar se ubica un punto sobre el eje X, procurando que no sea sobre una de las graduaciones del eje, en segundo lugar se determina las coordenadas de ese punto con la opción Coordenada o Ecuación, este punto tendrá coordenadas de la forma  $(a,0)$  con  $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ , luego con la calculadora que posee el software se busca el  $Sen(a)$ ,  $Cos(a)$ ,  $Tan(a)$ ,  $Csc(a) = \frac{1}{Sen(a)}$ ,  $Sec(a) = \frac{1}{Cos(a)}$ ,  $Cot(a) = \frac{1}{Tan(a)}$ ,  $Arcsen(a)$ ,  $Arccos(a)$ ,  $Arctan(a)$ , (Las tres últimas funciones se obtienen pulsando el botón INV de la calculadora y seguidamente los botones Sen, Cos o Tan respectivamente, además en estas funciones hay que tener en cuenta las restricciones que impone el dominio, es decir; no podemos calcular el  $Arcsen(2,54)$ , después de obtener estos resultados se transfieren sobre el eje Y, y esta transferencia determina un punto, por este punto se traza una recta perpendicular al eje, y por el punto de coordenadas de la forma  $(a,0)$



con  $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$  también se traza una recta perpendicular al eje X, la intersección de estas dos rectas determinan un punto, por último se busca el lugar geométrico de este último punto de intersección de las rectas con respecto al primero ubicado sobre el eje X. El primer punto no puede ser tomado con abscisa entera ya que el software representa entonces sólo las imágenes enteras a través de la Función, lo que trae como consecuencia la representación de algunos puntos de la misma y que la gráfica no posea un trazo continuo.

*Construcción de la gráfica por razones trigonométricas:* Este tipo de construcción se basa en las razones trigonométricas presentes en el Círculo Trigonométrico o Círculo Unitario.

La información recabada en el taller se organizó en tres matrices, la primera denominada la matriz de datos (MD) en la que se especificaba: a) Número del equipo e integrantes del mismo, b) Número y nombre de la hoja de trabajo, c) Fase del Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele a la cual pertenece la actividad, y d) Nombre de la actividad. La segunda la matriz de aspectos técnicos (MAT), la cual contenía imágenes de las actividades, tomadas de los archivos elaborados por los estudiantes en el software y la secuencia de pasos que los estudiantes ejecutaron en el momento de construir la gráfica, esta secuencia se obtiene a través de la opción revisar la construcción disponible en el software. La última la matriz de preguntas y respuestas (MPR) en la cual se presentaban algunas preguntas sobre las actividades.

Las herramientas técnicas del software CABRI – II empleadas por los estudiantes en la construcción de las gráficas de las Funciones Trigonométricas y sus Inversas fueron las siguientes: Punto sobre un objeto, Punto(s) de intersección, Segmento, Semirrecta, Círculo, Arco, Compás, Distancia o longitud, Medida de ángulo, Calculadora, Texto, Marcar un ángulo, Mostrar los ejes, Recta Perpendicular, Transferencia de medidas, Lugar, Coordenada o Ecuación, Recta, Recta Paralela, Texto, Rotación, Traza y Animación.

A manera de ejemplo se presentará el análisis de la actividad 2, la cual tiene por objetivo la construcción de la gráfica de la Función Seno por Calculadora y Transferencia de Medida. Con esta actividad se pretendía la construcción de la gráfica de la función Seno, utilizando la calculadora y la opción transferencia de medidas, se realizaron dos preguntas, la primera: ¿Qué valores toma el punto B?, esta se formulaba luego de que se calculaba el Seno de la primera componente o abscisa del punto A (tomado sobre el eje X) con la calculadora y se transfería dicho valor sobre el eje Y, este punto de transferencia se llamaba B, por último se recomendaba el desplazamiento del punto A para observar el comportamiento del punto B, la segunda se planteaba luego de trazar rectas perpendiculares a ambos ejes y que pasaran por los puntos A y B, estas rectas se cortaban en un punto denominado C, a este último punto se le aplicaba la opción traza y al punto A la opción animación para determinar el comportamiento de ambos puntos se procedió a preguntar: ¿Qué observas?. A continuación de acuerdo a las respuestas de los equipos se determinarán las habilidades geométricas asociadas a cada uno de los niveles de razonamiento de Van Hiele, propuestas por Hoffer (1981). Los estudiantes se organizaron en equipos de 2 o 3 integrantes, ya que el Laboratorio 1 de la UPEL – Maracay posee solo 10 computadoras y los participantes en el taller eran 24.

*Estrategias visuales:* Los equipos 1 y 8 reconocen diferentes figuras desde un dibujo tales como: rectas perpendiculares, lugar geométrico de la función Seno, además identifican propiedades de una figura como: el rango de la función Seno, de lo señalado anteriormente y de acuerdo a la clasificación propuesta por Hoffer (1981), los equipos 1 y 8 poseen habilidades o estrategias visuales asociadas con los siguientes niveles de Razonamiento Geométrico: Reconocimiento y Análisis. Los equipos 3 y 4 no reconocen el lugar geométrico de la función Seno, sin embargo reconocen información nombrada sobre una figura específicamente los valores que toma el punto B, estos equipos poseen algunas habilidades o estrategias visuales asociadas

con el nivel de Reconocimiento. El equipo 5 reconoce diferentes figuras desde un dibujo e información nombrada sobre una figura por ejemplo el rango, la paridad y periodicidad de la función Seno, por otro lado reconoce interrelaciones entre distintos tipos de figuras cuando expresan que las gráficas de las funciones Seno y Coseno son las mismas pero desplazada ( $\pi / 2$ ) unidades a la derecha, aunque lo correcto sería desplazar la gráfica de la función Seno ( $\pi / 2$ ) unidades a la izquierda para obtener la gráfica de la función Coseno y por último usan información acerca de una figura para deducir más información, por todo lo descrito anteriormente el equipo 5 presenta habilidades visuales correspondientes a los niveles de razonamiento geométrico siguientes: Reconocimiento, Análisis, Ordenación y Deducción. Los equipos 2, 6 y 7 no contestaron las preguntas formuladas en ésta actividad.

*Estrategias verbales:* Los equipos 1 y 8 asocian el nombre correcto a una figura dada por ejemplo: La gráfica de la función Seno y además describen algunas propiedades de esta figura, por ejemplo: rango de la función, estas habilidades verbales corresponden a los niveles de Reconocimiento y Análisis. El equipo 5 además de asociar el nombre correcto a una figura dada y describir varias propiedades de la figura, formulan frases mostrando interrelaciones entre figuras estas habilidades verbales se encuentran relacionadas con los niveles de razonamiento geométrico: Reconocimiento, Análisis y Ordenación. Los equipos 3 y 4 interpretan las frases que describen una figura estrategia asociada al nivel de Reconocimiento.

*Estrategias de Dibujo:* Los equipos 1, 3, 4, 6, 7 y 8 realizaron dibujos precisos de la gráfica de la función Seno y trasladaron la información verbal dada en la hoja de trabajo hacia la pantalla, estas habilidades se corresponden con los niveles de Reconocimiento y Análisis. El equipo 5 además de lo mencionado anteriormente usó propiedades de figuras para dibujar o construir figuras y dedujo a partir de una información como construir una figura específica, por tanto este equipo posee habilidades de dibujo relacionadas con los niveles de Reconocimiento, Análisis, Ordenación y Deducción. El equipo 2 no realizó la construcción de la gráfica de la función Seno.

*Estrategias Lógicas:* Los equipos 1 y 8 comprenden cualidades de la definición de rango de la función Seno, se dan cuenta de que las propiedades pueden ser usadas para distinguir la figura, estas habilidades están ligadas a los niveles de Reconocimiento y Análisis. El equipo 5 además es capaz de deducir consecuencias desde una información dada, por tanto este posee habilidades relacionadas con los niveles de Reconocimiento, Análisis, Ordenación y Deducción. Los equipos 3 y 4 comprenden cualidades de una definición, estrategia ligada al nivel de Reconocimiento.

### **Conclusiones y Recomendaciones**

Durante el desarrollo del taller el docente – investigador observó que los alumnos presentaron ciertas dificultades relacionadas con: (a) la comprensión de la definición de radián, (b) el manejo del software, (c) el uso del lenguaje matemático. Aunque algunos grupos evidenciaron habilidades relacionadas con los niveles de razonamiento Ordenación y Deducción, en general, se puede concluir que este grupo de estudiantes en lo que a Funciones Trigonómicas y sus Inversas se refiere pueden ubicarse en el nivel de Análisis.

Para tratar de mejorar esta situación se debe reconsiderar algunos aspectos relacionados con la ejecución de la unidad didáctica, tales como: (a) número de actividades por hoja de trabajo, (b) tiempo disponible para la realización de las actividades, (c) diversidad de actividades relacionadas con la noción de radián, (d) número de participantes por máquina o computadora, (e) tiempo disponible para el manejo del software, y (f) más precisión en los procedimientos de construcción de las gráficas. Además se cree necesario: dictar el taller Funciones Trigonómicas

y sus Inversas a alumnos de nuevo ingreso y alumnos avanzados de la especialidad de Matemática, con el fin de evaluar el tratamiento matemático y didáctico que este tipo de funciones recibió en el taller mencionado anteriormente, la creación de dos cursos uno en el que se profundice el estudio de la Trigonometría y otro en la Historia de la Matemática, y por último la creación de un Laboratorio de Informática para el Departamento de Matemática de la UPEL Maracay.

## REFERENCIAS

- Berroterán, M. de y otros (1997). *Compendio Informativo*. UPEL – Maracay.
- Beyer, W. (1996). Una revisión crítica a la enseñanza del concepto de función. *Paradigma*, XIV AL XVII(2), 238-269.
- Gutiérrez, A. (2005). *Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de Geometría dinámica*. [Documento en línea]. Disponible: <http://www.uv.es/Ángel.Gutierrez/marcotex.html-1k-> [Consulta: 2007, Enero 15].
- Hoffer, A.(1981). Geometry is more than proof. *The Mathematics Teachers*, 74(1), 11-18.
- Iglesias, M. (2000). *Curso de Resolución de Problemas Geométricos asistido por computadora*. Trabajo de grado no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Maracay.
- Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la educación de la Geometría: El modelo de Van Hiele. En S. Llinares y M. V. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en educación matemática* (pp. 303-376). Sevilla: Alfar.
- Luengo, R. et. al. (1997). *Proporcionalidad Geométrica y Semejanza*. Madrid: Editorial Síntesis, S.A.
- Maldonado, S y otros. (2003). *Construyendo la noción de Función Trigonométrica: Estrategias de aprendizaje*. Ponencia presentada en la RELME XVII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. [Documento en línea].Disponible: <http://www.clame.org.mx> [Consulta: 2007, Abril 17].
- Mora, D. (2001). *Didáctica de las Matemáticas*. Caracas: Universidad Central de Venezuela.
- Orellana Chacín, M. (2002). ¿Qué enseñar de un Tópico o de un Tema? *Enseñanza de la Matemática*, 11(2), 21-42.
- Rodríguez, J. (1998). *Aplicación de software para el desarrollo de habilidades cognitivas que faciliten la aprehensión de contenidos asociados a la graficación y reconocimiento de relaciones matemáticas reales de una variable real*. Trabajo de grado no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Maracay

Segovia, I. y Rico, L. (2001). Unidades Didácticas. Organizadores. En E. Castro (ed.), *Didáctica de la Matemática en la Escuela Primaria*. Madrid: Editorial Síntesis, S.A.

Smith, D. (1980). *History of Mathematics*. New York: Dover Publications.

Van Hiele, P. (1957). *El problema de la comprensión*. (R. Barroso, Trad.). Sevilla: Universidad de Sevilla.

#### SOFTWARE

Laborde, J y otros (2001 – 2004). Cabri - Géomètre II Plus (versión 1.2.5 TI – MS Windows).