ALGEBRA LINEAL PARA SOLUCIONAR SITUACIONES DE GEOMETRÍA ANALÍTICA Y ESTADÍSTICA

Marìa Inés Ciancio, Susana B. Ruiz, Elisa Silvia Oliva
Universidad Nacional de San Juan- UNSJ; Fac. de Ciencias Exactas F. y Naturales – Dpto. Geofísica y Astronomía. Argentina
miciancio@hotmail.com , sbruiz@yahoo.com.ar , eoliva@iinfo.unsj.edu.ar
Nivel Universitario

Resumen
El proceso educativo debe propender a reconceptualizar los procesos de enseñanza – aprendizaje, a fin de lograr el desarrollo de capacidades que le permitan al sujeto enfrentar nuevas situaciones.
La matemática en las carreras universitarias además de desarrollar el pensamiento lógico, algorítmico y heurístico; en el marco del desarrollo científico-tecnológico que se está inmerso debe desarrollar las capacidades de modelización, análisis y síntesis.
El lenguaje del Algebra Lineal es adaptable a muchos contextos por la generalidad de su objeto de estudio, por ello permite su sintaxis el planteo de problemas y determinación de la solución de situaciones de la misma matemática y otros campos científicos.
El siguiente trabajo presenta una propuesta de actividades para desarrollar con aportes de contenidos de Algebra Lineal en relación con Análisis Estadístico y Geometría Analítica.
Se pretende consolidar el aprendizaje del tema autovalores y autovectores en la diagonalización de una forma cuadrática, en forma integrada a las asignaturas Geometría Analítica y Estadística, facilitando la comprensión de los objetos matemáticos involucrados en la eliminación de rotación de superficies cuádricas y/o partiendo de un vector aleatorio de componentes normales estándar, para determinar cuantos grados de libertad tiene la distribución Chi- Cuadrado de la suma de los cuadrados de sus componentes .
<u>Palabras clave:</u> Forma cuadrática – Estadística – Geometría Analítica – Algebra Lineal

Introducción

Los procesos de transformación en los que está inmersa la sociedad, conducen al florecimiento de un nuevo paradigma productivo basado en la utilización intensiva de variadas competencias del ámbito del conocimiento.
El proceso educativo debe propender a reconceptualizar los procesos de enseñanza – aprendizaje, a fin de lograr el desarrollo de capacidades que le permitan al sujeto enfrentar nuevas situaciones.
Desde el Álgebra Lineal, se proponen diferentes planteos que propician en el individuo el desarrollo de las competencias que apuntan a la consolidación de un pensamiento formal mediante, el razonamiento lógico , la utilización del vocabulario y las interpretaciones precisas, que le permitan establecer las relaciones adecuadas para matematizar y modelar adecuadamente. Además posibilitan la construcción del saber como un proceso dinámico en diferentes niveles y articulado en diversos contextos.
El siguiente trabajo presenta una propuesta de actividades para desarrollar con aportes de contenidos de Algebra Lineal en relación con Análisis Estadístico y Geometría Analítica.
Los métodos del Algebra Lineal están presentes en las bases de diversas disciplinas científico-técnicas que son parte del trabajo cotidiano del ser humano y que requieren la solución constante de problemas teórico-prácticos, por ello es necesario que el estudiante

logre en su formación capacidad de análisis, síntesis y generalización con los contenidos de esta asignatura.
Se pretende consolidar el aprendizaje del tema autovalores y autovectores desde el Álgebra Lineal en forma integrada y articulada con otras asignaturas Cálculo, Estadística, Geometría Analítica, (Beauregard, Fraleigh,1989) (Kolman, 1999) facilitando la comprensión de los objetos matemáticos involucrados.
Adquirir capacidad de resolver problemas, usando las herramientas aprendidas, para conectar en forma vertical conocimientos matemáticos en la carrera de grado y/o realizar un óptimo desempeño en carreras de posgrado
En relación a los contenidos generales que se necesitan abordar para esta propuesta, se pueden mencionar:

- ✓ Definición y cálculo de Autovalores y Autovectores
- ✓ Matrices Definidas Positivas
- ✓ Formas Cuadráticas Reales
- ✓ Diagonalización de Matrices Simétricas
- ✓ Aplicaciones a Geometría Analítica: Secciones Cónicas y Cuádricas
- ✓ Aplicación a la Estadística: Distribución Chi- Cuadrado
- ✓ Utilización del Software seleccionado

La propuesta se lleva a cabo, presentando el planteo del problema vinculado a la diagonalización de una forma cuadrática; el cual es aplicado desde dos ópticas diferentes:

- ✓ Desde el Álgebra Lineal, a fin de obtener la ecuación estándar de la cuádrica correspondiente (Anton ,1995) (Florey, 1980), y lograr su vinculación con la Geometría Analítica por medio de la visualización gráfica (Nakos, Joyner,1999) (Gareth, 2002) (Grossman, 1999).
- ✓ Desde el Análisis Estadístico, tomando en cuenta la utilidad de las matrices, del hecho que pueden representar un arreglo de muchos números como un solo objeto designado mediante un solo símbolo, (Johnston , 1979),(Garcia Barbancho,1962) permitiendo que las relaciones entre las variables pueden expresarse de un modo conciso, se trata de determinar , a partir de un vector aleatorio de componentes normales estándar, determinar cuantos grados de libertad tiene la distribución Chi-Cuadrado de la suma de los cuadrados de sus componentes (Christ,1974).

<u>Actividad propuesta para Algebra Lineal - Estadística</u>

Sea $\underset{\sim}{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ un vector aleatorio tal que $\forall i = 1...3$: $y_i \sim N(0,1)$, y sea A= $\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{-2}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{-2}{6} & \frac{4}{6} & \frac{-2}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{-2}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$,

veamos como se distribuye : $\underset{\sim}{Y}'.\ A\ .\underset{\sim}{Y}$

Pasos seguidos en la búsqueda de solución a la actividad

1- Si se tiene en cuenta la definición de Variable Aleatoria Chi-Cuadrado:
"Una variable aleatoria U se dice que tiene distribución Chi-Cuadrado Central, con n-grados de libertad, representa la suma de n-variables aleatorias normales estándar independientes elevadas al cuadrado"

Esto es:

Si $z_1, z_2, \ldots, z_n$ son variables aleatorias independientes, tales que

$\forall i = 1 \ldots n$: $z_i \sim N(0,1)$, entonces $U = z_1^2 + \ldots + z_n^2 \sim \chi^2_{(n)gl}$

Observemos que:

$$U = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2 = (z_1 \ z_2 \ldots z_n) \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \ldots \\ z_n \end{pmatrix} = \underset{\sim}{Z}' \cdot \underset{\sim}{Z} = \underset{\sim}{Z}' \cdot I \cdot \underset{\sim}{Z}$$

donde: $\underset{\sim}{Z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \ldots \\ z_n \end{pmatrix}$ vector aleatorio de variables aleatorias normales estándar.

I : Matriz identidad de orden n, y posee entre sus propiedades, que:

$$\begin{cases} \text{I es simétrica} \\ \text{I es idempotente (I . I = I)} \\ \text{rg (I) = n} \end{cases}$$

El rg (I) entonces coincide con los grados de libertad de la variable Chi – Cuadrado

Esto puede ser generalizado de la siguiente forma:

"Si $\underset{\sim}{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$ es un vector aleatorio tal que $\forall i = 1 \ldots n$: $y_i \sim N(0,1)$, y $A_{n.n}$ es una matriz real,

cuadrada, simétrica e idempotente, entonces $\underset{\sim}{Y}' \cdot A \cdot \underset{\sim}{Y} \sim \chi^2_{rg(A)}$".

2- Se tiene en este caso : $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{-2}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{-2}{6} & \frac{4}{6} & \frac{-2}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{-2}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$, se ve que : A es simétrica.

Es idempotente, ya que A.A= A Se observa también que rg (A)=1.

Calculando los autovalores de A, se tiene $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = \ \text{Raíz Doble} \end{cases}$

Luego del cálculo de los autovectores asociados se puede definir la matriz P ortogonal.

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{30} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{6} & 0 & 5/\sqrt{30} \end{bmatrix} \quad \text{donde } P'.A.P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D$$

Como P es matriz ortogonal, entonces $P^{-1} = P'$.

Luego : $P'.A.P = D \Rightarrow A = P.D.P'$ ❶

Sea la transformación $Z = P'.Y$ ❷ , se puede probar que $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ es tal que

$\forall i = 1...3 : z_i \sim N(0,1)$, z_1, z_2, z_3 independientes. Luego :

$$\underset{\sim}{Y}'.A.\underset{\sim}{Y} \underset{❶}{=} \underset{\sim}{Y}'.P.D.P'.\underset{\sim}{Y} = (P'.\underset{\sim}{Y})'.D.(P'.\underset{\sim}{Y}) \underset{❷}{=} \underset{\sim}{Z}'.D.\underset{\sim}{Z} =$$

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = Z_1^2 \sim \chi^2_{1gl = rg(A)}$$

3- Se obtuvo que :

$$\left.\begin{array}{l} \underset{\sim}{Y}'.A.\underset{\sim}{Y} = Z_1^2 \\ Z_1 \sim N(0,1) \\ Rg(A) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{\sim}{Y}'.A.\underset{\sim}{Y} \text{ se distribuye } \chi^2_{rg(A)=1}$$

<u>Actividad propuesta para Algebra Lineal -Geometría Análitica</u>

Dada la ecuación $f(x,y,z) = \frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}xy + \frac{1}{3}xz + \frac{2}{3}y^2 - \frac{2}{3}yz + \frac{1}{6}z^2 + \frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y - 4 = 0$

Reconocer la superficie cuádrica y representarla gráficamente en un sistema sin rotación.

Pasos seguidos en la búsqueda de solución a la actividad

1- Construir la expresión matricial de la función: $X^TAX + KX + h = 0$ ① Donde :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{-2}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{-2}{6} & \frac{4}{6} & \frac{-2}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{-2}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \qquad K = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \end{bmatrix} \qquad h = [-4]$$

2- Hallar un sistema ortogonal para diagonalizar ortogonalmente a A.

2.1- Determinar los eigenvalores y eigenvectores asociados a A.

Se plantea la ecuación característica y se determinan los eigenvalores :

$$\det(A - \lambda I) = \det\left[\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{-2}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{-2}{6} & \frac{4}{6} & \frac{-2}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{-2}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \lambda^3 - \lambda^2 = 0$$

Eigenvalores : $\lambda_1 = 1$ (simple) y $\lambda_2 = 0$ (doble)

Se determina una base de los espacios propios asociados a los eigenvalores :

Para $\lambda_1 = 1$ (simple) , se resuelve el sistema lineal homogéneo : $(A-\lambda_1 I).\ X=0$

Se obtiene

$$\begin{bmatrix} \frac{-5}{6} & \frac{-2}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{-2}{6} & \frac{-2}{6} & \frac{-2}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{-2}{6} & \frac{-5}{6} \end{bmatrix} .\ X = 0 \text{ ; esto es : } X = \begin{bmatrix} x \\ -2x \\ x \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{con } x \neq 0$$

Para $\lambda_2 = 0$ (doble) , se resuelve el sistema lineal homogéneo : $(A-\lambda_2 I).\ X=0$

Se obtiene

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{-2}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{-2}{6} & \frac{4}{6} & \frac{-2}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{-2}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} .\ X = 0 \text{ ; esto es : } X = \begin{bmatrix} -z+2y \\ y \\ z \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{con } y, z \neq 0$$

2.2- Determinar una base ortonormal para cada subespacio propio:

Para $\lambda_1 = 1$ (simple) , se tiene: $B_{\lambda_1 = 1} = \left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \right\}$

Para $\lambda_2 = 0$ (doble) , se tiene: $B_{\lambda_2 = 0} = \left\{ \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/\sqrt{30} \\ 2/\sqrt{30} \\ 5/\sqrt{30} \end{bmatrix} \right\}$

2.3- Determinar un sistema ortogonal para diagonalizar ortogonalmente a A.

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{30} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{6} & 0 & 5/\sqrt{30} \end{bmatrix}$$

2.4- La transformación ortogonal , que elimina la rotación es **X = P X'**

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{30} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{6} & 0 & 5/\sqrt{30} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

2.5- Aplicando a ① , la transformación ortogonal , se obtiene:

$$(P X')^T \; A \; (P X') + K \; (P X') + h = 0 \quad ②$$

Llamando : $D = P^T A P$, se tiene :

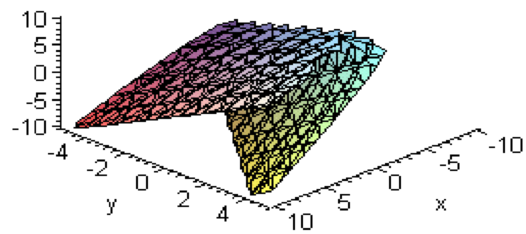
$$(X')^T \; D \; (X') + (K P)(X') + h = 0 \quad ③$$ Donde:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (K P) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad h = [-4]$$

La expresión canónica es : $(x')^2 + (y') - 4 = 0$ Cilindro Parabólico

Informe gráfico

A continuación, con software Maple (Rincón, Garcia, Martinez,1995) (Carrillo de Albornoz Torres, Llamas Centeno,1995), se presentan las gráficas en el sistema (x, y, z), en el sistema (x', y', z'), y como se rotaron los ejes según la transformación ortogonal:



.

Fig.1: Superficie cuádrica en un sistema en el que no se ha eliminado la rotación.

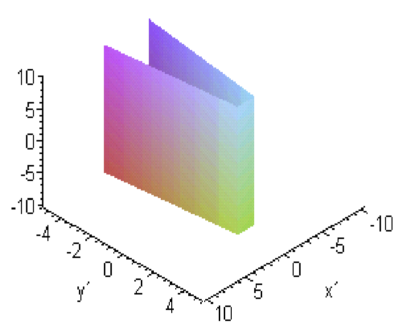


Fig. 2 : Superficie cuádrica en un sistema en el que se ha eliminado la rotación

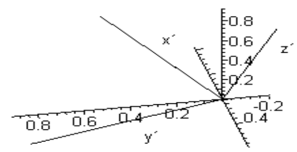


Fig.3 : Sistema original y nuevo sistema

Conclusiones

- Las Formas Cuadráticas son de gran utilidad en la Estadística, ya que bajo ciertas consideraciones, están asociadas a la forma general que poseen las variables aleatorias con distribución Chi-Cuadrado.
- Si la matriz asociada a la forma cuadrática es simétrica e idempotente posee autovalores unos ó ceros, únicamente, y éstos últimos permiten eliminar variables superfluas y/o reducir el número de términos cuadráticos en una superficie cuádrica en un sistema ortogonal sin rotación.
- A pesar de los distintos enfoques que se involucran en la puesta en marcha de esta propuesta, es importante destacar que una misma herramienta del Algebra Lineal, puede dar respuesta a temáticas de Geometría Analítica, Análisis estadístico, etc.
- Se espera que, al mostrar estos desafíos - modelar diferentes situaciones -, se genere en el sujeto una actitud más crítica y de análisis profundo al momento de interpretar conceptos y resultados obtenidos.
- Estas aplicaciones del Algebra Matricial son importantes en los campos de la investigación científica, donde el conocimiento de estos saberes permite reflejar las características del mundo real. Por ello resultaría beneficioso presentarlas en cursos de Matemática Superior.

Referencias Bibliográficas

Anton ,H.(1995)-“Introducción al Álgebra Lineal”- México-Ed: Limusa

Beauregard,R.-Fraleigh,J.(1989)-“Algebra Lineal”-Argentina-Ed: Addison Wesley Iberoamericana

Carrillo de Albornoz Torres, A.- Llamas Centeno,I. (1995)- “MAPLE V- Aplicaciones Matemáticas para PC” –Argentina-Ed: McGraw-Hill

Christ,C. (1974)- “Modelos y Métodos Econométricos” -México –Ed: Limusa.

Florey, F. (1980)-“Fundamentos del Álgebra Lineal y Aplicaciones ”-México- Ed: Prentice Hall

Garcia Barbancho,A. (1962)- “Fundamentos y Posibilidades de la Econometría”- Barcelona – Ed: Ariel

Gareth, W.(2002)- ” Algebra Lineal con Aplicaciones” - México Ed: McGraw-Hill

Grossman, S. (1999)- “Algebra Lineal”-México- Ed: McGraw-Hill

Johnston , J. (1979)- “ Métodos de Econometría” –Argentina- Ed: Vicens Vives

Kolman, B.(1999)- “Algebra Lineal con Aplicaciones y Matlab”-México- Ed: Prentice-Hall

Nakos,G.-Joyner,D. (1999)-“Algebra Lineal con Aplicaciones”-México-Ed: Thomson-Internacional

Rincón, F.- Garcia,A.- Martinez,A.(1995)- “Cálculo científico con Maple” –España-Ed: Rama