UNA PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE LOS FRACTALES EN EL NIVEL MEDIO

Cintia G. Cianciardo, Martha B. Fascella, José A. Semitiel
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura – U.N.R. – Argentina
semitiel@fceia.unr.edu.ar
Nivel Medio

Resumen

El siguiente trabajo es una propuesta de enseñanza para alumnos de 2º año del nivel Secundario que tiene como propósito hacer conocer el por qué, el para qué y el cómo introducir conceptos de la Geometría Fractal en dicho nivel.

El estudio de los fractales permite relacionar lo científico, con la tecnología, el arte, etc. Es una excelente ocasión para introducir a los alumnos en el nuevo mundo a que dieron lugar estos maravillosos objetos matemáticos que encuentran tantas representaciones en el mundo |que nos rodea ya que resulta de interés por muchas razones, y no sólo por las de tipo curricular que se mencionó al principio, sino además por la actualización científica y el enorme potencial interdisciplinar de estos objetos.

Entre sus objetivos se pretende mostrar dos aspectos básicos que pueden tenerse en cuenta para mejorar y fomentar la enseñanza de la Matemática y en particular de la Geometría: el *dinamismo y la evolución de la ciencia*, a partir de la presentación y construcción de fractales; y las *aplicaciones variadas de los fractales* que tienen en los distintos campos del conocimiento.

Palabras clave: Revalorización de la Geometría – Fractal – Geometría Fractal – Propuesta de Enseñanza

Introducción

La realidad nos muestra que la Geometría euclidiana ha simplificado las irregularidades, ha linealizado las leyes, ha hecho una aproximación real y ha regularizado las formas geométricas. Sin embargo, las formas de la naturaleza rebasan la capacidad de descripción de la Geometría euclidiana, y es en donde la Geometría fractal aparece como una nueva disciplina de la ciencia, la cual ayuda a describir formas que no son ni circulares, ni cónicas, ni esféricas; o quizás son una combinación de diferentes formas. Esta teoría es conceptualizada como un modo alternativo de describir algunas de esas formas, las cuales han quedado de lado en su descripción mediante la Matemática tradicional debido a su complejidad (Mandelbrot, 1997)

Aunque la enseñanza de la Geometría euclidiana en el nivel medio le ofrece al alumno saberes que le son y le serán útiles en la vida real, fortaleciendo las relaciones existentes entre la Geometría y el mundo que lo rodea, estamos rodeados de objetos naturales que no pueden describirse mediante nociones geométricas de la Geometría euclidiana y la Topología. Sólo pueden describirse por una nueva Geometría, por ese motivo surgió lo que hoy conocemos como Geometría fractal, una parte de la Matemática que se encarga de encontrar un orden y una regla en el caos natural.

La Matemática es una ciencia que ha evolucionado, es dinámica y como tal hay que enseñarla. El estudio de los fractales permite conjugar lo científico, con la tecnología, el arte, la literatura,… Es una excelente ocasión para introducir a los alumnos en el nuevo mundo a que dieron lugar estos maravillosos objetos matemáticos que encuentran tantas representaciones en el mundo que nos rodea.

Marco Teórico

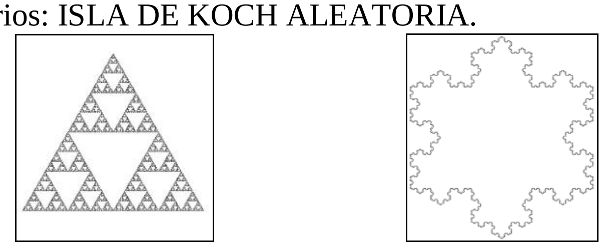
Los *fractales* son una forma de describir de una manera simple los contornos irregulares, de modo que estos pueden ser incorporados a la ciencia (Mandelbrot, 1997). Los fractales han aparecido para cubrir una necesidad específica: la de comprender determinados sistemas naturales que por sus complejas características internas, no pueden ser descriptos y estudiados de una manera detallada y convincente por la Matemática tradicional.

Los *fractales matemáticos* se originaron a partir de objetos naturales que no podían describirse usando nociones de Geometría euclidiana. Fue Mandelbrot quien tratando el problema de medir el largo de la costa de Gran Bretaña, descubrió que éste es menos trivial de lo que parece. Fue la primera vez que se analizaron líneas de largo infinito contenidas en un área finita, lo que constituye una de las principales características de los fractales.

Mandelbrot sugiere no dar una definición de fractal en los comienzos, sino fijarse en las propiedades de estos objetos. La excesiva formalización y la proliferación de los conceptos no hace bien y ello queda sólo reservado para un grupo muy reducido de especialistas. Por otra parte es complicado dar una definición general de fractal porque muchas de éstas no se pueden aplicar a todas las familias de fractales existentes. (Alderete y Peralta, 2005)

Los *fractales clásicos* son los que aparecen como límites de poligonales, o como límites de porciones del plano, o como resultados del azar llamados fractales aleatorios (ver Figura 1). Ejemplos de ellos son:

- Fractales como límite de una curva: CURVA DE KOCH, CURVA DE PEANO.
- Fractales como límite de áreas: COPO DE NIEVE, CURVA ANTIKOCH O ANTICOPO DE NIEVE.
- Fractales aleatorios: ISLA DE KOCH ALEATORIA.



Triángulo de Sierpinsk   Copo de nieve

Figura 1

Los *fractales modernos* son los que surgen como límite de iteraciones de una transformación dada, del plano en sí mismo (Ver Figura 2). Ejemplos de ellos son: CONJUNTO DE MANDELBROT y DE JULIA.

Conjunto de Mandelbrot   Conjunto de Julia

Figura 2

Todos los fractales tienen propiedades comunes: la *dimensión fractal* y la *autosimilitud*. Los *fractales autosemejantes* son aquellos que van repitiendo proporcionalmente una determinada construcción y cada conjunto parcial es una reproducción del conjunto total (Santaló, 1992). Para determinar la dimensión de un fractal se usan los conceptos de límite,

logaritmo, escalas y medidas. En caso de fractales muy complejos como el conjunto de Mandelbrot se usa computadoras, pero para fractales más simples se utilizan fórmulas matemáticas, una muy común es la de Hausdorff-Besicovitch.
Una manera más moderna de definir fractal consiste en la iteración de una transformación dada en el plano en sí mismo, iteración que como límite puede dar lugar a fractales interesantes que llamamos fractales modernos. Algunas de tales funciones son biyectivas y se denominan transformaciones complejas. Tales transformaciones en el plano complejo nos permiten estudiar ciertos fractales, fractales modernos muy conocidos como por ejemplo son el conjunto de Mandelbrot y los conjuntos de Julia.
Una cosa son las fractales matemáticos y otra, los *fractales naturales*, puesto que existe una diferencia fundamental: los fractales verdaderos son una idealización. Ninguna curva en el mundo real es un fractal verdadero; los objetos reales son producidos por procesos que actúan sólo sobre un rango de escalas finitas. En otras palabras, los objetos reales no tienen la infinita cantidad de detalles que los fractales ofrecen con un cierto grado de magnificación. En general, las nubes, las montañas, las costas, los árboles, los ríos, redes neuronales, propagaciones de poblaciones y enfermedades, etc. son formas naturales que se pueden categorizar como fractales naturales pues pueden estudiarse mediante un modelo fractal (modelo matemático). Por ejemplo, el modelo fractal que nos permite asegurar que el trazado de una costa es un fractal natural es el de la curva de Koch aleatoria. El sistema arterial es otro ejemplo de fractal natural pues puede estudiarse mediante el modelo fractal tipo árbol. Las corrientes marinas son también un ejemplo de fractal natural dado que pueden estudiarse mediante el modelo fractal de Lorenz. (Alderete y Peralta, 2005)
Como un modo alternativo para describir algunas de esas formas que han quedado de lado en su descripción mediante la Matemática tradicional debido a su complejidad, surgió lo que hoy conocemos como Geometría Fractal. La Geometría Fractal ofrece un modelo alternativo que busca una regularidad en las relaciones entre un objeto y sus partes a diferentes escalas. Esta nueva geometría busca y estudia los aspectos geométricos que son invariantes con el cambio de escala.

La propuesta didáctica

La propuesta que se presenta a continuación, está diseñada para trabajar con alumnos de 2º año de la Escuela Secundaria. Los contenidos del año en curso que se relacionan con la propuesta son *funciones*, *transformaciones geométricas* y el trabajo de operatoria con *números reales*.
Los objetivos de la siguiente propuesta didáctica, en función de los contenidos relacionados a la misma ya mencionados, son los siguientes:

- Presentar guías o actividades de trabajo que tengan entre sus fines: conocer, reconocer y construir fractales; observar y utilizar las propiedades de autosimilutd y dimensión fractal.
- Fomentar la tarea de investigación en los alumnos.
- Apreciar los aportes de la Geometría fractal a los diferentes campos de conocimiento.

Clase 1: ¿Oyeron alguna vez hablar de fractales? (40 minutos)

1) Indagar acerca del término fractal.
2) Solicitar una búsqueda en la red acerca de fractales, Geometría fractal y los orígenes de los fractales. Luego, confeccionar un documento con toda la información hallada donde la misma contenga imágenes fractales. Sólo deben tomar nota de aquellos aspectos que

sean capaces de comprender y explicar. Deben incluir en el documento las páginas web consultadas.

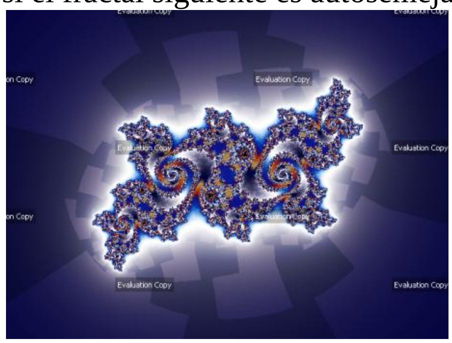
Clase 2: ¿Qué es un fractal? Aproximación del concepto (80 minutos)

1) Comentar y comparar acerca de lo investigado por los alumnos.
2) Trabajar con la siguiente guía propuesta en grupos de dos alumnos:

   Actividad 1: *Fractales*

   A partir de la información obtenida en distintos sitios de internet, responder las siguientes cuestiones:

   a) ¿Qué es un fractal?, ¿Por qué se dice que la Geometría fractal es la Geometría de la naturaleza?
   b) ¿Cómo se originaron los fractales matemáticos?
   c) ¿Qué es la autosimilitud?, ¿qué significa que un fractal sea autosemejante?
   d) Determinar y explicar si el fractal siguiente es autosemejante:



   e) ¿Qué es la dimensión fractal?
   f) Realizar una breve reseña histórica de los orígenes de los fractales.
   g) Insertar una imagen fractal de las que has encontrado en internet. Explicar si es autosemejante.

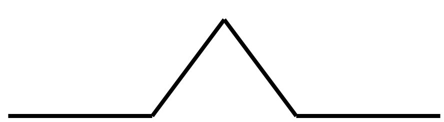
Clase 3: Construcción de fractales (80 minutos)

1) Realizar comentarios acerca de las diferentes respuestas obtenidas por los diferentes grupos. Completar las respuestas cotejando las distintas observaciones realizadas por los alumnos.
2) Construcción de los fractales "Curva de Koch" y "Triángulo de Sierpinski". Se les presenta a los alumnos las siguientes actividades:

   Actividad 2: *La curva de Koch*

   En 1904, Niels Helge Von Koch, define la curva que lleva su nombre de la siguiente manera: Un segmento de longitud 1 es dividido en tres partes congruentes (dos a dos) o sea, de igual longitud. La parte central se sustituye por dos segmentos del mismo tamaño que el eliminado. Sucesivamente se repite el mismo proceso por cada segmento formado.

   Nivel 0:

   Nivel 1: 

   Nivel 2: ………………………………………

   Nivel 3: ………………………………………

   a) Completar los niveles 2 y 3 de la construcción de la curva de Koch.

b) A partir de las construcciones y observaciones realizadas, completar la siguientes oración: *"La curva de Koch se genera a partir de un segmento que se divide en……segmentos congruentes y se sustituyen por……segmentos en cada iteración"*

c) ¿Es un conjunto autosemejante? Justificar la respuesta

d) Completar la siguiente tabla:

Nivel	0	1	2	3	4	*n*
Número de segmentos						

e) Completar la siguiente tabla:

Nivel	0	1	2	3	4	*n*
Longitud de la curva						

f) A medida que se avanza en los niveles, ¿qué ocurre con la longitud de dicha curva?

g) ¿Qué podría asegurar con respecto a la longitud de la curva de Koch?

Tarea para el hogar:

a) Ingresar a http://www.dma.fi.upm.es/java/geometriafractal/clasicos-I/app_koch.html y representar la curva en diferentes niveles.

b) Buscar en internet algún software libre que genere la curva de Koch. Indicar de qué software se trata y pegar a continuación la curva obtenida.

Actividad 3: *El Triángulo de Sierpinski* "El fractal de Sierpinski, es una figura inventada por el matemático polaco Waclaw Sierpinski en 1915, y es llamada Triángulo de Sierpinski"

a) Ingresar a: http://math.rice.edu/~lanius/fractals/sierjava.html y construir el fractal.

b) Explicar con sus palabras cómo está formada básicamente esta figura y cómo se obtienen los distintos niveles de su construcción.

c) Graficar los niveles 0,1, 2 y 3 de la construcción del Triángulo de Sierpinski.

d) ¿Es un fractal autosemejante?, ¿por qué?

e) Completar la siguiente tabla:

Nivel	0	1	2	3	4	*n*
Número de triángulos						

f) Completar la siguiente tabla:

Nivel	0	1	2	3	4	*n*
Perímetro de la figura	3					

g) A medida que se avanza en los niveles, ¿qué ocurre con el perímetro de dicha figura?, ¿Qué podría asegurar con respecto al perímetro del Triángulo de Sierpinski?

h) Completar la siguiente tabla:

Nivel	0	1	2	3	4	*n*
Área de la figura	1					

i) A medida que se avanza en los niveles, ¿qué ocurre con el área de dicha figura?, ¿Qué podría asegurar con respecto al área del Triángulo de Sierpinski?

j) Investigar en la red: ¿Qué características generales tienen los fractales con respecto a su perímetro y a su área?, ¿Cuáles son las dimensiones fractales de la curva de Koch y del triángulo de Sierpinski?

Clase 3: Fractales clásicos y Fractales modernos (80 minutos)

1) Realizar comentarios y comparar resultados respecto a las actividades propuestas en la clase anterior.
2) Proponer la siguiente actividad:

   Actividad 4: *¡A producir fractales!*

a) Inventar dos fractales.
b) Realizar una breve descripción de la construcción de cada uno.

3) Luego de trabajar con dicha actividad, se muestran las distintas producciones de los alumnos al resto de sus compañeros y se comparten resultados.
4) Comentar que hasta aquí hemos trabajado con fractales clásicos que aparecen de manera natural al estudiar conjuntos del plano que son de medida nula, pero que se pueden definir en ellos, de cierta manera, una dimensión que puede servir para diferenciarlos entre sí y analizar distintas propiedades de los mismos. Pero otra manera, más moderna, de definir fractales consiste en la iteración de una transformación dada del plano en sí mismo. Estos mismos de definen a partir de funciones muy específicas que escapan de los conocimientos adquiridos en este nivel de enseñanza, llamadas transformaciones complejas. En particular, estamos interesados especialmente en las traslaciones, dilataciones y rotaciones alrededor del origen.

Tarea para el hogar:

a) Ingresar al sitio: http://www.youtube.com/watch?v=Aaq7QYvCNpc ¿Sobre qué trata el video?, ¿a qué fractal se hace referencia?

b) Existen diversos software libres para generar fractales. Uno muy popular es Ultra Fractal. En el sitio: http://www.ultrafractal.com/spanish.html se puede bajar la versión en español de dicho software. Investigar cómo se lo utiliza, jugar con los distintos *colores* y el zoom. Construir fractales en base al conjunto de Mandelbrot y los conjuntos de Julia. Insertar a continuación las imágenes obtenidas y explicar cuál fue la secuencia utilizada para dicha construcción.

Clase 4: Fractales matemáticos y naturales. Aplicaciones (80 minutos)

1) Comentar y comparar resultados con respecto a la tarea de investigación en internet.

2) Comentar que hasta aquí hemos trabajado con fractales matemáticos es decir objetos geométricos complejos y detallados en estructuras a cualquier nivel de magnificación. Sin embargo, en general, las nubes, las montañas, las costas, los árboles, los ríos, redes neuronales, propagaciones de poblaciones y enfermedades, etc. son formas naturales que aunque no son un fractal se pueden categorizar como fractales naturales pues pueden estudiarse mediante un modelo fractal (modelo matemático). Por ejemplo, la frontera de un país puede modelizarse a partir de las Curvas de Koch aleatoria.

3) Proponer la siguiente actividad de investigación en internet:

Actividad 5: *Fractales matemáticos y naturales*

a) Buscar qué modelos fractales se utilizan para estudiar: Corrientes marinas - Trazado de un río - Sistema arterial.

b) Buscar e indicar qué otros elementos de la naturaleza, de los ya mencionados, pueden estudiarse mediante el modelo fractal de la Curva de Koch.

Luego de compartir los resultados obtenidos, sería interesante cerrar la propuesta con las variadas aplicaciones de los fractales en distintas disciplinas. Para ello, comentar que las aplicaciones de la teoría de los fractales en diversas ramas de la ciencia no son aplicaciones directas, es decir, en la mayoría de los casos son adaptaciones en función del contexto informático, físico, de la medicina, social, biológico o artístico. Proponer a continuación la siguiente y última actividad en el laboratorio:

Actividad 6: *Aplicaciones de la teoría fractal*

a) Buscar e indicar al menos cinco disciplinas en la que la teoría fractal es utilizada y explicar brevemente cómo y en qué la utiliza.

b) Música y Matemática siempre tuvieron una cercana relación. Desde Pitágoras se sabe que la armonía de tono está íntimamente vinculada a la frecuencia numeral. Otra aplicación de los fractales muy curiosa es la música fractal. Ciertas músicas, incluyendo a las de Bach, Beethoven y las de Mozart, cumplen con las propiedades fractales.

b_1) Ingresar a http://www.oni.escuelas.edu.ar/olimpi99/fractales/musica.htm. Leer lo propuesto y escuchar los distintos ejemplos de música fractal.

b_2) Buscar en internet otro sitio relacionado con música fractal y escuchar los ejemplos que se encuentren. Compartir con sus compañeros los sitios visitados.

c) Los fractales, objetos matemáticos, han probado ser útiles no sólo para describir y modelar los fenómenos naturales como hemos visto, sino que también se convirtieron en portadores de una belleza fantástica. Utilizando una programación especial en la computadora se pueden crear increíbles obras de arte. Cada vez hay más personas en el mundo que se dedican de forma profesional a la creación de obras artísticas con técnicas fractales.

c_1) Investigar en la red acerca del "arte fractal"

c_2) Mencionar al menos dos artistas que trabajen el arte fractal de forma profesional.

c_3) Insertar una obra de arte que utilice la técnica fractal y menciona su autor. Compartir la obra encontrada con sus compañeros.

c_4) Siéntase un verdadero artista... Utilizar el software Ultra Fractal para crear un fractal. Usar variedad de colores, emplear toda su imaginación. Compartir la imagen obtenida con sus compañeros.

Conclusiones

Como docentes muchas veces solemos decir que es necesario que el curriculum de Matemática refleje de alguna manera el proceso constructivo del conocimiento matemático, tanto en su proceso histórico como de apropiación del individuo. Es preciso revisar los modelos actuales de educación, ensanchar sus horizontes y alentar nuevas teorías para unir aprendizajes que, generalmente, están separados en la práctica educativa contemporánea.

El estudio de los fractales permite relacionar lo científico, con la tecnología, el arte, etc. Es una excelente ocasión para introducir a los alumnos en el nuevo mundo a que dieron lugar estos maravillosos objetos matemáticos que encuentran tantas representaciones en el mundo que nos rodea ya que resulta de interés por muchas razones, y no sólo por las de tipo curricular que se mencionó al principio, sino además por la actualización científica y el enorme potencial interdisciplinar de estos objetos. (Alderete y Peralta, 2005)

La propuesta didáctica responde a las nuevas tendencias en la enseñanza de la Matemática y en particular de la Geometría y es coherente con objetivos del diseño curricular en vigencia para la EGB3: "En los primeros años escolares interesará desarrollar las ideas de formas geométricas y favorecer al máximo la intuición espacial, tratando de desarrollar una imaginación que conciba formas espaciales originales y no necesariamente el reconocimiento de figuras y cuerpos regulares" (Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe, 1999, p. 68). Este trabajo contribuye en este sentido pues las actividades planteadas en su mayoría conjugan conceptos ya adquiridos con observaciones o construcciones específicas de cada caso, demandando un accionar intelectualmente activo, condición vinculada al carácter "formativo" de la Matemática.

Para finalizar el trabajo, cabe reproducir palabras del Dr. Luis Santaló:

> El mundo actual necesita hombres con mente creativa, que sepan conservar los avances logrados por la ciencia y la tecnología y sean capaces de utilizarlos con éxito en favor del bienestar general, al mismo tiempo que los hagan progresar en posibilidades y eficacia. Hay que educar también en el trabajo y en el esfuerzo. El placer del descanso se disfruta plenamente tan sólo después del esfuerzo, y una tendencia al 'facilismo', sobre atrasar el rendimiento general, no contribuye en nada a una vida más feliz del interesado. Los alumnos disponen de una gran cantidad de energía, física e intelectual, que necesitan gastar continuamente. La escuela debe canalizar esta energía hacia caminos útiles y provechosos. Si la escuela es 'fácil' el alumno vertirá sus energías hacia ocupaciones extraescolares, no siempre recomendables. (Santaló, 1987)

Y respecto a la formación de profesores agrega:

> Hay que tener en cuenta la pedagogía, pero hay que ir educando al alumno en el esfuerzo personal para aprender por su cuenta. Lo importante es poner a su disposición buenos textos, buenas guías y un buen conocimiento de la materia por parte del profesor. (Santaló, 1987)

Referencias Bibliográficas

Alderete, M. y Peralta, M. (2005). *Seminario Introducción a Fractales* [CD-ROM]. Mendoza: Universidad Nacional de Cuyo, Facultad de Educación Elemental y Especial.

Cobos Aparicio, J. y Villena Borrego, A. (sf). *Fractales Clásicos*. Recuperado el 27 de mayo de 2010 de http://www.dma.fi.upm.es/java/geometriafractal/clasicos-I/app_koch.html

Lanius, C. (sf). *The Sierpinski Triangle*. Recuperado el 27 de mayo de 2010 de http://math.rice.edu/~lanius/fractals/sierjava.html

Mandelbrot, B. (1997). *La Geometría Fractal de la Naturaleza*. Barcelona: Tusquets.

Ministerio de Educación del la Provincia de Santa Fe (1999). *Diseño Curricular Jurisdiccional para la Educación General Básica, Tercer Ciclo*. Santa Fe, Argentina.

Música Fractal. (sf). Recuperado el 27 de mayo de 2010 de http://www.oni.escuelas.edu.ar/olimpi99/fractales/musica.htm

Santaló, L. (1987). *La enseñanza de las Ciencias en la Escuela Media*. Buenos Aires: Docencia.

Santaló, L. (1992). Conjuntos Fractales. *Revista de la Universidad CAECE Elementos de Matemática* 6, 5-26.

Slijkerman, F. (sf). *Ultra Fractal 5*. Recuperado el 27 de mayo de 2010 de http://www.ultrafractal.com/spanish.html

Ultra Fractal demo. (sf). Recuperado el 27 de mayo de 2010 de http://www.youtube.com/watch?v=Aaq7QYvCNpc