IMÁGENES CONCEPTUALES SOBRE LÍMITE FUNCIONAL EN ESTUDIANTES DE PROFESORADO DE MATEMÁTICA

Vilma Colombano
Universidad Nacional de General Sarmiento – Argentina
vcolomba@ungs.edu.ar
Nivel Terciario

Resumen

Desde la práctica docente suele percibirse que la comprensión de la noción límite de funciones de una variable real a valores reales, es raramente lograda por los estudiantes. Si la enseñanza enfatiza la manipulación algebraica y las tareas de aprendizaje se reducen al uso de ciertas "rutinas" que, en varias oportunidades, permiten resolver correctamente la situación planteada, no se advierte vínculo con el concepto y su aprendizaje queda sin alcanzarse.

La complejidad del concepto hace que los estudiantes recurran a ideas personales de la noción que se van formando durante el proceso de aprendizaje, denominadas modelos intuitivos de límite, y que resultan influenciadas por concepciones propias originadas a partir del uso del término en la vida diaria. Estos modelos que subyacen en la mente del estudiante asociados a procedimientos, conceptos, símbolos y propiedades conforman parte de lo que Tall y Vinner (1981) denominan *imagen conceptual* de la noción.

Un estudio llevado a cabo con estudiantes del profesorado de Matemática nos permitió analizar los modelos intuitivos de límite con los que operan. A partir de esa información, reportamos en este trabajo los resultados de un estudio realizado para caracterizar la imagen conceptual de la noción de límite que tienen un grupo de estudiantes de Profesorado de Matemática.

<u>Palabras clave</u>: imagen conceptual - concepciones espontáneas - registros de representación semiótica- modelos intuitivos de límite.

Marco Teórico

En este trabajo tomamos elementos del Enfoque Cognitivista que resulta apropiado para estudiar nociones avanzadas de Matemática, analizando su complejidad, con el objeto de describir los procesos cognitivos que los estudiantes ponen en juego o deberían poner en juego para aprenderlos.

En virtud de los objetivos de este trabajo, tomamos los siguientes conceptos.

Registros de representación semiótica: Esta noción ha sido muy desarrollada y difundida. Para detalles primarios de ella sugerimos al lector considerar el trabajo de Duval (1996) o de Blázquez y Ortega (2001) quienes han descrito los modos en los que los distintos registros de representación podrían manifestarse para el concepto de límite. Los autores expresan que cada sistema de representación oculta o muestra algo. El uso del sistema verbal evidencia una concepción de límite de carácter dinámico, el algebraico muestra una concepción más formal de límite estática y abstracta con alto grado de precisión, el sistema numérico muestra una idea dinámica de límite donde la protagonista es la aproximación y el sistema gráfico más estático que el numérico y menos formal que el algebraico se centra en el aspecto visual visualizando la relación entre las variables en juego.

Concepciones espontáneas: Estudios llevados a cabo por Cornu (1991) demostraron que los estudiantes poseen *concepciones espontáneas* personales que provienen de su experiencia cotidiana e influyen directamente sobre la idea matemática que construirán de ciertos conceptos tras su enseñanza. Estas concepciones son previas a la enseñanza de la noción y permanecen formando parte de sus ideas durante mucho tiempo. Aparecen conforme a la situación problemática a resolver, pudiendo provocar contradicciones con la definición de la noción que pueden o no ser evidenciadas por el estudiante.

Imagen conceptual : Tall y Vinner (1981), precursores del Pensamiento Matemático Avanzado, centran su trabajo en analizar cómo son concebidas las definiciones matemáticas por los estudiantes y como éstas van variando con el conocimiento de la teoría formal. La elección didáctica del docente sin dudas condiciona el aprendizaje del estudiante. Lo que decida incluir en sus clases, desde modos intuitivos de acercarse a un concepto hasta la formulación precisa del concepto, generan parte de lo que se denomina la *imagen conceptual* de la noción matemática. Tall y Vinner (1981) consideran que existe una distinción entre el concepto matemático formalmente definido y el proceso cognitivo por el cual es concebido por el estudiante. Introducen la noción de imagen conceptual para describir una estructura cognitiva ligada al concepto que está formada por imágenes mentales, concepciones espontáneas, propiedades, procesos, notaciones, utilidades, metáforas, gráficos, descripciones coloquiales, etc., con las que el estudiante asocia el concepto en cuestión. Es decir, es lo que el individuo entiende del concepto en forma primaria. Muchas veces predominan en la imagen conceptual de una noción representaciones no verbales por el hecho de que en la memoria de un individuo esta fase es posterior a la aparición de representaciones visuales. Cuando un estudiante escucha el nombre de un concepto matemático llegan primero a su mente representaciones visuales y/o expresiones relacionadas con el mismo, y en una fase posterior logrará expresarlo en forma verbal (Font, 2002). Esta imagen que se va desarrollando está compuesta por distintas porciones relacionadas pero no necesariamente correctas matemáticamente. Cuando el estudiante se enfrenta a una tarea dentro de un determinado contexto, alguna o algunas de esas porciones se activan y solo al evocar una parte correcta con una incorrecta de manera simultánea se manifiesta una incoherencia y puede producirse un sentido real de conflicto o confusión.

Teoría APOS (action, process, object, schema): Esta teoría, debida a Dubinsky (1991), presenta un modelo que describe la construcción del conocimiento a partir de cuatro etapas básicas*: acción, proceso, objeto y esquema*. Por razones de espacio, para mayores detalles remitimos al lector al texto citado o al de Trigueros, (2005).

Otro elemento teórico desarrollado por Williams (1991) y tenido en cuenta por Juter (2007) para su trabajo se refiere a los *modelos intuitivos* de límite presentes en estudiantes que han recibido la enseñanza de la noción. Tienen una vinculación directa con las concepciones espontáneas y forman parte de la imagen conceptual del concepto que posee el sujeto. Estos modelos resultan validos para resolver ciertas actividades, pero no todos son matemáticamente correctos. Williams define seis modelos de límite, de los cuales los dos últimos resultan matemáticamente correctos:

Dinámico-teórico: el límite es un valor que describe cómo una función se mueve cuando x tiende a un cierto punto.

Dinámico-práctico: en este modelo el límite se decide insertando valores de x cada vez más cercanos a un número dado hasta que el valor del límite es alcanzado.

Cota: el valor de un límite es un número más allá del cual la función no puede pasar.

No alcanzable: el límite es un valor al cual una función se aproxima pero nunca alcanza.

Formal: corresponde a la definición formal de límite. El modelo se caracteriza por reconocer la arbitrariedad de la cercanía de las imágenes de la función respecto del límite restringiendo los valores de x a un entorno de punto de estudio del límite.
Aproximación: el valor del límite es una aproximación que puede ser hecha tan precisa como se desee.

Metodologia

El objetivo del trabajo es *caracterizar imágenes conceptuales de estudiantes del Profesorado de Matemática* del Instituto José C. Paz ubicado en la ciudad de J. C. Paz, Buenos Aires, Argentina. Pudimos acceder al video filmación de las clases del tema en un curso y al trabajo individual con cinco estudiantes de diversos rendimientos.
Hemos realizado las siguientes actividades de investigación:

- *Análisis de las clases dictadas en la materia y de los trabajos prácticos que el docente asignó a sus estudiantes*: esto se realizó con la intención de estudiar el proceso de enseñanza pues éste incide en la conformación de la imagen conceptual.
- *Análisis de entrevistas semi-estructuradas en términos de imágenes conceptuales presentes en estudiantes*: las entrevistas se implementaron a cinco estudiantes. Fueron efectuadas luego de la aplicación de un test a partir del cual se obtuvo la información sobre los modelos de límite presentes luego de la enseñanza.

Aquí nos centramos en recuperar el trabajo con las entrevistas pues éstas nos dan información de las imágenes conceptuales presentes en los estudiantes. Complementado esta información con el análisis de las clases y guías de trabajos prácticos nos permitirá caracterizar las imágenes conceptuales de los estudiantes que participaron del estudio.

Desarrollo

Detalles del estudio previo que describe los modelos intuitivos presentes en estudiantes del Profesorado pueden verse en Colombano, Rodríguez (2008). Aquí presentamos una síntesis de los resultados obtenidos.
Sobre los modelos intuitivos presentes en estudiantes del Profesorado: Fruto del estudio previo recién mencionado. Se pudo apreciar que la mayoría del grupo considera como adaptados a su idea de límite dos modelos intuitivos, el dinámico-teórico y el no alcanzable, coincidiendo con los resultados de los estudios efectuados por Juter, 2005a y 2007 y Williams, 1991. Esto muestra que los estudiantes, a pesar de conocer la definición formal, siguen presentando modelos intuitivos del concepto. Coincidiendo con lo que expresa Cornu (1991) utilizan a menudo en sus argumentaciones las expresiones “tiende a” entendida como “aproximarse sin alcanzar” y “límite” entendida como “no puede pasar de” o “un valor al cual la función se acerca pero no puede alcanzar”. En numerosos casos adecuan esa idea de límite a la situación a resolver. La mayoría de los estudiantes opera con los modelos dinámicos, esto podría ocurrir porque tanto el dinámico-práctico como el teórico asocian la búsqueda de un límite con manipulación en los registros numérico y gráfico, ambos de uso muy habitual en los estudiantes.
Respecto de las clases dadas por el docente y los trabajos prácticos referentes al tema: Podemos decir que la metodología utilizada por el docente en sus clases no atiende a que el estudiante avance del nivel de acción a los de proceso u objeto pues no hubo actividad autónoma por parte del estudiante. Esto sin dudas obtura la posibilidad, para el estudiante, de encapsular la noción con lo que la comprensión del concepto de límite queda circunscripta a las actividades que cada sujeto realice fuera del aula. No se contrastaron concepciones espontáneas de la noción en ningún momento de las clases pues no hubo

lugar para ello dado que el docente expuso durante todas las clases sin intervención de los estudiantes. Respecto de su decisión sobre el uso de diferentes registros, utilizó el registro coloquial con presencia de metáforas, simbólico al momento de definir en concepto de límite, el numérico sólo fue usado para aproximarse al concepto de límite de una sucesión y el gráfico lo utilizó como medio para analizar el comportamiento de algunas funciones en las cercanías del punto de análisis del límite. En la guía de trabajos prácticos dedica unos pocos ejercicios al trabajo sobre la noción de límites. Intenta en un primer momento acercar al estudiante a la noción intuitiva de límite mediante el uso del registro numérico como medio para proponer el valor de un límite, cuestión que no fue expresamente trabajada durante las clases. Este hecho permitiría fomentar en el estudiante la creencia de que el modelo dinámico-práctico es válido para conocer resultados de límites. En relación con la teoría APOS esta primera actividad deja clara evidencia de que el estudiante comienza el proceso de comprensión de la noción en una etapa de acción, donde el docente le indica qué debe hacer para enfrentar la situación a resolver y esto es: construir una tabla de valores. Esta cuestión se contradice con la secuencia utilizada por el docente para conducir el aprendizaje de la noción durante las clases, en ningún momento recurre a la tabla de valores como medio para encontrar el posible valor del límite, todo lo contrario construye la gráfica de las funciones que propone a partir de la extracción de datos de la expresión algebraica sin recurrir a la tabla de valores. En los ítems siguientes solicita que calculen la relación entre ε y δ, conocido el valor del límite, además de encontrar un intervalo con los valores que puede tomar x partiendo de un valor de épsilon dado como dato. No otorgan complejidad alguna en su resolución por tratarse de funciones muy elementales, además de no ser un desafío para los estudiantes resolverlos, por similitud con los modelos resueltos en la clase. Si bien aquí el docente retoma la definición de la noción, el estudiante no debe interpretarla para hallar el valor del límite en consecuencia recurre a utilizar un mecanismo con un manejo elemental de simbología específica. Es una situación que no aporta evidencia alguna de la idea de límite con la que el estudiante trabaja. No lo obliga a pensar en qué hacer para dar respuesta al ejercicio, por lo tanto no requiere de toma de decisiones anclándolo en la etapa de acción según la teoría APOS.

Caracterización de las imágenes conceptuales de los estudiantes:

Las entrevistas a los cinco alumnos se llevaron a cabo 6 meses después de haber aplicado el test, cuando los alumnos ya habían finalizado la cursada de la materia, y habiendo realizado el estudio sobre los modelos intuitivos que persisten luego de la enseñanza.

A partir del análisis de la información arrojada por las entrevistas, observaciones de clases y guías de trabajos prácticos consideramos que las imágenes conceptuales de los estudiantes entrevistados podrían estar formadas inicialmente por: concepciones espontáneas; símbolos (ε,δ, $\rightarrow$); expresiones (punto de acumulación, entorno); tablas de valores; gráficos de funciones discontinuas; propiedades que facilitan el cálculo de límite. Pero como la imagen conceptual es propia de cada estudiante esbozamos a continuación la conformación particular de cada uno de los cinco estudiantes.

P: Confronta el modelo intuitivo no alcanzable, considerado por ella como correcto, y su idea personal de límite donde considera que es un valor que una función alcanza. Utiliza la expresión "acercarse sin llegar" y reconoce que la piensa para los valores de *x* cercanos al punto de acumulación. Esta situación nos permite vislumbrar que confunde los términos usados en las definiciones. Podemos expresar que evocando a Cornu (1991) en este caso la palabra límite tiene un significado particular como "valor al cual la función se aproxima pero no llega a alcanzar". Esa idea que permanece en su mente y forma parte de su imagen conceptual le impide pensar que la función puede alcanzar, no alcanzar o superar el valor del límite. Consideramos que posiblemente el hecho de pensar en valores de x muy próximos al punto de acumulación la limite a considerar las imágenes de la función en una franja muy pequeña y pierda de vista el comportamiento de la función. Advertimos además que la alumna utiliza diferentes expresiones al momento de expresar el valor de un límite "el límite tiende a L" y "el límite es L". Su distinción está focalizada en la información que tiene de la función. Por ejemplo, si dispone de puntos de una tabla de valores, lo único que ella puede afirmar es que el límite tiende a L, mientras que si tienen ante su vista el gráfico de la función afirma que el límite es L. Tal vez esta distinción la haga porque los distintos registros de representación semiótica le permiten extraer a ella distinto tipo de información que la orienta a expresar el valor de un límite como un valor o una tendencia. Observamos que tiene algunos recuerdos de los símbolos que se utilizan, pero considera el análisis del límite a partir de los valores de x cercanos al punto de acumulación. El registro gráfico le otorga seguridad y bajo este sustento no le cabe duda que el límite es un valor L. Tal vez esto sea un signo de que está tratando de dejar su concepción de límite como proceso para pasar a objeto. Ha formado una imagen conceptual de la noción sustentada en una mezcla de modelos no correctos matemáticamente (no alcanzable, dinámico práctico), símbolos y notaciones que le permiten resolver actividades pero no justificarlas adecuadamente.

<u>S:</u> Posee una imagen conceptual de la noción de límite formada por un conjunto de conceptos y propiedades inherentes a la misma, pero desconectadas de lo que realmente es el concepto de límite de una función. Coincidiendo con Tall y Vinner (1981), consideramos que esas partes que forman su imagen conceptual no son coherentes entre sí pero ella no lo advierte, evoca cada una de manera independiente para justificar la respuesta a la actividad, es decir si la función lo amerita, justifica el límite bajo un modelo no alcanzable pero si tiene que dar respuesta al límite de variable finita de una función constante no duda en justificar el resultado de ese límite valiéndose de una propiedad, sin tener en cuenta la idea de límite. Recurre en numerosas oportunidades al registro numérico como recurso para hallar el valor de un límite, cuestión que coincide con el modelo dinámico-práctico que consideró como verdadero. Notamos que recuerda la definición formal: entiende cómo tomar cada entorno, lo muestra con un gráfico, reconoce la arbitrariedad de épsilon, la dependencia del delta de él, pero no recurre a ella para dar respuesta a las actividades. Esto nos orienta a pensar que los modelos que subsisten en su mente resultan suficientes para emitir los resultados requeridos, a pesar de no ser matemáticamente correctos.

Lo expresado anteriormente nos da la evidencia para sostener que de acuerdo a la teoría APOS, esta alumna está a nivel proceso, logró incorporar ciertas acciones a su conocimiento y las utiliza, sin indicación externa alguna, cuando lo considera necesario y en función de la situación que debe resolver.

<u>D</u>: El centro de su análisis está en el entrono reducido, enfatiza la idea de punto de acumulación como valor al cual se puede acercar pero nunca llegar a tocarlo. Este proceso, por lo tanto repercute directamente sobre el valor que va a considerar como límite. Resuelve situaciones bajo un modelo dinámico-práctico imagina valores de variable muy cercanos al punto de acumulación de tal manera que sus respectivas imágenes se acercan al valor que considera como límite. En sus términos "estar muy cerca" del punto de acumulación o del valor del límite significa estar dentro del entorno. Esto lo conduce a imaginar o escribir una tabla de valores que le permita corroborar su respuesta en la mayoría de los casos, a pesar de recurrir al gráfico si lo considera necesario. Reconoce que puede recurrir a la definición formal si la situación lo amerita. En términos de Dubinsky

(1996), este alumno está en la etapa de proceso. A pesar de reconocer la validez de la definición formal de límite para dar respuesta a algunas situaciones, no ha logrado aún encapsular esta noción como objeto matemático.

Su insistencia en centrar el análisis en el comportamiento de las imágenes de la función a partir de proponer valores de *x* en las proximidades del punto de acumulación le obstaculiza tener una visión más amplia del comportamiento de la función. Esto lo conduce a adaptar un modelo a la situación planteada o bien poner en juego un modelo u otro para dar una respuesta. Quizás las situaciones propuestas para la enseñanza del concepto hayan colaborado a formar modelos mentales de la noción, que le sirven para dar respuesta satisfactoria a la mayoría de las situaciones que se le presentan. No logra producir en su mente una definición conceptual, posee una imagen conceptual de la noción formada por ideas que no guardan coherencia entre sí, tomando una u otra para dar respuesta a la situación, sin advertir conflicto. Estas ideas corresponden a los modelos intuitivos dinámico-práctico y no alcanzable influenciados por su concepción espontánea como algo a lo que se puede acercar, inclusive alcanzarlo. Cabe aclarar que esta concepción espontánea acciona sobre la noción matemática de límite lo que lo conduce a generar respuestas distintas si lo analiza desde el contexto físico o matemático.

<u>MR</u>: Considera que los modelos difieren unos de otros en el grado de exactitud. Para la afirmación "el valor de un límite describe como una función se mueve cuando *x* tiende a un cierto punto" pone énfasis en que el hecho de que la función "se mueva" no describe fielmente lo que él entiende por límite. Considera más apropiado decir que es el valor al que se acerca la función, más que movimiento ve un acercamiento de las imágenes de la función al valor del límite. Este primer análisis nos da la pauta de que con la expresión "acercarse a" describe el proceso mental de imaginar los puntos de una gráfica cada vez más cerca del valor del límite. Para hallar un límite piensa en un valor de *x* genérico con su correspondiente imagen, con el objeto de esbozar en su mente un comportamiento de la función. La falta de necesidad de recurrir a una tabla de valores para analizar las imágenes de la función cerca del punto de estudio del límite, nos orienta a no posicionarlo dentro del modelo dinámico teórico. Reconoce la definición formal como camino seguro para hallar el valor de un límite pero al momento de dar respuesta a una actividad traslada el mecanismo para graficar una función en el plano al estudio del límite en un punto. Más allá del error en qué entorno se genera primero podríamos expresar que este alumno, en términos de Dubinsky (1996), ha superado las etapas de acción y proceso. Trata de no recurrir a tablas de valores, sino que imagina el comportamiento de la función en forma global, más allá del proceso de evaluar la misma en valores de *x* cercanos al punto de estudio del límite. Podríamos decir que opera con un modelo dinámico-práctico ya que no recurre a la definición formal, pero que logró encapsular ese proceso y ver el límite como objeto matemático. Tiene claro que el valor del límite es un único valor, totalmente independiente de las imágenes de la función en las cercanías del punto de análisis del límite. Debido a su metodología personal para analizar el límite sostiene que las representaciones con las que se encuentra más cómodo son la algebraica y la gráfica (justamente las que tienen mayor nivel de generalidad), no le gusta recurrir a la tabla por considerarla limitada. Dentro de su imagen conceptual predomina la idea de movimiento. Pone el foco en el movimiento de las variables (*x*) muy cerca del punto de acumulación, no en valores particulares de ellas para imaginarse la gráfica de la función.

<u>ML</u>: Esta alumna tiene la idea de hallar el límite por aproximaciones, situación que nos conduce a enfrentar sus respuestas con el modelo por Aproximación que inicialmente

consideró como no adecuado a su idea de límite. Si bien inicialmente sostenía que las aproximaciones no podían ser exactas, entendió que puede encontrar el valor de un límite como una aproximación tan exacta como desee. Reconoce como incorrecto el modelo no alcanzable y dentro de los que consideró adecuados sostiene que el dinámico-teórico se ajusta más a su idea de límite, luego de haber analizado el alcance limitado de la tabla de valores. Pero no está demasiado convencida con la expresión "cómo se mueve la función", considera que debería estar más claro qué pasa con las imágenes de la función cerca del punto de estudio del límite, en consecuencia piensa en el límite como aproximación más cercano a lo que entiende por límite de una función. Notamos que en su imagen conceptual está presente la idea de punto de acumulación como elemento importante al momento de analizar el límite de una función, pero no hace mención alguna a las imágenes de la misma y su relación con el valor del límite. Podemos concluir que en su mente subyacen ideas de la noción no cercanas a la definición conceptual. Quizás el uso del modelo que le permite considerar el límite como una aproximación le esté provocando un primer acercamiento a la definición formal, a pesar de que hay términos en la misma que aún no logra entender en profundidad.

Discusión

Los alumnos que se presentaron para las entrevistas, reconocieron como correctos varios modelos intuitivos, a pesar de que más tarde no los usaron en la resolución de las actividades propuestas, o bien los usaron pero adecuando la elección del mismo a la situación. Esto deja evidencia de que en la imagen conceptual de los estudiantes subyacen ideas que no son coherentes entre sí y el alumno puede no advertirlo. Si el estudiante, apelando únicamente a un modelo, puede dar una respuesta correcta en una actividad, no genera el conflicto cognitivo que le permita evidenciar la no adecuación del modelo y la necesidad de acercarse a la definición formal como camino seguro para dar una respuesta.

Advertimos además que podría influir el tipo de registro de representación que predomina en cada modelo. Por ejemplo la mayoría de los estudiantes opta por los modelos dinámicos a la hora de resolver una actividad. Esto podría ocurrir porque tanto el dinámico-práctico como el teórico asocian la búsqueda de un límite con manipulación en los registros numérico y gráfico, ambos de los de uso más habitual en los estudiantes al trabajar con funciones.

Como producto de la enseñanza el estudiante advirtió que no es condición necesaria que la función sea continua en el punto de estudio del límite para calcularlo. Quizás esta situación accione sobre la imagen conceptual del estudiante y piense que el hecho de no tener en cuenta el punto de acumulación implica que el valor del límite no puede ser alcanzado por la función, manifestándose el modelo no alcanzable. El docente en sus clases no utilizó la tabla de valores para acercar al estudiante a la idea intuitiva de límite funcional, pero en la guía de trabajos prácticos propone ejercicios donde solicita expresamente que calculen el límite mediante la construcción de una tabla de valores, esto nos orienta a pensar que considera el registro numérico como un elemento altamente utilizado y conocido por los estudiantes, por lo tanto utilizarlo inicialmente para calcular del valor del límite no significaría obstáculo alguno. Entendemos que la utilización de distintas representaciones en la enseñanza favorece la construcción de una imagen conceptual más amplia y operativa. Por consiguiente, y en contraposición con lo anterior, el uso abusivo de un tipo de registro en la enseñanza de la noción podría obstaculizar su aprendizaje.

Tenemos en cuenta que el trabajo efectuado fue de tipo exploratorio, de modo que las conclusiones por supuesto son relativas. A partir de estas consideraciones, podemos expresar que la complejidad que envuelve la noción de límite hace que se presente difícil para su abordaje. Ante esta situación los estudiantes recurren a modelos intuitivos que se generan en sus mentes como producto de sus concepciones espontáneas y la enseñanza formal de la noción. Sin lugar a dudas la elección didáctica del docente influye en la conformación de esa imagen conceptual, en nuestro caso aportó además de la simbología propia del concepto y las nociones de punto de acumulación, entorno reducido y entorno, gráficos de funciones con discontinuidad evitable y relación de conceptos con situaciones cotidianas. Por su parte las guías de trabajos prácticos orientaron el estudiante al uso del Modelo dinámico-práctico y permitieron obtener el límite como valor al que tienden las imágenes de la función. Como cierre de este trabajo podríamos decir que en la imagen conceptual de los estudiantes entrevistados encontramos que existe: una alta persistencia de los modelos intuitivos, un conocimiento de la simbología utilizada en la definición pero con falta de claridad en cuanto al significado y un uso frecuente de los registros numérico y gráfico.

Referencias Bibliográficas

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 4(3)*, 210-230.

Colombano, V. y Rodríguez, M. (2008). Un estudio inicial sobre modelos espontáneos de límite funcional a Nivel Superior. En M. Ascheri, R. Pizarro y N. Ferreyra (Eds). *Memorias de la segunda Reunión Pampeana de Educación Matemática*, (pp 190-198). Argentina: EdUNLPam CD Rom: ISBN 978-950-863-105-3.

Cornu, B. (1991). Limits. En D.Tall (Ed). *Advanced Mathematical Thinking*, (pp 156-163) Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*. *8(3)*, 24-41.

Dubinsly, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (Ed). *Advanced Mathematical Thinking*, (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer.

Duval, R. (1996). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed). *Investigaciones en Matemática Educativa*, (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Font, V. (2002). Una organización de los programas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. *Revista EMA*. *7 (2)*, 127-170.

Juter, K. (2005a). Limits of functions – how do students handle them? *Pythagoras. 61*, 11-20.

Juter, K. (2007). Students´ Conceptions of Limits: High Achievers versus Low Achievers. *The Montana Mathematics Enthusiast*. *ISSN 1551-3440. 4(1)*, 53-65.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*. *12 (2)*, 151-169.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en Matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática. 17(1)*, 5-31.

Williams, S. (1991). Models of limit held by college calculus students. *Journal for Research in Mathematics Education*. *22 (3)*, 219-236.